Spécialité :	**Module :**
TS Base de données	Recherche Opérationnelle
	Semestre : 02

Thème 01:

Notions liées à la théorie des graphes

Objectifs :

A la fin du cours, le stagiaire doit être capable de :

- Définir le terme graphe
- Représenter graphiquement un graphe
- Déterminer les prédécesseurs et les successeurs d'un sommet
- Calculer le degré d'un sommet
- Déterminer si un graphe est simple, régulier, complet, symétrique et/ou biparti

Pré-requis :

- aucun

Temps prévu :

04 Heures

Moyens et aides pédagogiques :

- Tableau

Plan du Cours :

Introduction

1. **Définitions de base**
2. **Représentation d'un graphe**
3. **Graphe orienté et graphe non orienté**
4. **Notion d'adjacence**
5. **Degré d'un sommet**
6. **Graphe particuliers**

Documentation :

1. **Théorie des graphes. Pages bleues**
2. **Support de cours Mme L. Chatouane**

Remarque :

Notions liées à la théorie des graphes

Introduction:

La recherche opérationnelle offre des techniques de modélisation et de la résolution des problèmes. L'application de tel méthodes permet de chercher une solution optimale du problème qui peut servir d'aide à la décision.

Exemples de problèmes de la recherche opérationnelle :

Chemin le plus court :

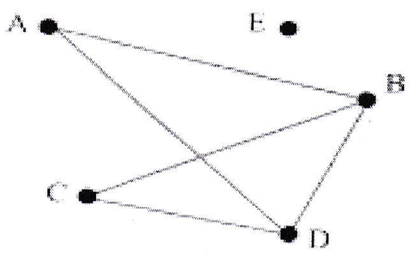
Soit un ensemble de villes et des chemins directs reliant ces villes entre elles. Le problème dit "du plus court chemin" consiste à trouver pour une ville de départ donnée et une ville d'arrivée donnée le chemin le plus court qui relie ces deux villes.

Ordonnancement / planification

Considérons la gestion d'un grand projet. Il est constitué de différentes étapes à réaliser. Il est logique de penser que certaines tâches doivent être effectuées avant d'autres alors que certaines peuvent très bien être effectuées en même temps. Ainsi, on établit une certaine relation d'ordre entre les étapes. Un premier problème consiste à trouver une planification des tâches qui aboutisse à la réalisation du projet en un minimum de temps.

1. Définitions de base

1.1 Graphe : Un graphe est un ensemble de points (nœuds ou sommets) et des lignes (arêtes ou arcs) reliant certains de ces points.



Graphe 1

1.2 Un sommet du graphe : est un point du graphe. Le nombre de sommets est appelé **ordre** du graphe.

1.3 Une arête du graphe : est une ligne reliant deux sommets.

Arête

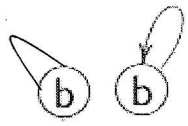
1.4 Arc : est une arête orientée, le sommet de départ représente l'extrémité initiale, et le sommet d'arrivée représente l'extrémité terminale.

x :Extrémité initiale

y : Extrémité terminale

Arc

1.5 Une 1.5 boucle : est un arc (ou arête) reliant un sommet à lui-même.



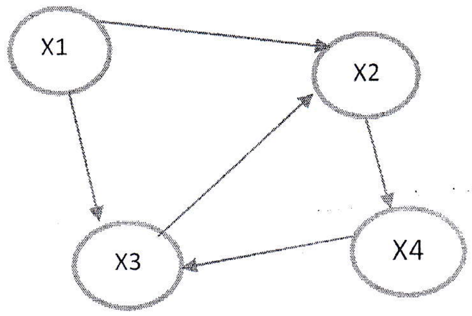
2. Structure d'un graphe:

Mathématiquement, un graphe est représenté par un couple de deux ensembles G = (X,U) où

X est l'ensemble fini des sommets et U l'ensemble des arcs (ou arêtes):

X ={x1,x1,.......xn}, U = ensemble fini de couple (x, y) où x, y ϵ X

Exemple:



Soit le graphe G suivant :

X= {x1,x2,x3,x4}

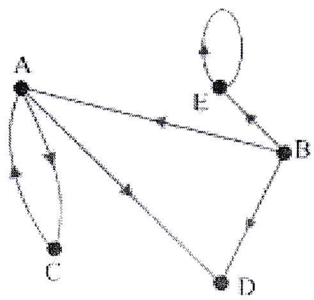
U={(x1,x2),(x1,x3),(x3,x2),(x2,x4) ;(x4,x3)}

L'ordre de graphe G est égal au nombre de sommets:4

3. Graphe orienté et graphe non orienté :

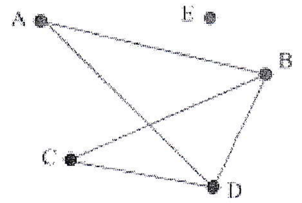
3.1 Un graphe orienté : est un graphe dont les arêtes sont orientées ; c.à.d les couples (x, y) sont ordonnés (l'ordre de x, y dans le couple est important), les éléments de U sont appelés **arcs du graphe**.

Exemple: le graphe G suivant est un graphe orienté



3.2 Un graphe non orienté : Si les couples (x, y) ne sont pas ordonnés (l'ordre de x, y dans le couple n'est pas important), on parle alors **d'un graphe non orienté**, et les éléments de U sont appelés **arêtes du graphe**.

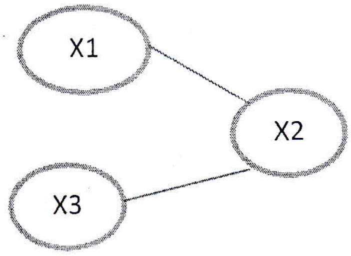
Exemple : le graphe suivant est un graphe non orienté



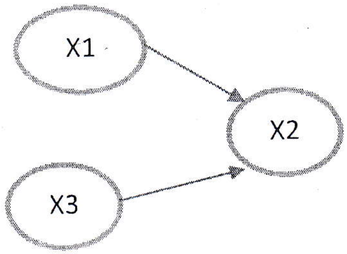
4. La notion d'adjacence:

4.1 Arêtes (ou arcs) adjacentes : Deux arêtes (aussi arcs) sont adjacentes s'ils ont une extrémité commune.

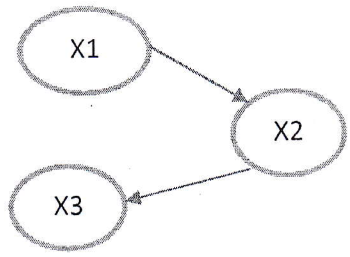
Exemples:



(x1, x2) et (x2, x3) arêtes adjacentes



(x1, x2) et (x3, x2) arcs adjacents



(x1, x2) et (x2, x3) arcs adjacents

4.2 Sommets adjacents :

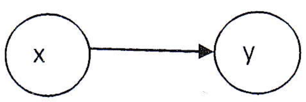
- Dans un graphe non orienté, deux sommets sont adjacents s'il existe une arête les joignant.

Exemple :

X et adjacent à y et y est adjacent à x

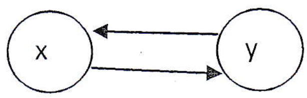
- Dans un graphe orienté, s'il existe un arc du sommet x vers le sommet y, on dit y est adjacent à x.

Exemples :



y est adjacent à x, x n'est pas adjacent à y

x est adjacent à y, y n'est pas adjacent à x



x est adjacent à y et y est adjacent à x

4.3 Un sommet isolé : est un sommet n'est relié à aucun autre.

4.4 Successeur d'un sommet: on dit que y est un successeur de x s'il existe un arc ayant comme extrémité initial x et y comme extrémité final.

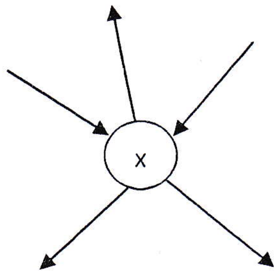
4.5 Prédécesseur d'un sommet : on dit que y est un prédécesseur de x s'il existe un arc ayant **y** comme extrémité initiale et **x** comme extrémité terminale.

5. <u>Degré d'un sommet:</u>

- **Le demi-degré extérieur** : d'un sommet x est le nombre d'arcs qui partent ou bien sortent de x, noté : $\mathbf{d_G^+(x)}$
- **Le demi-degré intérieur :** d'un sommet est le nombre d'arcs qui arrivent ou bien entrant vers x, noté : $\mathbf{d_G^-(x)}$
- **Le degré** d'un sommet x: est la somme d'arcs sortant et entrant au sommet x, on note : $\mathbf{d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)}$

<u>Exemple :</u>

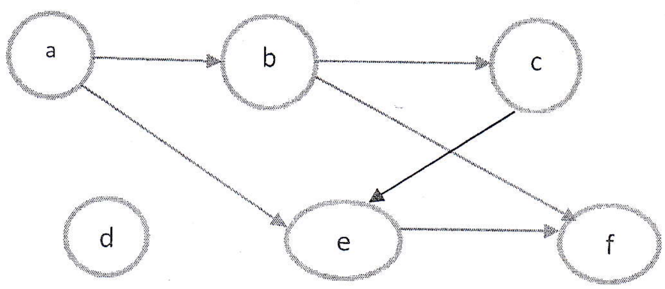
Dans le graphe suivant, $d_G^+(x) = 3$, $d_G^-(x) = 2$, $d_G(x) = 5$.



<u>Propriétés :</u>

1. Dans un graphe orienté G=(X, U), la somme des demi-degrés intérieurs des sommets de G est égale à la somme des demi-degrés extérieurs des sommets de G.
2. Dans tout graphe, la somme des degrés est un nombre pair.
3. La somme des degrés d'un graphe non orienté est égale à 2 fois le nombre d'arêtes.
4. Le sommet dont le degré est égal à 0 ($\mathbf{d_G(x)=0}$) est un sommet **isolé.**
5. Le sommet dont le degré est égale à 1($\mathbf{d_G(x)=1}$) est un sommet **pendant**

<u>Exercice</u> : Soit le graphe G suivant :



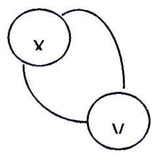
G

Complétez les phrases suivantes :

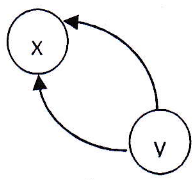
- X=......................................
- U=..
- Ordre de graphe G=
- D est un sommet ....
- a et b sont ....
- b et e sont des .... **de f**
- b et e sont des.......................... **de a**
- le demi-degré .... **de e = 1**
- le demi degré intérieur de e = ...
- le degré de e = ...

6. <u>Graphes particuliers:</u>

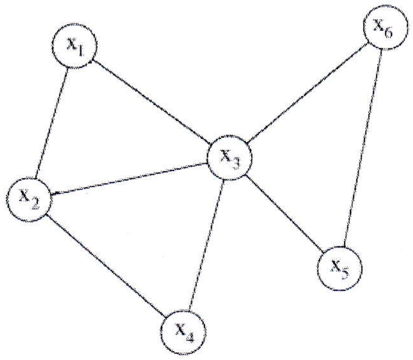
6.1 Un graphe simple : est un graphe sans boucles et sans arêtes (arcs) multiples.si les arêtes (arcs) multiples sont autorisés, il est appelé graphe **multiple.**



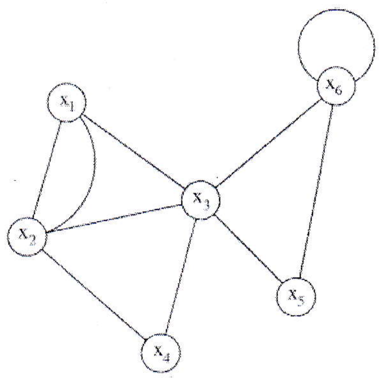
Arêtes multiples



Arcs multiples

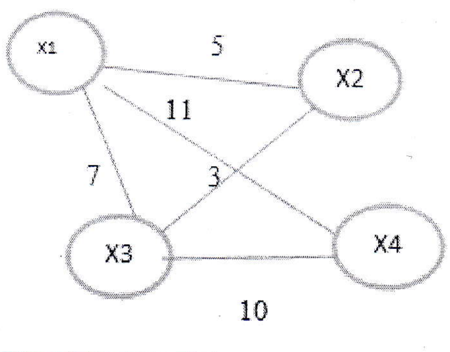


Graphe non simple



Graphe non simple

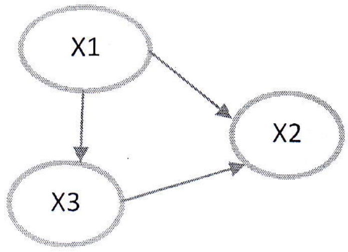
6.2 Graphe valué : est un graphe pour lequel nous associons une valeur à chaque arête (ou arc).



6.3 Graphe régulier : Un graphe est dit régulier si les degrés de tous ses sommets sont égaux.

Exemple :

Soit le graphe G suivant :

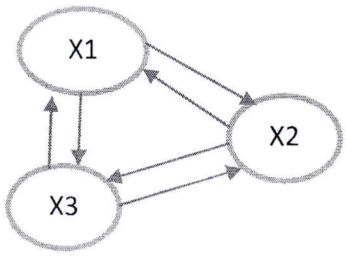


$d_G(x1)=0+2=2$, $d_G(x2)=2+0=2$, $d_G(x1)=1+1=2$

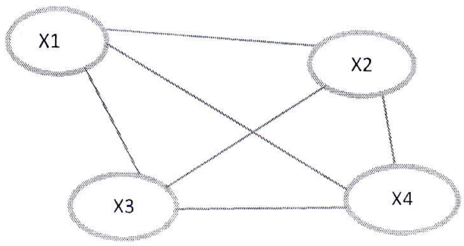
alors G est un graphe régulier.

6.4 Graphe complet : Un graphe est dit complet si pour tout couple (x, y) il existe une arête qui relie x et y. Si le graphe est orienté, on dit qu'il est complet si chaque paire de sommets est reliée par exactement deux arcs (un dans chaque sens).

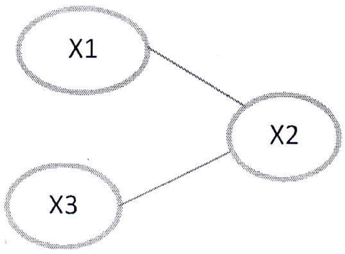
Exemples :



Graphe complet



Graphe complet

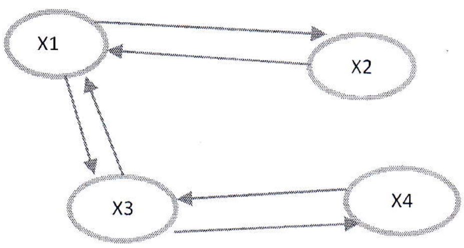


Graphe incomplet

6.5 Graphe symétrique :

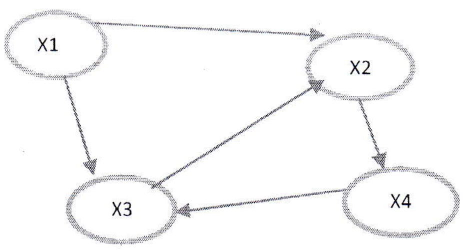
Un graphe G est **symétrique** si pour tout arc (x,y) de G, il existe un arc "**inverse**" (y,x) : $\forall$ (x, y) $\in$ U il existe un arc (y, x) $\in$ U.

Exemple :



Graphe symétrique

Il est dit **anti-symétrique** s'il existe un arc (x, y) $\in$ U et n'existe pas un arc (y, x) $\in$ U :

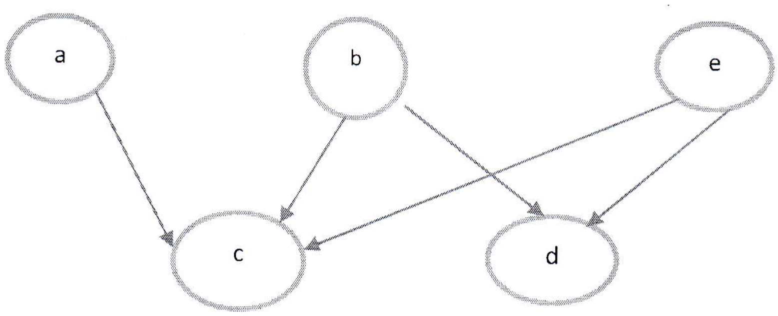


6.6 Graphe biparti :

Un graphe est dit biparti si l'ensemble de sommets peut être partitionné en deux sous ensembles X1 et X2 de sorte que les sommets d'une même classe ne soient jamais adjacents :

$\forall (x, y) \in U : x \in X1$ et $y \in X2$ ou bien $x \in X2$ et $y \in X1$

Exemple :



X1={ a, b , e} X2= { c , d }

Série d'exercices 01

Exercice 01 :

Le tableau ci dessous donne les vols disponibles entre les villes suivantes à une date donnée : (le signe / signifie qu'il y a un vol entre les 2 villes dans le sens du flèche).

	Alger	Bejaia	Annaba	Oran	Constantine	Tamanrasset
Alger		/				
Bejaia	/		/			
Annaba	/				/	
Oran					/	
Constantine				/		/
Tamanrasset	/	/		/		

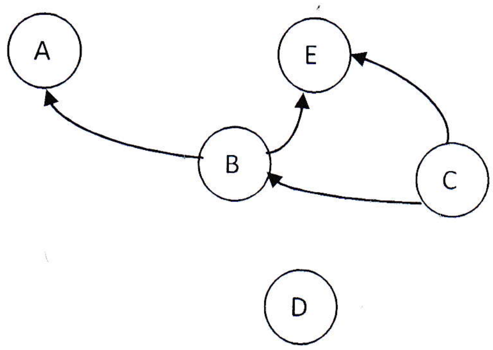
1. Représenter les différentes liaisons par un graphe.

Exercice 02 :

On définit une relation R sur l'ensemble des 9 premiers nombres entiers naturels non nuls comme suit : **x R y ⇔ x est diviseur de y**

1. Représenter cette relation par un graphe orienté

Exercice 03 : soit le graphe G=(X, U) suivant :



(G)

1. Complétez les tableaux suivants:

Tableau 01 :

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
Prédécesseurs					
Successeurs					

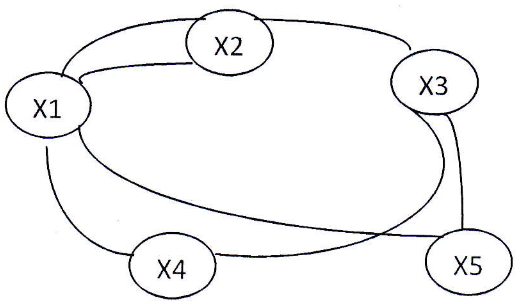
Tableau 02 :

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**Total**
$d^{+}_{G}(x)$						
$d^{-}_{G}(x)$						
$d_{G}(x)$						

2. Complétez
   - **A** est un sommet ………………..et **D** est un sommet…………
   - $\sum d^{+}_{G}(x)$ ……. $\sum d^{-}_{G}(x)$
   - $\sum d_{G}(x)$=……… est un nombre………..

Exercice 04 :

Déterminer si le graphe suivant est simple, complet, et ou biparti



Le graphe ………………simple

………………………………………………………………

Le graphe……………………..complet

………………………………………………………………

………………………………………………

Le graphe ………………………..biparti

………………………………………………………………

………………………………………………