تمارين المنفعة القياسية

▪ التمرين الأول:

1-ما الذي نقصده بمصطلح " المنفعة " ؟ وما الذي يظهره جدول المنفعة ؟

2-ما الذي يحدث للمنفعة الإجمالية التي يحصل عليها المستهلك من استهلاك كميات متزايدة من سلعة ما لكل وحدة زمنية ؟

3-ما هي " المنفعة الحدية " ؟ ما الذي يحدث للمنفعة الحدية مع استهلاك المزيد من وحدات السلعة لكل وحدة زمانية ؟

4-ما الذي تهتم به نظرية طلب المستهلك؟ ولماذا نقوم بدراستها ؟

▪ التمرين الثاني:

1-من جدول UTx الموضح قم باشتقاق جدول UMx

Qx	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
UTx	0	14	26	37	47	56	64	70	74	77	78

2-أعرض الجدولين بيانيا.

▪ التمرين الثالث:

1-ما المقصود بتوازن المستهلك؟

2-أذكر شرط توازن المستهلك

3-إذا كان $\frac{U}{Px}$ لآخر دينار يتم إنفاقه على السلعة x أكبر من $\frac{UMy}{Py}$ لآخر دينار يتم إنفاقه على السلعة y . كيف يمكن للمستهلك الوصول إلى حالة التوازن ؟.

▪ التمرين الرابع:

لدينا الدخل Py= 1D, Px = 2 D, R= 10 D

يتحقق توازن المستهلك عند شراء 2 وحدات من x و6 وحدات من y .

1-أوجد نقطة التوازن عند حيث Px = 1 D حيث UMx , UMy ممثلة في الجدول التالي:

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
UMx	14	12	11	10	9	8	6	4	3	1
UMy	13	11	10	8	7	6	3	2	0	5-

2-كيف يتم اشتقاق جدول طلب المستهلك للسلعة x ؟

▪ التمرين الخامس:

لدينا جدول المنفعة الكلية الناتجة عن استهلاك كميات مختلفة من سلعة ما.

X	0	1	2	3	4	5	6	7
UT	0	10	18	24	28	30	30	28

المطلوب:

1-أحسب المنفعة الحدية لمختلف المستويات من الاستهلاك.

2-مثل بيانيا كل من المنفعة الكلية والمنفعة الحدية.

3-فسر سلوك كل من المنفعة الكلية والمنفعة الحدية.

▪ التمرين السادس:

نفترض أن مستهلكا يحدد حجم الإنفاق الخاص باستهلاكه بـ(50دج) في اليوم ينفقها على السلعتين y,x أسعارها على التوالي 5 و 4 ، الحالات الثلاث التالية تبين وضعيات احتمالية يمكن أن يسلكها المستهلك، بين الحالة التي يكون فيها هذا المستهلك في وضعية توازن ؟

- يشتري 6 وحدات من السلعة x ، و 5 وحدات من y. مع العلم أن المنفعة الكلية لـ x تبلغ 400 وحدة منفعة، أما لـ y فتبلغ 800 وحدة منفعة والحدية 30 وحدة منفعة على التوالي.

- يشتري 5 وحدات من السلعة x، منفعتها الحدية 25 وحدة و6 وحدات من y منفعتها الحدية 20 وحدة منفعة .
- يشتري 6 وحدات من السلعة x، منفعتها الحدية 30 وحدة منفعة و5 وحدات من y منفعتها الحدية 24 وحدة.

▪ التمرين السابع:

ليكن لدينا جدول الكميات المستهلكة من السلعة x ومن السلعة y خلال فترة زمنية محددة، والمنافع الحدية لكل من السلعتين، وأن الدخل المتاح لهذا المستهلك هو R يساوي 100 وحدة نقدية، وسعر السلعة x هو Px= 10 ، وسعر السلعة y هو Py=20 .

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U Mx	20	19	18	16	14	11	8	4	0
Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
UMy	24	22	20	18	16	14	12	10	8

المطلوب: كيف يحقق المستهلك توازنه في حدود دخله، مع التقيد بأسعار كل من السلعتين (تحديد xو y اللتين يكون عندهما المستهلك في حالة توازن)؟

▪ التمرين الثامن:

يمكن لشخص ما قضاء وقته بين العمل والراحة، فإذا رمزنا لوقت العمل بـ(x) ولوقت الراحة بـ (y) وبـ (A) للوقت الإجمالي، وكانت المنفعة الكلية لهذا الشخص:

$$Ut = XY + bX$$

- أوجد كمية العمل وكمية الراحة التي تعظم منفعة هذا الشخص ؟

▪ التمرين التاسع:

لتكن لدينا دالة المنفعة الكلية التالية لأحد المستهلكين: $Ut = 2x^2 y^{1/2}$

إذا علمت أن معادلة الدخل هي: $R = xPx + yPy$

المطلوب: – أوجد دوال الطلب على السلعتين x و y ؟

-إذا كان R = 1500 و Py = 10 ، Px =8 ، ما هي الكميات المطلوبة من السلعتين x و y ؟

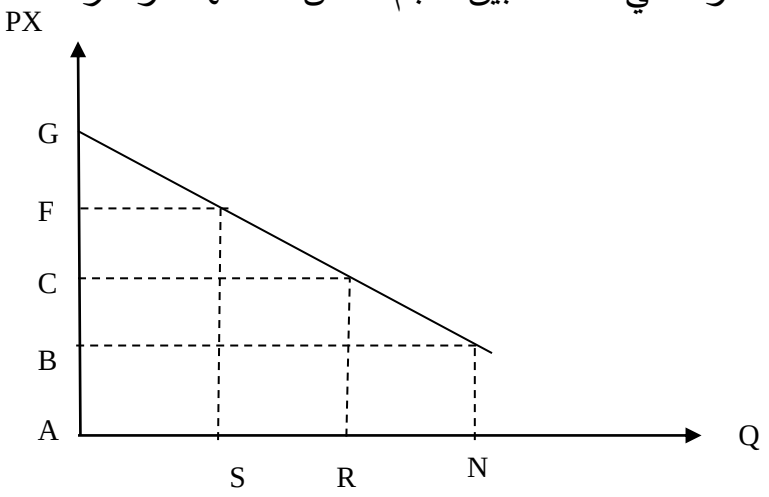
-إذا انخفض سعر السلعة x إلى 5 و.ن، ارسم منحنى الطلب على السلعة x ، ماذا تلاحظ؟

▪ التمرين العاشر:

1-ما هو مصدر فائض المستهلك؟ وكيف يمكن قياسه ؟

2-ما هو فائض المستهلك في الشكل التالي عندما يكون السعر AF ؟ AB؟

AC؟ وما هي العلاقة بين حجم فائض المستهلك وسعر السلعة ؟



▪ التمرين الحادي عشر:

في ضوء جدول طلب المستهلك للسلعة x في الجدول التالي

Px	2.50D	2.00D	1.50D	D1.00
Qx	1	2	3	4

وضح المبلغ الذي يكون المستهلك على استعداد لدفعه لكل وحدة من السلعة x ؟

حلول التمارين

▪ حل التمرين الأول:

1-يشير مصطلح " المنفعة " إلى خاصية السلعة التي تمكن من إشباع حاجة أو رغبة، وبدون تلك الخاصية لا يكون هناك أي طلب على السلعة، فعلى سبيل الإيضاح سوف نفترض أنه يمكن قياس الإشباع بوحدات المنفعة، ويوضح جدول المنفعة عدد هذه الوحدات التي يحصل عليها الفرد من خلال استهلاكه لكميات مختلفة من السلعة لكل وحدة زمانية. أي أن جدول المنفعة يوضح ذوق المستهلك بالنسبة لتلك السلعة، وبما أن المستهلكين عادة ما يختلفون في أذواقهم، فإن جدول المنفعة يختلف من مستهلك لآخر ومع تغير ذوق المستهلك يتغير جدول المنفعة الخاص به.

2-مع قيام الفرد باستهلاك المزيد من الوحدات من سلعة معينة لكل وحدة زمانية فإن إجمالي المنفعة التي يحصل عليها تتزايد إلا أنه إذا استمر الفرد في استهلاك المزيد من تلك السلعة، فإنه يصل إلى نقطة يتوقف عندها إجمالي المنفعة عن التزايد وتعرف تلك النقطة باسم نقطة التشبع، والاستمرار في استهلاك المزيد من تلك السلعة سوف يؤدي إلى انخفاض إجمالي المنفعة لها.

3-يشير مصطلح " المنفعة الحدية " إلى التغير في المنفعة الكلية الناتج عن استهلاك المستهلك لكل وحدة إضافية من السلعة، والمنفعة الحدية موجبة لكنها تقل طالما كانت المنفعة الكلية تتزايد، وتساوي الصفر عند نقطة التشبع عندما تكون المنفعة الكلية قيمة عظمى ولا تزيد أو تقل.

أما بعد نقطة التشبع فتنخفض المنفعة الكلية وتكون قيمة المنفعة الحدية سالبة، يلاحظ أن المنفعة الحدية قد تتزايد حتى نقطة معينة، فمثلا قد يحقق الفنجان الثاني من القهوة لبعض

الأفراد قدرا من الرضا أكبر مما يحققه الفنجان الأول، لكن مع شرب المزيد من القهوة يوميا فإن المنفعة الحدية لا بد أن تتناقص في النهاية.

4-تهتم نظرية طلب المستهلك بمنحنى طلب الفرد على سلعة ما، وكيفية اشتقاق هذا المنحنى والعوامل التي تحدد موقعه وشكله.

▪ حل التمرين الثاني:

أ- بما أن المنفعة الحدية هي التغير في المنفعة الكلية بالنسبة للكميات المستهلكة فإن:

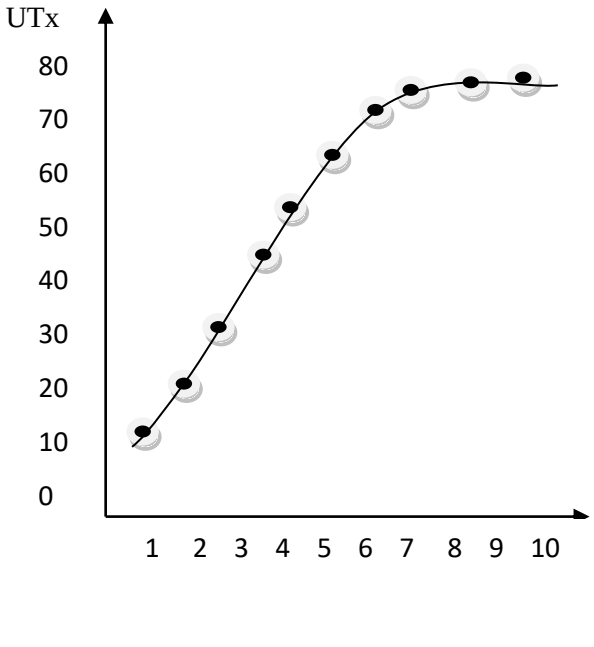
$$UMx = \frac{\Delta UTx}{\Delta x}$$

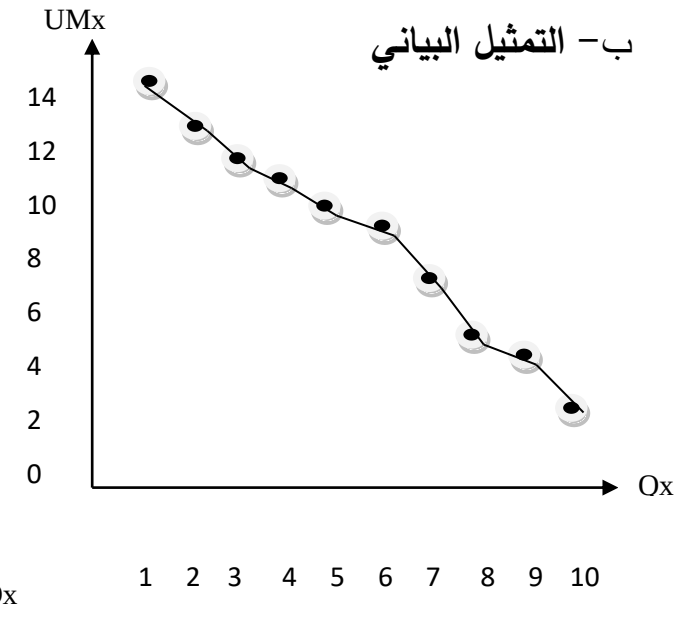
$$UMx = \frac{UT2 - UT1}{x2 - x1}$$

وبالتالي يكون الجدول كما يلي:

Qx	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
UTx	0	14	26	37	45	56	64	70	74	77	78
UMx	–	14	12	11	10	9	8	6	4	3	1

ب- **التمثيل البياني**





▪ حل التمرين الثالث:

1-بمعرفة ذوق المستهلك ودخله، وأسعار السلع، يكون المستهلك في حالة توازن إذا أنفق دخله بطريقة تؤدي إلى تعظيم إجمالي المنفعة أو الإشباع الذي يحصل عليهما بإنفاق كل ما لديه من دخله.

2-يقوم المستهلك بتعظيم منفعته الكلية التي يحصل عليها من دخله عندما تساوي المنفعة الحدية لآخر دينار يقوم بإنفاقه على كل سلعة ما.

ويمكن التعبير عن ذلك الشرط رياضيا كما يلي:

المنفعة الحدية المشتركة لآخر دينار يتم إنفاقه على السلعة $= \frac{UMy}{Py}\frac{UMx}{Px}$

حيث Py, Px هما سعر xو سعر yعلى الترتيب، ويمكن التعبير عن شرط التوازن على أنه $= \frac{UMy}{Py}\frac{UMx}{Px}$ عند النقطة التي يكون عندها $xPx + yPy = R$ (الدخل النقدي للمستهلك) و ($= \frac{UMy}{Py}\frac{UMx}{Px}$) هو شرط لازم لكنه ليس كان للحصول على التوازن فقد يكون هناك مستويات أخرى من الاستهلاك يكون عندها $= \frac{UMy}{Py}\frac{UMx}{Px}$ =.....=) لكن النقطة التي ينفق عندها دخله بالكامل وحدها هي نقطة التوازن.

3-إذا أصبحت $\frac{UMx}{Px}$ أكبر من $\frac{UMy}{Py}$ فإن آخر دينار يتم إنفاقه على السلعة x يحقق منفعة أكبر من آخر دينار يتم إنفاقه على السلعة y . ومن هنا يجب على المستهلك زيادة المنفعة الحدية الخاصة بـ x . ويقلل من y ويجب أن يستمر حتى يصبح $= \frac{UMy}{Py}\frac{UMx}{Px}$ لآخر دينار يتم إنفاقه على السلعتين.

▪ حل التمرين الرابع:

1- عند انخفاض Px إلى 1 دينار يظل المستهلك في حالة توازن باستمراره في 2 وحدات من x و 6وحدات من y لأن: $\frac{UM_X}{P_X} = \frac{UM_Y}{P_Y} \Rightarrow \frac{12 \text{ وحدة}}{1 \text{ دينار}} \frac{6 \text{ وحدات}}{1 \text{ دينار}} =$

ولن ينفق إلا 8 دينار من دخله البالغ 10 دينار. بما أن الدينار الثاني الذي يتم إنفاقه لشراء الوحدة الثانية من x يعطي منفعة حدية أكبر من الدينار السادس المدفوع في الوحدة السادسة من y. لذا فإنه يجب على المستهلك زيادة الإنفاق على x وخفض الإنفاق على y ، وبشراء المزيد من x ينتقل المستهلك إلى أسفل في جدول تناقص المنفعة الحدية لـ x وبشراء كميات أقل من y فإنه يتحرك لأعلى في جدول تناقص المنفعة الحدية لـ y ، ويصل المستهلك إلى التوازن عندما تكون المنفعة الحدية لآخر دينار يدفعه في x مساوية للمنفعة الحدية لآخر دينار يدفعه في y. ويحدث عند استخدام10 دينار في شراء 6 وحدات من x و 4 وحدات من y لأن:

$$= \frac{8 \text{ وحدات}}{1 \text{ دينار}} \frac{8 \text{ وحدات}}{1 \text{ دينار}} \Rightarrow = \frac{UM_X}{P_X} = \frac{UM_Y}{P_Y}$$

أي 8 وحدات منفعة من آخر دينار يتم إنفاقه على x و y.

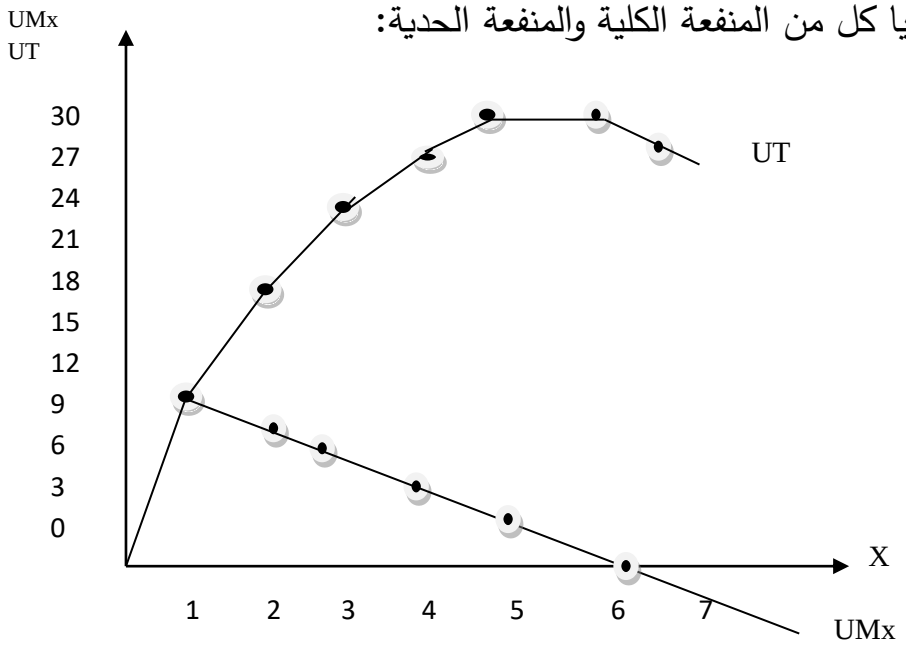
▪ حل التمرين الخامس:

1- حساب المنفعة الحدية لمختلف المستويات من الاستهلاك:

لدينا: المنفعة الحدية تعطى بالعلاقة التالية : $UMx = \frac{\Delta UT}{\Delta x}$

X	0	1	2	3	4	5	6	7
UT	0	10	48	24	28	30	30	28
UMx	-	10	8	6	4	2	0	2-

2-تمثيل بيانيا كل من المنفعة الكلية والمنفعة الحدية:



3-تفسير سلوك كل من المنفعة الكلية والمنفعة الحدية:

- من الرسم نلاحظ ما يلي:

أ-بالنسبة لـ UT (المنفعة الكلية):

- في البداية تتزايد بمعدل متزايد، ثم تتزايد بمعدل متناقص.
- تصل إلى أعظم قيمة لها (نقطة الإشباع) UT= 30 ، عند x =6 ثم تبدأ في التناقص تماما.

ب- بالنسبة لـ UMx(المنفعة الحدية):

- يصل إلى أعظم قيمة له UMx =10 عند x = 1 ثم يتناقص في المجال الموجب (+) إلى أن ينعدم عند x =6 ، بعدها يتناقص في المجال السالب (-).

▪ حل التمرين السادس:

1-إيجاد الحالات التي يكون فيها هذا المستهلك في حالة توازن:

لدينا المعلومات التالية: R=50 , Py= 4 , Px =5

شرط التوازن: $\frac{UMy}{Py}=\frac{UMx}{Px}$ ، قيد الميزانية: R = xPx + yPy

- **الحالة الأولى:** لدينا x=6 y=5, UMx =60, UMy= 30,

لتحقيق وضعية التوازن لابد من تحقق شرط التوازن وقيد الميزانية.

لدينا : $\frac{30}{4}=\frac{UMy}{Py}$ =12 $\frac{UMx}{Px}=\frac{60}{5}$ =7.5,

ومنه:= $\frac{UM_X}{P_X}\neq\frac{UM_Y}{P_Y}$ إذن شرط التوازن غير محقق.

الحالة (1) مرفوضة.

- **الحالة الثانية:** لدينا x=6 y=5, UMx =25, UMy=20,

1- $\frac{UMx}{Px}=\frac{25}{5}$ =5, $\frac{UMy}{Py}=\frac{20}{4}$ =5 $\Rightarrow \frac{UMy}{Py}=\frac{UMx}{Px}$=5

شرط التوازن محقق.

6x5 + 5x4 = 30 + 20 = 50 = 50.

شرط قيد الميزانية محقق أيضا إن الحالة (2) مقبولة أي المستهلك في وضعية توازن.

- **الحالة الثالثة:** لدينا : x=6 y= 4, UMx =30, UMy=24,

$\frac{UMx}{Px}=\frac{30}{5}$ =6, $\frac{UMy}{Py}=\frac{24}{4}$ = 6 $\Rightarrow \frac{UMy}{Py}=\frac{UMx}{Px}$=6

شرط التوازن محقق.

6 x5 + 4 x 4 = 30 + 16 = 46 ≠ 50

شرط قيد الميزانية غير محقق إذن الحالة (3) مرفوضة.

▪ حل التمرين السابع:

لدينا : Py=20, Px = 10, R= 100

- تحديد قيم y, x اللتين يكون عندهما المستهلك في حالة توازن.
- لإيجاد قيم y, x يجب شرط التوازن وشرط قيد الميزانية

$$\begin{cases} \frac{UMx}{Px} = \frac{UMy}{Py} \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ xPx + yPy = R \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

x,y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{UMx}{Px}$	2	1.9	1.8	1.6	1.4	1.1	0.8	0.4	0
$\frac{UMy}{Py}$	1.2	1.1	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4

- من خلال الجدول نجد أن الشرط الأول محقق عند قيم y,x التالية (2،6) ، (5،7)، (8،9).
- التأكد من صحة الشرط الثاني عند هاته القيم.

- الشرط الثاني محقق (x,y) = (6,2) = 6x10 + 2x20 = 60 +40 = 100 = 100
- الشرط الثاني غير محقق (x,y) = (7,5) = 7x10 + 5x20 = 70 +100 = 170 ≠100
- الشرط الثالث غير محقق (x,y) = (8,9) = 8x10 + 9x20 = 80 + 180 = 260≠ 100

إذن قيم y,x التي يكون عندها المستهلك في حالة توازن هي 6 و 2 على الترتيب.

▪ حل التمرين الثامن:

لدينا دالة المنفعة الكلية: $UT = xy+bx$ ولدينا أيضا $A = x+ y.....(1)$

1-إيجاد كمية العمل (x) وكمية الراحة (y) التي تعظم منفعة هذا الشخص:

- لدينا شرط التوازن من الشكل : $= \frac{UMyUMx}{Py \quad Px}$

$\Rightarrow UMx = \frac{\partial UT}{\partial x} = y + b$; $UMy = \frac{\partial UT}{\partial y} = x$ -

ومن خلال المعادلة (1) نستنتج أن $Py = Px = 1$

إذن : $y+b = x.....\Rightarrow = UMy \Rightarrow UMx \frac{UMx}{Px} = \frac{UMy}{Py} (*)$

بالتعويض بقيمة x في المعادلة (1) نجد:

$$A= x+ y \Rightarrow A= y + b + y = 2y + b \Rightarrow y = \frac{A-b}{2}$$

نعوض بقيمة y في المعادلة (*) نجد :

$$X= y+b \Rightarrow x = \frac{A-b}{2} +b = \frac{A-b+2b}{2} = \frac{A+b}{2} \Rightarrow x = \frac{A+b}{2}$$

التأكد من صحة النتائج:

لدينا: $A= x+y$ ، بالتعويض بقيم x , y نجد:

$$\frac{A+b}{2} + \frac{A-b}{2} = \frac{A+b+A-b}{2} = \frac{2A}{2} = A$$

إذن قيم x, y التي تعظم منفعة هذا الشخص هي: $x=\frac{A+b}{2}$, $y =\frac{A-b}{2}$

▪ حل التمرين التاسع:

$UT = 2x^2 y^{1/2}$ $R = xPx + yPy$

1-إيجاد دوال الطلب:

$$\frac{UMx}{Px} = \frac{UMy}{Py} \Rightarrow \frac{4xy^{1/2}}{Px} = \frac{x^2y^{-1/2}}{Py} \Rightarrow \frac{4y^{1/2}}{Px} = \frac{xy^{1/2}}{Py} \Rightarrow \frac{4y^{1/2}}{Px} = \frac{x}{PyY^{1/2}}$$

$$\Rightarrow 4YpY = P_x x \Rightarrow x = \frac{4YPy}{Px} \ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

بالتعويض في معادلة الدخل نجد:

دالة الطلب على y: $R = Px\left[\frac{4YPy}{Px}\right]y = \frac{R}{5Py} \Rightarrow R = 5yPy \Rightarrow + yPy$

بالتعويض في (α) نجد

$$x = \frac{4Py\left[\frac{R}{5Py}\right]}{Px} = \frac{4R}{5Px} \qquad x = \frac{4R}{5Px}$$

دالة الطلب على x.

2-إيجاد y, x عند : $R = 1500\ DA,\ Px = 8\ DA,\ Py = 10DA$

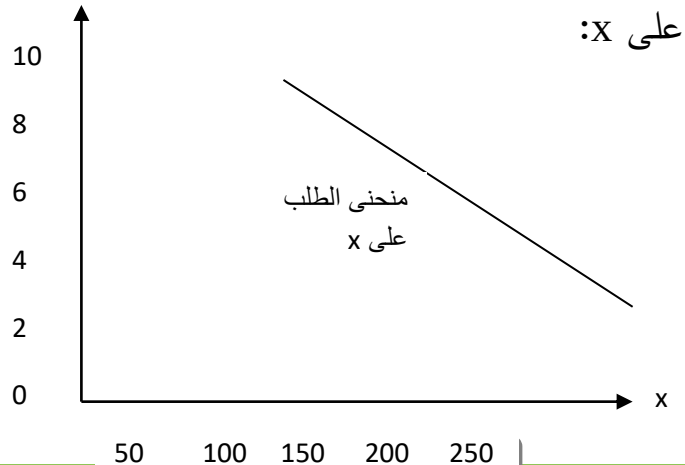
$$X = \frac{4R}{5Px} = \frac{4.1500}{5.8} = 150\ ,\quad x = 150.$$

$$Y = \frac{R}{5Py} = \frac{1500}{50} = 30\ ,\quad y = 30$$

3-رسم منحنى الطلب على x:

لدينا: $x = \frac{4.1500}{5.P_x}$

Px	x
8	150
5	240



- **نتيجة:**

نلاحظ أنه عندما انخفض السعر من 8 إلى 5 زادت الكمية من 150 إلى 240 أي علاقة عكسية بين السعر والكمية.

- **حل التمرين العاشر :**

1-يتم الحصول على السعر الذي يقبل المستهلك دفعه لكل وحدة من السلعة (ارتفاع منحنى الطلب له). وبما أن كل وحدة إضافية توفر كمية أقل من المنفعة الحدية. فإن ما يرضى المستهلك بدفعه يقل لكل وحدة إضافة أي أن منحنى الطلب ذو ميل سالب أو إلى أسفل) وينتهي الأمر إلى الحصول على فائض لأنه يدفع في جميع الوحدات السعر الذي يود دفعه في آخر فقط. على الرغم من أن المنفعة الحدية للوحدات السابقة أكبر. أما عندما تكون كما هو في الشكل السابق قابلة للتقسيم بشكل تام يمكن قياس فائض المستهلك بالمساحة المحصورة أسفل منحنى الطلب وأعلى سعر السلعة.

2-عند سعر AF يقوم المستهلك بشراء AS من السلعة وينفق (AFHS)، ولأنه يقبل بدفع (FGH) مقابل AC من السلعة، فإنه يحصل على فائض مستهلك قدره (CGJ).

وعند سعر (AB) يكون فائض المستهلك (BGK)، وبمعرفة منحنى الطلب الخاص بالفرد بالنسبة لسلعة ما، نجد أنه كلما انخفض سعر السلعة كلما زاد فائض المستهلك لها.

▪ حل التمرين الحادي عشر:

لدينا جدول طلب المستهلك للسلعة x الممثل في الجدول التالي :

Px	2.50D	2.00D	1.50D	1.00D
Qx	1	2	3	4

1-توضيح المبلغ الذي يكون المستهلك على استعداد لدفعه من السلعة x:

يوضح الجدول أن ذلك المستهلك على استعداد لدفع D2.5 لأول وحدة من X و D2.0 لثاني وحدة و D 1.5 للوحدة الثالثة، و D1.00 للوحدة الرابعة.

التمارين المقترحة.

▪ التمرين الأول:

لدينا جدول المنفعة الكلية الناتجة عن استهلاك كميات مختلفة من سلعة ما.

X	0	1	2	3	4	5	6	7
UT	0	10	18	24	28	30	30	28

المطلوب: – احسب المنفعة الحدية لمختلف المستويات من الاستهلاك.

- مثل بيانيا كل من المنفعة الكلية و المنفعة الحدية.
- فسر سلوك كل من المنفعة الكلية و المنفعة الحدية.

▪ التمرين الثاني:

نفترض أن مستهلكا يحدد حجم الإنفاق الخاص باستهلاكه بـ (50 و.ن) في اليوم ينفقها على سلعتين XوY أسعارها على التوالي 5 و4 و.ن ، الحالات الثلاثة التالية تبين وضعيات احتمالية يمكن أن يسلكها المستهلك، بين الحالة التي يكون فيها هذا المستهلك في وضعية توازن؟

- يشتري 6 وحدات من السلعة X و 5 وحدات من Y . مع العلم أن المنفعة الكلية لـXتبلغ 400 وحدة منفعة والحدية 60 وحدة منفعة، أما لـ Y فتبلغ 800 وحدة و الحدية 30 وحدة على التوالي.
- يشتري 5 وحدات من السلعة X منفعتها الحدية 25 وحدة منفعة و &6 وحدات من Y منفعتها الحدية 20 وحدة منفعة.
- يشتري 6 وحدات من السلعة X منفعتها الحدية 30 وحدة منفعة و 4 وحدات من Y منفعتها 24 وحدة منفعة.

▪ التمرين الثالث:

ليكن لدينا جدول الكميات المستهلكة من السلعة x و من السلعة y خلال فترة زمنية محددة ، و المنافع الحدية لكل من السلعتين ، و ان الدخل المتاح لهذا المستهلك هو R يساوي 100 وحدة نقدية ، و سعر السلعة x هو $P_x=10$ ، و سعر السلعة y هو $P_y=20$.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
UM_x	20	19	18	16	14	11	8	4	0
Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
UM_y	24	22	20	18	16	14	12	10	8

المطلوب: كيف يحقق المستهلك توازنه في حدود دخله ، مع التقيد بأسعار كل من السلعتين ؟. (تحديد x و y اللتين يكون عندهما المستهلك في حالة توازن)

▪ التمرين الرابع:

يمكن لشخص ما قضاء وقته بين العمل و الراحة ، فإذا رمزنا لوقت العمل بـ($\dot{X}$) ولوقت الراحة بـ (Y) وبـ (A) للوقت الإجمالي، و كانت المنفعة الكلية لهذا الشخص:

$$U_T=XY+bX$$

اوجد كمية العمل و كمية الراحة التي تعظم منفعة هذا الشخص؟.

▪ التمرين الخامس:

لدينا دالة المنفعة الكلية هي: $U_T=(x+2)(y+1)$

لدينا أيضا دالة الدخل هي: $51=2x+5y$

المطلوب: ما هي شروط تعظيم دالة المنفعة الكلية؟تأكد من ذلك باستعمال الشرط الكافي؟.

تمارين المنفعة الترتيبية

▪ التمرين الأول:

إذا أخذت دالة المنفعة الكلية لمستهلك ما الشكل التالي:

$$U_t = 12x + 30y - 0.5x^2 - 0.5y^2$$

وكانت أسعار السلعتين x و y على التوالي $P_x=2$ و $P_y = 3$ ودخل المستهلك الذي ينفقه على السلعتين هو R= 50 .

أ- حدد نقطة توازن المستهلك .

ب- بكم تتغير المنفعة الكلية إذا ارتفع الدخل بوحدة نقدية واحدة .

ج-تحقق من أن المستهلك يخضع لقانون الثاني لـ Gossen .

▪ التمرين الثاني:

نفرض أن لدى مستهلك إمكانية الاختيار بين سلعتين x و y وإذا كانت كل منحنيات السواء لهذا المستهلك متميزة بميل يساوي $-y / x$.

أ- أثبت أن الطلب على السلعة x مستقل تماما عن سعر السلعة y.

ب- حدد المعدل الحدي لإحلال x بـ y واحسب قيمة هذا المعدل إذا كان $Px=1$ ، $Py=3$ ، $R=120$.

ج-هل يوجد فرق بين الإنفاق الكلي على x إذا تغير Px مع ثبات الدخل ولماذا ؟

▪ التمرين الثالث:

إذا علمت أن مستهلك ما دالة منفعته هي:

$$U_t = x_2^{\frac{1}{3}} . x_1^{\frac{1}{3}}$$

أ- حدد معادلة منحنى الدخل – الاستهلاك عندما R تتغير و P_1 و P_2 تبقيان ثابتان.

▪ التمرين الرابع :

إذا كانت دالة منفعة المستهلك بالشكل التالي:

$$Ut = 2xy + 3y$$

أ- حدد منحنى الدخل والاستهلاك عندما $Px= 12$ و $Py= 21$.

ب- باستخدام المعادلة السابقة، حدد قيمة الدخل التي تؤدي بالمستهلك إلى عدم استهلاك السلعةx ووضح حالة السؤال في البيان.

ج- حدد منحنى أنجل لكل سلعة.

د- أحسب مرونات الدخل وبين طبيعة السلع.

و- أثبت أن معامل لاغرانج يمثل المنفعة الحدية للدخل.

▪ التمرين الخامس:

إذا اعتبرنا أن دالة المنفعة لمستهلك بالشكل التالي:

$$U_t= 2x^{1/2}y^{1/2}$$

أ- حدد دوال الطلب لكل من x و y .

ب- بين أن المستهلك لا يخضع للوهم النقدي .

▪ التمرين السادس :

إذا كانت لمستهلك ما منفعة:

$$Ut= \frac{1}{2}x\ y^2$$

أ- حدد دوال الطلب لكل من x وy .

ب- إذا كانت $P_x =1$ ، $P_y =3$ و $R= 16$ ، حدد نقطة توازن المستهلك .

ج- إذا ارتفع سعر السلعة x بـ 2 وحدات نقدية، ما هي قيمة الإعانة الواجب تقديمها للمستهلك حتى يحافظ على مستوى الإشباع الأول.

▪ التمرين السابع:

نفرض أن دالة منفعة المستهلك بالشكل التالي :

$$U_t = 2x^{1/2}y^{1/2}$$

وأسعار السلعتين x وy على التوالي هي: $P_x=2$ و $P_y = 1$ وكان دخل المستهلك $R=100$

أ- حدد نقطة توازن المستهلك.

ب- بين أن منحنى السواء محدب نحو نقطة الأصل بضواحي نقطة التوازن.

حلول التمارين

▪ حل التمرين الأول :

أ-تأخذ دالة لاغرانج الشكل التالي:

$$L(x,y,\lambda) = 12x + 30y - 0{,}5x^2 - 0{,}5y^2 + \lambda[50 - 2x - 3y]$$

وتكتب الشروط الأولى اللازمة لتعظيم الدالة (L):

$$L'(x) = 12 - x - 2\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$L'(y) = 30 - y - 3\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$L'(\lambda) = 50 - 2x - 3y = 0 \qquad (3)$$

تحصلنا على ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل وعند حلها ينتج لدينا:

$$x^* = 2{,}15 \qquad y^* = 15{,}23 \qquad \lambda^* = 4{,}9$$

ب-بما أن λ تقيس لنا المنفعة الحدية للدخل، وحسب النتائج المتحصل عليها في السؤال (أ)، فإن كل وحدة إضافية في دخل المستهلك تسمح له بالحصول على 4.9 وحدات إضافية من المنفعة.

جـ- يمكن أن نلاحظ أن :

$$(UM_x) / P_x = 4{,}9 = (UM_y) / P_y$$

حيث UMi تمثل المنفعة الحدية للسلعة i .

▪ حل التمرين الثاني :

أ-عند التوازن فإن TMS يساوي نسبة الأسعار :

$$TMS = -\, dy/dx = y/x = P_x / P_y$$

ومنه فإن : $xP_x = yP_y$

إذن: $R - 2xP_x = 0$

$X = R / (2P_x)$ (1)

تبيين العلاقة (1) أن الطلب على x مستقل تماما عن سعر السلعة y .

ب –عند التوازن:

$$TMS = P_x / P_y = 1/3$$

يتضح أن المستهلك مستعد للتخلي عن وحدة واحدة من y مقابل حصوله على 3 وحدات إضافية من x مع بقائه على نفس مستوى الإشباع.

ملاحظة: القيمة المعطاة R= 120 زائدة.

جـ– لا بسبب أن:

$x = R /2Px \Rightarrow xP_x = R/2 = C$ ثابت

أو يمكن عن طريق حساب المرونة المباشرة :

$$e_{xx} = \frac{dx}{dPx} \cdot \frac{Px}{x} = \frac{-2R}{4P_x^2} \cdot \frac{Px}{x} = -1 = |1|$$

▪ حل التمرين الثالث :

أ–منحنى الدخل والاستهلاك هو المحل الهندسي للتوليفات المثلى للسلعتين عند تغير الدخل وبقاء الأسعار ثوابت ونحصل على معادلة هذا المنحنى من الشروط الأولى اللازمة لتعظيم (L).

$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{1/3} x_2^{1/3} + \lambda[R - x_1P_1 - x_2P_2]$

$L'(x_1) = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{1/3} - \lambda P_1 = 0$ (1)

$L'(x_2) = \frac{1}{3}x_1^{1/3}x_2^{-2/3} - \lambda P_2 = 0$ (2)

$L'(\lambda) = R - x_1P_1 - x_2P_2 = 0$ (3)

عند معالجة المعادلات السابقة نجد :

$x_2 = (P_1/P_2)x_1$ (4)

توضح المعادلة رقم (4) العلاقة بين x_1 وx_2 عندما تتحقق الشروط المثلى، وتمثل معادلة منحنى الدخل والاستهلاك.

ب- منحنى السعر والاستهلاك هو المحل الهندسي للتوليفات المثلى للسلعتين عندما يتغير P_1 وP_2 و R ثوابت، زيادة على ذلك فهو ممثل في علاقة بين x_1 وx_2 بحيث المعلمة P_1 تختفي.

ومن العلاقة (4) ومع بقاء الشروط المثلى يمكن أن نحصل على :

$x_1P_1 = x_2P_2$

ولحذف P_1 يكفي أن نعوض عن x_1P_1 في المعادلة (3) فنجد:

$R = x_1P_1 + x_2P_2$

$R = 2x_2P_2 \Rightarrow x_2 = R/2P_2$

ملاحظة:

من العلاقة الأخيرة يتضح أن x_2 لا تعتبر دالة لـ x_1 ، مما يدل على أن منحنى سعر الاستهلاك ممثل في خط مستقيم أفقي (x_2 ثابتة).

▪ حل التمرين الرابع:

أ- يمكن استخراج معادلة منحنى الدخل والاستهلاك من الشروط الأولى اللازمة لتعظيم (L).

$$L(x,y,\lambda) = 2xy + 3y + \lambda[R - xP_x - yP_y]$$

$$L'(x) = 2y - \lambda P_x = 0 \qquad (1)$$

$$L'(y) = 2x - \lambda P_y = 0 \qquad (2)$$

$$L'(\lambda) = R - xP_x - yP_y = 0 \qquad (3)$$

عند معالجة المعادلات الثلاث نجد:

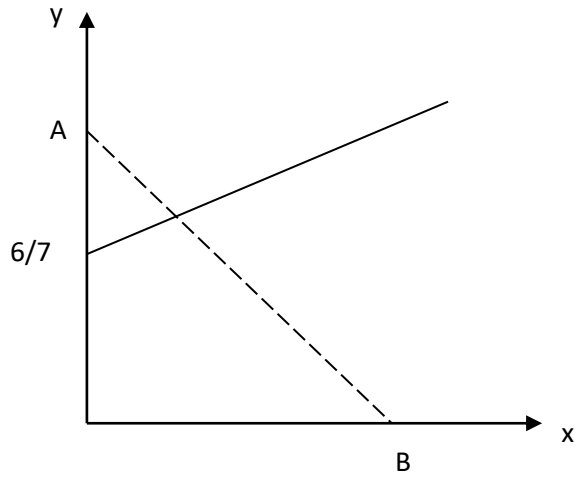
$$y = (Px/Py)x + (3/2)(P_x/P_y) \qquad (4)$$

وعند تعويض عن Px و Py تصبح المعادلة (4) بالشكل التالي:

$$y = (12/21)x + (36/42) \qquad (5)$$

وتعبر المعادلة (5) عن مسار توسع الدخل

ب- عندما $x=0$، تصبح المعادلة (5): حيث $y = 36/42$ $R = yP_y = 18$



ج–عند استخدام قيد الميزانية وتعويض عن y بقيمتها المتحصل عليها في السؤال (أ)، فإن منحنى أنجل لـ x يأخذ الشكل التالي :

$$x = (1/24)\ R - (3/4)$$

وبنفس الطريقة يمكن أن نعبر عن منحنى أنجل لـ y بـ:

$$y = (1/42)\ R - (9/21)$$

د– استخدام تعريف لمرونة الدخل يسمح لنا بإيجاد :

$$\eta_x = (dx/dr)/(R/x) = R/(R-18) > 1$$

$$\eta_y = (dy/dr)/(R/y) = R/(R+18) < 1$$

حسب النتائج المتحصل عليها يمكن أن نستنتج بالنسبة للمستهلك موضوع الدراسة فإن السلعة x هي سلعة كمالية لأن استهلاكها يرتفع نسبيا بالنسبة لدخله، بينما السلعة y هي سلعة ضرورية.

و– بوضع عبارة التفاضل الكلي الأولى لدالة المنفعة ودالة قيد الميزانية نجد :

$$dU = (\delta U/\delta x)\,dx + (\delta U/\delta y)\,dy$$

$$= \lambda P_x dx + \lambda P_y dy$$

$$dR = (\delta R/\delta x)\,dx + (\delta R/\delta y)\,dy$$

$$= P_x dx + P_y dy$$

وعند إجراء عملية حسابية لـ dU/dR نجد أن $dU/dR = \lambda$.

▪ حل التمرين الخامس:

أ–تستخرج دوال الطلب لـ x و لـ y من الشروط الأولى اللازمة لتعظيم المنفعة :

$$L(x,y,\lambda) = 2x^{1/2}y^{1/2} + \lambda[R - xP_x - yP_y]$$

ومن الشروط الأولى اللازمة لتعظيم المنفعة، والمتمثلة في المشتقات الجزئية لكل من x و y و λ وبمعالجة المعادلات المتحصل عليها نجد:

$$x= R/2P_x \quad \text{و} \quad y=R/2P_y$$

ب- إذا كانت الأسعار والدخل تتغير بنفس النسبة إذن الطلب على x و على y يبقى بدون تغيير، وفعلا فإن :

$$tR/2tP_y = R/2P_y tR/2tP_x = R/2P_x$$

- **حل التمرين السادس:**

أ-تأخذ دالة لاغرانج الشكل التالي :

$$L(x,y,\lambda) = (1/2)xy^2 + \lambda[R - xP_x - yP_y]$$

جعل المشتقات الجزئية تساوي صفر :

$$L'(x) =0;\ L'(y) =0;\ L'(\lambda) =0$$

نجد :

$$y= R/(3P_y) \quad \text{و} x = R/(3P_x)$$

ب- نحدد نقطة التوازن بالتعويض عن R ، Px، Py في دوال الطلب:

$$X0=2,66 \qquad y0 = 3,55 \qquad U0 = 16,8$$

ج- يمكن أن نحدد الدخل الضروري للمستهلك حتى يحافظ على نفس مستوى الإشباع في حالة ارتفاع سعر السلعة x ، بوضع دالة لاغرانج حيث يكون الدخل كدالة الهدف، أما مستوى الإشباع[$U°=16,8$]كدالة قيد.

$$L(x ,y, \lambda) = 4x + 3y + \lambda[16,8 - (1/2) xy^2]$$

حيث أن μ يشير إلى مضاعف لاغرانج ومن الشروط الأولى اللازمة لتقليل (L) نجد :

$X0 = 1,7$ $y0 = 4,47$

ومنه :

$R^* = 4(1,7) + 3(4,47) = 20.2$

$S = \Delta R = R^* - R = 20, 2 – 19 = 4,2$

إذن $S= 4,2$ قيمة الإعانة الضرورية التي تمنح للمستهلك حتى يبقى على نفس مستوى الإشباع.

- **حل التمرين السابع:**

أ- تأخذ دالة لاغرانج الشكل التالي :

$L(x,y,\lambda) = 2x^{1/2}y^{1/2} + \lambda[\ 100 – 2x - y]$

ومن الشروط الأولى اللازمة لتعظيم L نحصل على النتائج التالية :

$X0 = 25$, $y0 = 50$

ب-لإثبات أن منحنى السواء محدب نحو نقطة الأصل، يكفي أن نأخذ التفاضل الكلي الأولي لـ $TMS= (y/x)$ ونقسم الطرفين على dx ومن ثم نبين أن العبارة المتحصل عليها سالبة :

$d\ (TMS) = [\ \ TMS/\ \delta x]dx + [\delta TMS\ /\delta y]dy$

$d(TMS)\ /dx= [\delta TMS\ /\ \delta x] + [\delta TMS\ /\delta y]\ dy/dx$

ومنه:

$d(TMS)/dx = (-y/x^2)+ (1/x)(-y/x)$

$= (-2y)/x^2<0$

التمارين المقترحة

▪ التمرين الأول:

لتكن دالة المنفعة لمستهلك ما كما يلي: $U(x,y) = 2xy + 3y$

وليكن قيده الميزاني $R = xPx + yPy$.

أي x و y هي الكميات المستهلكة و Px و Py هما أسعار السلع x و y على التوالي.

المطلوب:

1- حدد إحداثيات النقاط التي تعظم منفعة هذا المستهلك

2- حدد قيمة معامل لاغرانج ثم أثبت أن $dU = \lambda dR$

3- أحسب الكميات المستهلكة ومعامل لاغرانج إذا علمت أن R=150، Px=12، Py =21.

▪ التمرين الثاني:

لتكن لديك مستويات المنفعة التي يحصل عليها مستهلك ما، من خلال استهلاكه لثلاث سلع X، Y، Z معطاة ضمن الجدول التالي:

Qx,y,z	0	1	2	3	4	5	6	7
UTx	0	75	144	204	249	285	305	312
UTy	0	62	116	164	204	238	258	268
UTz	0	60	108	145	168	178	180	180

فإذا علمت أن دخل المستهلك يبلغ 17 وحدة نقدية، وأسعار السلع هي:

$Px = 1, Py = 2 , Pz = 3$

المطلوب:

1- كيف ينفق هذا المستهلك دخله حتى يحقق أقصى إشباع ؟

2- استخرج دوال الطلب على السلع X، Y، Z .

3- ما هو سعر السلعة Y الذي يوقف عنده المستهلك من استهلاكه للسلعة X ؟

4- ما هو سعر السلعة Z الذي يوقف عنده المستهلك من استهلاكه السلعة X؟

- **التمرين الثالث:**

لتكن دالة المنفعة لأحد المستهلكين هي UT = 10/3 XY

المطلوب:

1- عرف السلوك الرشيد لهذا المستهلك.

2- إذا كانت أسعار السلعتين X و Y هي : Px=4 و Py=5 فما هو مستوى الدخل الذي يسمح للمستهلك بالحصول على منفعة كلية UT = 150.

3- إذا كانت Py, Px, R غير معلومة فالمطلوب:

أ- إيجاد معادلة الطلب على السعتين X و y .

ب- أوجد قيم x و y عندما R= 80 , Py =5, Px =4

- **التمرين الرابع :**

لتكن لدينا دالة منفعة مستهلك ما على الشكل التالي : $U_T = X^{1/3}Y^{2/3}$

المطلوب :

1- باعتبار أن المستهلك عقلاني ويمتلك دخلا قدره R=1200 ، وان p_x=1، py=2

اوجد التركيبة المثلى من السلعتين التي يختارها هذه المستهلك ؟ .

2 -إذا تضاعف دخل المستهلك مع بقاء العوامل الأخرى على حالها، اوجد التركيبة الاستهلاكية المثلى؟

وضح في العلاقة بين الكميات المستهلكة والدخل والأسعار؟ هل هناك علاقة بين السلعتين؟

3 – إن نظام الأسعار أصبح كالتالي: P_x=2 = Py بينما بقي الدخل دون تغيير، اوجد التركيبة المثلى للاستهلاك؟ افصل كل من اثر الدخل واثر الإحلال؟ ما نوع السلعة؟

▪ التمرين الخامس :

المطلوب:

بالرجوع إلى معطيات التمرين الثاني و افتراضنا أن الدخل Rانخفض إلى 12و.ن، ثم ارتفع إلى 20 و.ن، ارسم نقاط التوازن الجديدة، وحدد منحنى استهلاك الدخل ثم اشتق منحنى انجل للسلعتين، مع العلم إن الأسعار لا تتغير ، هل يمكنك التمييز بين منحنى استهلاك الدخل و منحنى انجل .

▪ التمرين السادس:

باستعمال معطيات التمرين الثاني دائما، إذا انخفض سعر السلعة X إلى 1 و.ن مع بقاء الدخل وسعر السلعة y بدون تغيير، حدد منحنى استهلاك السعر واشتق منحنى الطلب على السلعة X .