If we solve this equation to figure out the value of y we get

$$y = \frac{x^3}{3} + C$$

حيث C ثابت كيفي. في الحل الذي تم الحصول عليه أعلاه ، نرى أن y دالة في x. بالتعويض عن هذه القيمة y في المعادلة التفاضلية المحددة ، يصبح كلا طرفي المعادلة التفاضلية متساويين.

where C is an arbitrary constant. In the above-obtained solution, we see that y is a function of x. On substituting this value of y in the given differential equation, both the sides of the differential equation becomes equal.

3.5 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 5*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

حدد حل المعادلة التفاضلية

Determine the solution to the differential equation

$$3y' + 4y = 0$$

الذي يحقق الشرط الإبتدائي $y(0) = 2$.

which satisfies the initial condition $y(0) = 2$.

الحـــل

هذه المعادلة تكتب على الشكل التالي

This equation is written in the following form

$$y' = -\frac{4}{3}y$$

إذن الحل الذي يحقق الشرط الإبتدائي هو

So the solution that satisfies the initial condition is

$$y(x) = y(0)\, e^{-\frac{4}{3}x}$$

then **أي:**

$$y(x) = 2e^{-\frac{4}{3}x}.$$

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

لتكن المعادلة التفاضلية التالية:

Let the differential equation be:

$$y' + 2xy = x. \qquad (E)$$

1) أوجد حلول المعادلة التفاضلية المتجانسة.

Find the solutions to the homogeneous differential equation.

2) أوجد حلول المعادلة (E) التي تحقق $y(0) = 1$.

Find the solutions to the equation (E) which satisfies $y(0) = 1$.

الحـــل

الدوال الأصلية للدالة $a(x) = 2x$ هي الدوال $A(x) = x^2/2 + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$ هو ثابت كيفي. ومنه حلول المعادلة المتجانسة E هي كل الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ من الشكل:

The primitive functions of $a(x) = 2x$ are the functions $A(x) = x^2/2 + k$ where $k \in \mathbb{R}$ is a arbitrary constant. Hence, the solutions to the homogeneous equation E are all functions defined on $\mathbb{R}$ of the form:

$$y(x) = ce^{-x^2}$$

حيث $c \in \mathbb{R}$ ثابت كيفي.

where $c \in \mathbb{R}$ is an arbitrary constant.

نبحث الآن عن الحل الخاص لـ E من الشكل:

Now we look for the particular solution of E of the form:

$$y_p(x) = c(x)e^{-x^2}$$

بإستعمال طريقة تغيير الثوابت. لدينا :

using the variable constants method. We've got :

$$y_p'(x) + 2xy_p(x) = c'(x)e^{-x^2}.$$

ومنه y_p هو حل لـ E إذا وفقطإذا كان : $c'(x) = xe^{x^2}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

Of which y_p is a solution to E if and only if: $c'(x) = xe^{x^2}$ for each $x \in \mathbb{R}$.

لتكن الدالة $c(x)$ من بين الدوال الأصلية للدالة xe^{x^2} على سبيل المثال :

Let the function $c(x)$ be among the primitive functions of the function xe^{x^2}, for example:

$$c(x) = 1/2e^{x^2}.$$

ومنه الدالة y_p حيث

then the function y_p where

$$y_p(x) = 1/2e^{x^2}e^{-x^2} = 1/2$$

هي حل لـ E. وعليه، حلول المعادلة E هي كل الدوال من الشكل :

is a solution to E. Therefore, the solutions to the equation E are all functions of the form:

$$y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}\ c \in \mathbb{R}.$$

حيث y حل للمعادلة E_1، هنا الشرط $y(0) = 1$ يكافئ : $c = 1/2$.

where y is a solution to equation E_1, here the condition $y(0) = 1$ is equivalent to: $c = 1/2$.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

نقترح التكامل على أكبر مجال ممكن في $]0, \infty[$ للمعادلة التفاضلية:

We propose to integrate over the largest possible interval in $]0, \infty[$ of the differential equation:

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2 \qquad (E).$$

1) أوجد $a \in]0, \infty[$ حيث $y(x) = ax$ حل خاص y_0 للمعادلة (E).

Find $a \in]0, \infty[$ where $y(x) = ax$ is a particular solution y_0 of equation (E).

2) أثبت أن تغيير الدالة : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ يحول المعادلة (E) إلى المعادلة التفاضلية:

Prove that changing the function: $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$. Converts the equation (E) to the differential equation:

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \qquad (E_1)$$

3) أوجد حلول (E_1) على $]0, \infty[$.

Solve (E_1) by $]0, \infty[$.

4) أوجد كل حلول المعادلة (E) المعرفة على $]0,\infty[$.
Find all solutions to the equation (E) defined on $]0,\infty[$.

الحـــل

لنحل المعادلة التفاضلية التالية

Let's solve the following differential equation

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1) **نبحث على** $a \in]0,\infty[$ **حيث** $y_0(x) = ax$ **يكون حل خاص للمعادلة، ولأن**

We are looking for $a \in [0,\infty[$ where $y_0(x) = ax$ is a special solution to the equation, and because

$$y_0'(x) - \frac{y_0(x)}{x} - y_0(x)^2 = -a^2x^2,$$

y_0 **هو حل إذا وفقط إذا كان** $a = \pm 3$. **و ليكن** $a = 3$.

y_0 is a solution if and only if $a = \pm 3$, we take $a = 3$.

2) **إذا كانت** z **دالة من الصنف** $\mathcal{C}^1$ **ولا تنعدم، نضع**

If z is a function of class $\mathcal{C}^1$ and does not null, we set

$$y(x) = 3x - 1/z(x).$$

ومنه y **حل إذا وفقط إذا كان :**

of which y is a solution if and only if:

$$\frac{z'(x)}{z(x)^2} + \frac{1}{xz(x)} - \frac{1}{z(x)^2} + \frac{6x}{z(x)} = 0.$$

بالضرب في $z(x)^2$ **نحصل على** y **حل للمعادلة السابقة إذا وفقط إذا كان** z **يحقق**

Multiplying by $z(x)^2$ we get y is a solution to the previous equation if and only if z satisfies

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \qquad (E_1)$$

3) **لنحل المعادلة** (E_1) **على المجال** $]0,\infty[$. **نأخذ دالة أصلية للدالة** $x \mapsto 6x + 1/x$ **الدالة** $x \mapsto 3x^2 + \ln(x)$

ومنه حلول المعادلة المتجانسة هي الدالة:

Let's solve the equation (E_1) over the interval $]0,\infty[$. We take a primitive function of $x \mapsto 6x + 1/x$ the function $x \mapsto 3x^2 + \ln(x)$. Then, the solutions of the homogeneous equation are the function:

$$x \mapsto Ae^{-3x^2-\ln(x)}.$$

لنبحث عن حل خاص للمعادلة (E_1) من الشكل

Let's find a special solution to the equation (E_1) of the form

$$z_p(x) = \alpha(x)e^{-3x^2-\ln(x)}$$

ومنه z_p هو حل إذا كان

Hence, z_p is a solution if

$$\alpha'(x)e^{-3x^2-\ln(x)} = 1$$

أي إذا كان $\alpha'(x) = xe^{3x^2}$ على سبيل المثال إذا كان $\alpha(x) = e^{3x^2}/6$.
حلول المعادلة (E_1) هي :

i.e. for example if $\alpha'(x) = xe^{3x^2}$ and $\alpha(x) = e^{3x^2}/6$. The solutions to the equation (E_1) are:

$$z(x) = \frac{1 + Ae^{-3x^2}}{6x}, \qquad \text{where} \qquad A \in \mathbb{R}.$$

4) **سنستنتج الآن حلول (E) المعرفة على المجال $]0,\infty[$.**

We will now derive the solutions of (E) defined on the interval $]0,\infty[$.

ليكن y حل من الصنف $\mathcal{C}^1$ معرف على المجال $]0,\infty[$. ولنفرض مبدئيا أن $y(x) > 3x$ على المجال المفتوح $I \subset]0,\infty[$، بأكبر قدر ممكن. ومنه

Let y be a solution of class $\mathcal{C}^1$ defined on the interval $]0,\infty[$. Let's assume that $y(x) > 3x$ is on the open interval $I \subset [0,\infty[]$, as large as possible. Then

$$y(x) = 3x - 1/z_I(x)$$

من أجل بعض الدوال $z_I < 0$ من الصنف $\mathcal{C}^1$ على I. حسب السؤال السابق ، لدينا بالضرورة أن:

For some functions $z_I < 0$ of class $\mathcal{C}^1$ on I. According to the previous question, we necessarily have that:

$$z_I(x) = \frac{1 + A_I e^{-3x^2}}{6x}$$

من أجل الثابت $A_I \in \mathbb{R}$. ولأن $z_I < 0$ فإن $A_I < 0$ لكن $I \neq]0, +\infty[$ لأن $1 > A_I e^{-3x^2}$ إذا كان x كبير بما يكفي. وبالتالي، يوجد مجال مفتوح J بحيث يكون $y(x) < 3x$ على J.

for the constant $A_I \in \mathbb{R}$, and because $z_I < 0$ then $A_I < 0$ but $I \neq]0, +\infty[$ because $1 > A_I e^{-3x^2}$ if x is big enough. Thus, there is an open interval J such that $y(x) < 3x$ over J.

نفترض مرة أخرى أن J كبير بقدر الإمكان. و أن في J، $y(x) = 3x - 1/z_J(x)$ لبعض الدوال $z_J > 0$ من الصنف $\mathcal{C}^1$. مرة أخرى من السؤال السابق،

We assume again that J is as large as possible and that in J , $y(x) = 3x - 1/z_J(x)$ for some functions $z_J > 0$ of class $\mathcal{C}^1$. Again from the previous question,

$$z_J(x) = \frac{1 + A_J e^{-3x^2}}{6x}$$

حيث A_J ثابت.

where A_J is a constant.

لأن المجال المفتوح $J =]a, b[$ كان من المفترض أن يكون الحد الأقصى، ومنذ ذلك الحين y يفترض أن يتم تعريفه على المجال $]0, +\infty[$ إذا كان $a > 0$ فإن $y(a) = 3a$ و نفس الشيء إذا كان $b < \infty$، $y(b) = 3b$، لأنه إن لم يكن باستمرارية الدالة y يكون لدينا $y(x) < 3x$ على المجال $]a - \epsilon, b + \epsilon[$ من أجل $\epsilon > 0$ صغير. هذا ممكن فقط على التوالي إذا كان $z_J(x) \to +\infty$ عندما $x \to a$ أو $z_J(x) \to +\infty$ عندما $x \to b$. لكن لقد قلنا أن:

Because the open interval $J =]a, b[$ was supposed to be the maximum, and since y is assumed to be defined on the interval $]0, +\infty[$ if $a > 0$ then $y(a) = 3a$ and the same if $b < \infty$, $y(b) = 3b$, because if it weren't for the continuity of the function y we would have $y(x) < 3x$ over $]a - \epsilon, b + \epsilon[$ for small $\epsilon > 0$. This is only possible respectively if $z_J(x) \to +\infty$ when $x \to a$ or $z_J(x) \to +\infty$ when $x \to b$. But we have said that:

$$z_J = \frac{1 + A_J e^{-3x^2}}{6x},$$

لذلك هذا غير ممكن على الإطلاق (باستثناء إذا كان على التوالي $a = 0$ و $b = 0$).

So this is not possible at all (except if respectively $a = 0$ and $b = 0$).

ومنه ليكن $y(x) = 3x$ على المجال $]0, +\infty[$ وليكن $y(x) < 3x$ على المجال $]0, +\infty[$ في هذه الحالة الأخيرة، $z(x) = 1/(3x - y(x))$ معرف على المجال $]0, +\infty[$ ويكتب

So, let $y(x) = 3x$ over the interval $]0, +\infty[$ and let $y(x) < 3x$ over $]0, +\infty[$ in this last case, $z(x) = 1/(3x - y(x))$ defined on the interval $]0, +\infty[$ and write

$$z(x) = [1 + Ae^{-3x^2}]/6x.$$

لأن $z > 0$، بالضرورة $A \geq -1$. ومنه إذا كان y حل فإن:

Because $z > 0$, is necessarily that $A \geq -1$. Hence, if y is a solution, then:

$$y(x) = 3x \qquad \text{أو} \qquad y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + Ae^{-3x^2}} \qquad \text{حيث } A \geq -1.$$

على العكس من ذلك ، إذا كان y معرف، فإن y معرف و من الصنف $\mathcal{C}^1$ على المجال $]0, \infty[$، ويمكننا التحقق من أنه حل.

Conversely, if y is defined, then y is defined and of class $\mathcal{C}^1$ on the interval $]0, \infty[$, and we can verify that it is a solution.

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

لتكن المعادلة التفاضلية التالية

Let the following differential equation

$$y'' + 2y = 0$$

1) حل هذه المعادلة.

Solve this equation.

2) أوجد الدالة f التي تحقق حلا للمعادلة التفاضلية السابقة والتي تحقق الشروط التالية: $f(0) = 1$ و $f'(0) = -2$.

Find the function f that solves the previous differential equation and that satisfies the *following conditions:* $f(0) = 1$ *and* $f'(0) = -2.$

الحـــل

1) تكتب المعادلة من الشكل :

Write the equation in the form:

$$y'' + \left(\sqrt{2}\right)^2 y = 0$$

ومنه حلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ التي تأخذ الشكل:

and its solutions are the functions defined on $\mathbb{R}$ that take the form:

$$\alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2) الدالة f التي تحقق حلا للمعادلة التفاضلية السابقة والتي تحقق الشروط التالية: $f(0) = 1$ و $f'(0) = -2$ أي يوجد $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ حيث:

The function f that achieves a solution to the previous differential equation and that fulfills the following conditions: $f(0) = 1$ and $f'(0) = -2$, i.e. there is $alpha, \beta \in \mathbb{R}$ where:

$$f(x) = \alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x \Longrightarrow f(0) = \alpha = 1$$

و

$$f'(x) = \sqrt{2}\beta \cos \sqrt{2}x - \sqrt{2}\alpha \sin \sqrt{2}x \Longrightarrow \sqrt{2}\beta = -2 \Longrightarrow \beta = -\sqrt{2}$$

أي الدالة التي تحقق الشرطين هي:

Which function satisfies both conditions is:

$$f(x) = \cos \sqrt{2}x - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x.$$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية:

Find the solutions to the following differential equations:

$$1)\quad y'' - 3y' + 2y = e^x.$$
$$2)\quad y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x.$$
$$3)\quad 4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$$

الحــل

لتكن المعادلة:

Let the equation:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

كثير الحدود المميز:

the characteristic polynomial is

$$f(r) = (r-1)(r-2)$$

وبالتالي فإن حلول المعادلة المتجانسة هي جميع الدوال:

So the solutions to the homogeneous equation are all functions:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad \text{حيث} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

نبحث عن حل خاص من الشكل $y_p(x) = P(x)e^x$ **نحن في الحالة** $(\imath\imath)$ **الشرط** $(*)$ **على** P **هو :** $P'' - P' = 1$ **و** $P(x) = -x$ **محقق.**

We are looking for a special solution of the form $y_p(x) = P(x)e^x$. We are in the condition $(\imath\imath)$ $(*)$ over P is : $P'' - P' = 1$ and $P(x) = -x$ verifies:

لذلك فإن حلول المعادلة هي الدوال من الشكل:

Therefore, the solutions to the equation are functions of the form:

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2 e^{2x} \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

هنا $y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x$.

$0 = (r-1)(r+1)$ **المعادلة المتجانسة لها حلول من الشكل:**

Here $0 = (r-1)(r+1)$ the homogeneous equation has solutions of the form:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

نلاحظ أن الدالة $3\cos x$ تحقق المعادلة : $y''-y=-6\cos x$، لذلك علينا إيجاد حل y_1 للمعادلة $y''-y=2x\sin x$ لأن $y_p(x)=3\cos x+y_1(x)$ سيكون حلاً للمعادلة المدروسة. لهذا، نلاحظ أن $2x\sin x=\mathrm{Im}(2xe^{ix})$ ونستخدم الطريقة الموضحة أعلاه لإيجاد حل z_1 للمعادلة : $y''-y=2xe^{ix}$. نبحث عن z_1 على الشكل $P(x)e^{ix}$ حيث P هي كثيرة الحدود من الدرجة 1 لأن $f(i)=-2\neq 0$. لدينا $f'(i)=2i$ الشرط $(*)$ على P ومنه : $2iP'(x)-2P(x)=2x$ الذي يعطي بعد التعريف $P(x)=-x-i$. ومنه

We note that the function $3\cos x$ satisfies the equation: $y''-y=-6\cos x$, so we need to solve y_1 for the equation $y''-y=2x\sin x$ because $y_p(x)=3\cos x+y_1(x)$ will be a solution to the studied equation. For this, we note that $2x\sin x=\mathrm{Im}(2xe^{ix})$ and we use the above method to solve z_1 for the equation: $y''-y=2xe^{ix}$. We are looking for z_1 of the form $P(x)e^{ix}$ where P. It is a polynomial of degree 1 because $f(i)=-2\neq 0$. we've got $f'(i)=2i$ condition $(*)$ on P, from which: $2iP'(x)-2P(x)=2x$ which gives the definition dimension $P(x)=-x-i$. Then

$$y_1(x)=\mathrm{Im}((-x+i)e^{ix})=-x\sin x-\cos x.$$

وبالتالي فإن الحلول هي الدوال:

So the solutions are functions:

$$y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+2\cos x-x\sin x \quad \text{where} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

طريقة أخرى لإيجاد حل لـ $y''-y=2x\sin x$: نبحث عن الحل من الشكل $y_1(x)=A(x)\sin x+B(x)\cos x$ حيث A,B هي كثيرات الحدود من الدرجة 1 لأن i ليس جذر المعادلة المميزة نحسب y_1'، y_1'' ونطبق المعادلة المدروسة على y_1 . . . نتحصل على الشرط :

$$(A''-A-2B')\sin x+(B''-B-2A')=2x\sin x$$

الذي يتحقق إذا كان :

Another way to solve for $y''-y=2x\sin x$: We look for the solution from the form $y_1(x)=A(x)\sin x+B(x)\cos x$ where A,B are polynomials of degree 1 because i is not the root of the characteristic equation. We calculate y_1', y_1'' and apply the studied equation to y_1 ...we get the condition:

$$(A''-A-2B')\sin x+(B''-B-2A')=2x\sin x$$

which is achieved if:

$$\left\{\begin{array}{l} A'' - A - 2B' = 2x \\ B'' - B - 2A' = 0 \end{array}\right. .$$

ونكتب: $A(x) = ax + b$ ت $B(x) = cx + d$، بعد التحديد نحصل : $a = d = -1$، $b = c = 0$ الذي يحدد y_1.

And we write: $A(x) = ax + b$ et $B(x) = cx + d$, after defining we get: $a = d = -1$, $b = c = 0$ which defines y_1.

$4y'' + 4y' + 5y = \sin xe^{-\frac{x}{2}}$.

المعادلة المميزة لها جذران مركبان $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ و $r_2 = \overline{r_1}$ وحلول المعادلة المتجانسة هي:

The characteristic equation has two complex roots $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ and $r_2 = \overline{r_1}$. The solutions to the homogeneous equation are:

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

لدينا

$$\sin xe^{-\frac{x}{2}} = \operatorname{Im}(e^{(-\frac{1}{2}+i)x}),$$

نبدأ بالبحث عن حل z_p من المعادلة مع الطرف الثاني الجديد $e^{(-1/2+i)x}$. لأن $-\frac{1}{2} + i$ هو جذر المعادلة المميزة ، نبحث عن:

we've got

$$\sin xe^{-\frac{x}{2}} = \operatorname{Im}(e^{(-\frac{1}{2}+i)x}),$$

We start by finding the solution to the z_p of the equation with the new second side $e^{(-1/2+i)x}$. Because $-\frac{1}{2} + i$ is the root of the characteristic equation, we look for:

$$z_p(x) = P(x)e^{(-\frac{1}{2}+i)x}$$

حيث P من الدرجة 1. وبالتالي الشرط $(*)$ على P :

Where P is of degree 1. Hence the condition $(*)$ on P :

$$4P'' + f'(-1/2 + i)P' + f(-1/2 + i)P = 1$$

Writes

يكتب :

$$8iP' = 1(P'' = 0 \quad f(-\frac{1}{2} + i) = 0 \;\text{ و }\; f'(-\frac{1}{2} + i) = 8i)$$

لذلك يمكننا أن نأخذ $P(x) = -i/8x$ و $z_p(x) = -\frac{i}{8}xe^{(-\frac{1}{2}+i)x}$ ومن هنا الجزء التخيلي:

So we can take $P(x) = -i/8x$ and $z_p(x) = -\frac{i}{8}xe^{(-\frac{1}{2}+i)x}$ Hence the imaginary part is:

$$y_p(x) = \text{Im}(-\frac{i}{8}xe^{(-\frac{1}{2}+i)x}) = \frac{1}{8}x\sin xe^{-\frac{x}{2}}$$

هو حل معادلتنا. لذلك فإن الحلول هي جميع الدوال من الشكل :

is the solution to our equation. So the solutions are all functions of the form:

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}(c_1\cos x + (c_2 + \frac{1}{8}x)\sin x) \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$