الفصل الرابع

التطبيقات الخطية

فهرس الفصل

1.4 التطبيقات الخطية 135
1.1.4 تعاريف 136
2.1.4 خواص 136
3.1.4 رتبة تطبيق خطي 137
4.1.4 صورة ونواة تطبيق خطي 138
2.4 الشكل المصفوفي لتطبيق خطي 140
3.4 تغيير الأسس 144
1.3.4 مصفوفة العبور من أساس إلى آخر 146
2.3.4 صيغة تغيير الأساس 149
4.4 سلسلة التمارين رقم 4 150

1.4 التطبيقات الخطية

1.1.4 تعاريف

لقد واجهنا سابقا مفهوم التطبيق الخطي في التطبيق $f:\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}^n$ سوف نعمم هذه الفكرة على جميع الفضاءات الشعاعية.

تعريف 1.1.4 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل $\mathbb{K}$. نقول أن التطبيق f من E نحو F هو تطبيق خطي إذا كان يحقق الشرطين التاليين:

1) من أجل كل $u,v\in E$ لدينا $f(u+v)=f(u)+f(v)$

2) من أجل كل $u\in E$ و $\lambda\in\mathbb{K}$ لدينا $f(\lambda\cdot u)=\lambda\cdot f(u)$.

مثال 1 : التطبيق f المعرف

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-2x,y+3z) \end{array}$$

هو تطبيق خطي. في الواقع ، لدينا $u=(x,y,z)$ و $v=(x',y',z')$ عنصرين من $\mathbb{R}^3$ و λ عدد حقيقي حيث.

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+x',y+y',z+z') \\ &= \big(-2(x+x'),y+y'+3(z+z')\big) \\ &= (-2x,y+3z)+(-2x',y'+3z') \\ &= f(u)+f(v) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} f(\lambda\cdot u) &= f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \\ &= (-2\lambda x,\lambda y+3\lambda z) \\ &= \lambda\cdot(-2x,y+3z) \\ &= \lambda\cdot f(u) \end{aligned}$$

2.1.4 خواص

قضية 1 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ إذا كان f تطبيق خطي من E نحو F فإن:

- $f(0_E) = 0_F$،
- $f(-u) = -f(u)$ من أجل كل $u \in E$.

لدينا الخواص التالية أيضا:

قضية 2 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق من E نحو F فإن: التطبيق f خطي إذا وفقط إذا كان من أجل كل u و v من E ومن أجل كل سلمي λ و μ من $\mathbb{K}$،

$$\boxed{f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).}$$

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$

تعريف 2.1.4 :
- نقول أن التطبيق الخطي المعرف من E نحو F أنه أيضا إزومورفيزم أو أومومورفيزم للفضاء الشعاعي.
  مجموعة التطبيقات الخطية من E في F يرمز لها بالرمز $\mathcal{L}(E, F)$.
- نسمي التطبيق الخطي المعرف من E نحو E بأندو مورفيزم (تشاكل ذاتي) مجموعة التطبيقات الخطية من E في F يرمز لها بالرمز $\mathcal{L}(E)$.

3.1.4 رتبة تطبيق خطي

لتكن E و F فضائين شعاعيين منتهيا البعد n على حقل تبديلي $\mathbb{K}$ و f أميومورفيزم من E نحو F، فإن رتبة التطبيق الخطي f هي بعد الصورة $Im(f)$. فإذا كان $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساس للفضاء الشعاعي E، فإن $\beta = \{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)\}$ تولد صورة هذا التطبيق، وتكون رتبة التطبيق هي $m \leq n$ أكبر عدد للأشعة المستقلة خطيا من المجموعة β و نكتب:

$$rang(f) = \dim(Im(f)) = m$$

وإذا كانت رتبة التطبيق مساوية لـ n، فإن بعد نواته صفر، ومن ثم فإن التطبيق الخطي تقابلي.

4.1.4 صورة ونواة تطبيق خطي

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق من E نحو F. لتكن A مجموعة جزئية من E.
جميع الصور بواسطة f لعناصر المجموعة A هي صورة مباشرة للمجموعة A نرمز لها بالرمز $f(A)$. وهي مجموعة جزئية من F. المعرفة:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

إذا كان $f : E \to F$ تطبيق خطي فإن $f(E)$ تسمى صورة التطبيق الخطي ونرمز لها بالرمز: $Im(f)$.

قضية 3 :
1) إذا كانت E' فضاء شعاعي جزئي من E فإن $f(E')$ هي فضاء شعاعي جزئي من F.
2) بصفة خاصة $Im(f)$ هي فضاء شعاعي جزئي من F.

ملاحظة 1 : لدينا من خلال تعريف الصورة المباشرة $f(E)$: يكون f غامر إذا وفقط إذا $Im(f) = F$.

تعريف 3.1.4 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق خطي من E نحو F.
نرمز لنواة التطبيق f بالرمز $Ker(f)$ مجموعة العناصر من E التي صورها من 0_F :

$$\boxed{Ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}}$$

بمعنى آخر ، النواة هي الصورة العكسية للشعاع الصفري لفضاء الوصول:

$$Ker(f) = f^{-1}\{0_F\}.$$

قضية 4 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق خطي من E نحو F. نواة التطبيق f هي فضاء شعاعي جزئي من E.

مثال 2 : ليكن f التطبيق الخطي المعرف

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-2x, y+3z) \end{array}$$

- حساب النواة $Ker(f)$: ليكن

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in Ker(f) &\iff f(x,y,z) = (0,0) \\
&\iff (-2x, y+3z) = (0,0) \\
&\iff \begin{cases} -2x &= 0 \\ y+3z &= 0 \end{cases} \\
&\iff (x,y,z) = (0,-3z,z), \qquad z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ومنه $Ker(f) = \{(0,-3z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. بصيغة أخرى $Ker(f) = Vect\{(0,-3,1)\}$: هي تشكل مستقيم شعاع توجيهه هو $(0,-3,1)$.

- حساب صورة f. نأخذ $(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
(x',y') = f(x,y,z) &\iff (-2x, y+3z) = (x',y') \\
&\iff \begin{cases} -2x &= x' \\ y+3z &= y' \end{cases}
\end{aligned}$$

نستطيع أخذ المثال $x = -\frac{x'}{2}$، $y' = y$، $z = 0$. الخلاصة: من أجل أي $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ لدينا $f(-\frac{x'}{2}, y', 0) = (x',y')$. ومنه $Im(f) = \mathbb{R}^2$ و هذا مايثبت أن التطبيق f غامر.

مثال 3 : لتكن $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. وليكن التطبيق الخطي $f: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ المعرف كما يلي $f(X) = AX$. ومنه $Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^p \mid AX = 0\}$: وبالتالي فإن $X \in \mathbb{R}^p$ هي مجموعة الحلول للجملة الخطية المتجانسة $AX = 0$.
سوف نرى في المحور القادم أن $Im(f)$ هي الفضاء الشعاعي المولد من أعمدة المصفوفة A.

قضية 5 : ليكن E و F فضاءان شعاعيان f تطبيق خطي من E نحو F. يكون التطبيق f :

- غامرا إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Im}(f) = F$،

- متباينا إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$.

نتيجة 1.1.4 : ليكن E و F فضاءان شعاعيان ذو بعد منته و f تطبيق خطي من E نحو F.

- إذا كان f غامر فإن $\dim(E)\geqslant\dim(F)$.
- إذا كان f متباين فإن $\dim(E)\leqslant\dim(F)$.
- إذا كان f تقابلي فإن $\dim(E)=\dim(F)$.

وبالتالي فإن البعد هو شرط قوي على طبيعة التطبيقات الخطية. يمكننا أيضا رؤية هذا الشرط على النحو التالي.

نظرية 1.1.4 : ﴿نظرية النواة والصورة﴾
ليكن E و F فضاءان شعاعيان ذو بعد منته و f تطبيق خطي من E نحو F.

$$\dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\mathrm{Ker}(f))=\dim(E)\ .$$

2.4 الشكل المصفوفي لتطبيق خطي

ليكن E و F فضائين شعاعيين ذوات البعد المنته، على الحقل $\mathbb{K}$ و ليكن p بعد الفضاء من E و $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\ldots,e_p)$ أساس لـ E. ليكن n بعد الفضاء F و $\mathcal{B}'=(f_1,\ldots,f_n)$ أساس لـ F. و ليكن $f:E\to F$ تطبيق خطي.

تسمح لنا خصائص التطبيقات الخطية بين فضائين ذات أبعاد منتهية أن نذكر ما يلي:

- يتم تحديد التطبيق الخطية f بشكل فريد من خلال صورة الأساس E ، ومن ثم بواسطة الأشعة $f(e_1),f(e_2),\ldots,f(e_p)$.
- من أجل كل $j\in\{1,\ldots,p\}$، $f(e_j)$ هو شعاع من F مكتوب بشكل فريد كمزج خطي في أشعة الأساس $\mathcal{B}'=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ من F.

و منه يوجد عدد n من السلميات الوحيدة $a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j}$ (وقد يرمز لها ايضا $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$) حيث:

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \cdots + a_{nj}f_n = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

وبالتالي، فإن التطبيق الخطي f يتم تحديده بالكامل بواسطة المعاملات $(a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,p\}}$.
لذلك من الطبيعي إعطاء التعريف التالي:

تعريف 1.2.4 : مصفوفة التطبيق الخطية f بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ هي المصفوفة $(a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ حيث يتكون العمود j من إحداثيات الشعاع $f(e_j)$ في الأساس $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$:

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} f(e_1) & \ldots & f(e_j) & \ldots & f(e_p) \end{array} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & & a_{2j} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}
\end{array}$$

بعبارات أبسط: مصفوفة تطبيق خطي هي المصفوفة التي أعمدتها هي صورة f لأشعة أساس فضاء البدء $\mathcal{B}$ ، معبرا عنها في أشعة أساس فضاء الوصول $\mathcal{B}'$. نرمز لهته المصفوفة بالرمز $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

ملاحظة 1 :
- مرتبة المصفوفة $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ يتعلق فقط ببعد الفضاء E وبعد الفضاء F.
- من ناحية أخرى ، تعتمد معاملات المصفوفة على اختيار الأساس $\mathcal{B}$ من E وإلى الأساس $\mathcal{B}'$ من F.

مثال 1 : ليكن f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ معرف كما يلي:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 - x_2 - 2x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{array}$$

من المستحسن تحديد أشعة الأسطر وأشعة الأعمدة، وبالتالي يمكن اعتبار f بمثابة التطبيق

$$f:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1-x_2-2x_3\\x_1+2x_2+3x_3\end{pmatrix}$$

ليكن $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ و $\mathcal{B}'=(f_1,f_2)$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$. أي :

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad \text{و}\quad f_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad f_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

1) إيجاد مصفوفة التطبيق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$

A) لدينا $f(e_1)=f(1,0,0)=(1,1)=f_1+f_2$، وهو أول عمود في المصفوفة $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

B) و $f(e_2)=f(0,1,0)=(-1,2)=-f_1+2f_2$، ثاني عمود في المصفوفة $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

C) و أخيرا $f(e_3)=f(0,0,1)=(-2,3)=-2f_1+3f_2$. ثالث وآخر عمود في المصفوفة $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$،

و بالتالي:

$$\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\1&2&3\end{pmatrix}$$

2) سنقوم الآن بتغيير أساس فضاء البدأ و أساس فضاء الوصول بأساس جديد لكل من الفضائين، حسب مايلي:

$$\epsilon_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad \epsilon_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad \epsilon_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\qquad \phi_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad \phi_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

نقوم الآن بحساب مصفوفة التطبيق الخطي الجديدة أي في الأساس $\mathcal{B}_0=(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ من $\mathbb{R}^3$ و $\mathcal{B}'_0=(\phi_1,\phi_2)$ من $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}f(\epsilon_1)&=f(1,1,0)=(0,3)=-3\phi_2,\\ f(\epsilon_2)&=f(1,0,1)=(-1,4)=-\phi_1-5\phi_2,\\ f(\epsilon_3)&=f(0,1,1)=(-3,5)=-3\phi_1+2\phi_2,\end{aligned}$$

و منه

$$Mat_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}'_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

هذا المثال يوضح حقيقة أن مصفوفة التطبيق الخطي تعتمد فعلا على اختيار الأساسات.

مثال 2 : ليكن التطبيق من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^3$:

$$f \ : (x,y) \longmapsto (x+y,\ 2x+3y,\ x-y)\ .$$

الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$ هو $((1,0),(0,1))$. صورة هذه الأشعة هي

$$f((1,0)) = (1,2,1)$$

و

$$f((0,1)) = (1,3,-1).$$

ومنه مصفوفة التطبيق f هي

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

لنأخذ أساس آخر للفضاء $\mathbb{R}^2$ الأشعة $((1,1),(1,-1))$ من فضاء البدء و أساس لـ $\mathbb{R}^3$ الأشعة $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ عند فضاء الوصول. صورة أشعة أساس فضاء لبدء هي

$$\begin{aligned} f((1,1)) &= (2,5,0) = -3(1,0,0) + 5(1,1,0) + 0(1,1,1) \\ f((1,-1)) &= (0,-1,2) = 1(1,0,0) - 3(1,1,0) + 2(1,1,1) \end{aligned}$$

ومنه المصفوفة

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

عندما يكون فضاء الوصول وفضاء البدء هي نفسها (التطبيق عبارة عن أندومورفيزم)، نختار نفس الأساس عند البدء و الوصول. تحتوي مصفوفة التشاكل الذاتي حينها على نفس عدد الأسطر و الأعمدة؛ وتكون المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي مربعة.

3.4 تغيير الأسس

ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته وليكن $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ أساس لـ E. من أجل كل $x \in E$ يوجد p - مضاعفة $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ وحيدة من $\mathbb{K}$ حيث:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_p e_p.$$

مصفوفة إحداثيات x هو شعاع عمود ، يرمز له بالرمز:

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

في المجموعة $\mathbb{R}^p$ إذا كان $\mathcal{B}$ هو الأساس القانوني فنكتب الشعاع على هذا الشكل البسيط

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

دون اظهار الأساس.

ليكن E و F فضائين شعاعيين منتهيا البعد، على الحقل $\mathbb{K}$ و ليكن $f : E \to F$ تطبيق خطي. و لتكن $\mathcal{B}$ أساس لـ E و $\mathcal{B}'$ أساس لـ F.

قضية 1 :
- لتكن $A = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
- من أجل كل $x \in E$ نضع $X = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
- من أجل كل $y \in F$ نضع $Y = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

ومنه إذا كان لدينا $y = f(x)$ فإنه يمكن كتابة

$$\boxed{Y = AX}$$

بصفة أخرى :

$$\boxed{\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(x)\big) = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}(x)}$$

مثال 1 : ليكن E فضاء شعاعي ذو البعد المنته 3، على الحقل $\mathbb{R}$ و $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ أساس لـ E.
وليكن التماثل الذاتي (الأندومورفيزم) f من E حيث مصفوفته في الأساس $\mathcal{B}$ هي:

$$A = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

نقترح أولا تحديد نواة وصورة f. نعلم أن كل العناصر x من E هي مزج خطي (e_1, e_2, e_3)

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

لدينا .

$$\begin{aligned} x \in \boldsymbol{Ker}(f) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) = 0_E \iff \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}\big(f(x)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

بعد حل الجملة نجد:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Ker}(f) &= \big\{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \text{ و } x_2 + x_3 = 0\big\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \boldsymbol{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) \end{aligned}$$

لذلك فإن النواة لها البعد 1. و باستعمال نظرية النواة والصورة نجد بعد $\boldsymbol{Im}(f)$ هو 2. نأخذ أول شعاعين في المصفوفة A مستقلين خطيا لتوليد الفضاء $\boldsymbol{Im}(f)$:

$$\boldsymbol{Im}(f) = \boldsymbol{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right)$$

.

1.3.4 مصفوفة العبور من أساس إلى آخر

لنفرض أن E فضاء شعاعي ذو بعد منته n. حسب ما سبق نعلم أن جميع أساسات الفضاء E تحتوي على n عنصر.

تعريف 1.3.4 : لتكن $\mathcal{B}$ أساس لـ E. ولتكن $\mathcal{B}'$ أساس آخر لـ E.
نسمي مصفوفة عبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$ ونكتب: $\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ المصفوفة المربعة ذات الرتبة $n\times n$ حيث j العمود مشكلا من الشعاع j للأساس $\mathcal{B}'$، بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

و قد نرمز أحيانا للمصفوفة $\mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ بالرمز $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

مثال 2 : ليكن الفضاء الشعاعي الحقيقي $\mathbb{R}^2$. وليكن

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad e_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\qquad \epsilon_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\quad \epsilon_2=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}.$$

نعتبر الأساس $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ و الأساس $\mathcal{B}'=(\epsilon_1,\epsilon_2)$.

إيجاد مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$.
يجب أن نعبر عن ϵ_1 ث ϵ_2 بدلالة (e_1,e_2). نجد:

$$\epsilon_1=-e_1+2e_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\qquad \epsilon_2=e_1+4e_2=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

مصفوفة العبور هي إذا :

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&4\end{pmatrix}$$

يمكن أن نعتبر مصفوفة العبور على أنها المصفوفة المرافقة للتطبق الخطي المحايد I_E المعرف على E.

قضية 2 : مصفوفة العبور $Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق المحايد $I_E : (E,\mathcal{B}') \to (E,\mathcal{B})$ حيث E هي فضاء المبدأ المزود بالأساس $\mathcal{B}'$، و E فضاء الوصول المزود بالأساس $\mathcal{B}$:

$$\boxed{Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(I_E)}$$

لكن لو عكسنا وضعية الأساسات سوف نجد مايلي:

قضية 3 : 1) مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$ عكوسة ومقلوبها هو مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}'$ إلى الأساس $\mathcal{B}$:

$$\boxed{Pass_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left(Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}}$$

2) إذ كان $\mathcal{B}$، $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{B}''$ ثلاث أساسات فإن

$$\boxed{Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times Pass_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}}$$

مثال 3 : ليكن $E = \mathbb{R}^3$ مزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}$. ولنعرف

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\right) \quad \text{و} \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

إيجاد مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}_1$ إلى الأساس $\mathcal{B}_2$.

لدينا:

$$Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

القضية السابقة تكافئ:

$$Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times Pass_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$$

. ومنه نجد

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \boldsymbol{Pass}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}$$

. بعد حساب المقلوب $\boldsymbol{Pass}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ نجد :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

سنقوم الآن بدراسة تأثير تغيير الأسس على مُركبات الأشعة.

- ليكن $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ و $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ أساسين لنفس الفضاء الشعاعي E.
- ليكن $\mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$.
- من أجل $x \in E$ فإنه يمكن كتابته كجملة خطية من الشكل $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ في الأساس $\mathcal{B}$ ونكتب :

$$X = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

.

- نفس العنصر $x \in E$ يمكن كتابته أيضا كجملة خطية من الشكل $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$ في الأساس $\mathcal{B}'$ و نكتب :

$$X' = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

.

قضية 4 :

$$\boxed{X = \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot X'}$$

2.3.4 صيغة تغيير الأساس

- ليكن $f : E \to E$ تطبيق خطي، $\mathcal{B}$، $\mathcal{B}'$ أساسين لـ E و $P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$.
- لتكن $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ مصفوفة التطبق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}$ و $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ مصفوفة التطبق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}'$.

نظرية تغيير الأساس تكون كالآتي:

نظرية 1.3.4 :

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

و بصفة عامة من أجل كل $n \geq 1$

$$\boxed{B^n = P^{-1}A^nP}$$

مثال 4 : ليكن الأساسان التاليان من $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{و} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

و ليكن $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي حيث مصفوفته في الأساس $\mathcal{B}_1$ هي :

$$A = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

إيجاد مصفوفة f في الأساس $\mathcal{B}_2$، $B = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$.

- بحساب مصفوفة العبور سابقا من الأساس $\mathcal{B}_1$ إلى الأساس $\mathcal{B}_2$ فوجدنا

$$P = \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- نحسب

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- نطبق صيغة تغيير الأساسات من النظرية السابقة نجد :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

غالبا ما يكون من مصلحة التغييرات في الأساسات أن يتم اختزالها إلى مصفوفة أبسط (مصفوفة قطرية أو مثلثية علوية أو سفلية). على سبيل المثال هنا، من السهل حساب قوة المصفوفة B^k لإستنتاج A^k منها.

4.4 سلسلة التمارين رقم 4

تمرين 1 : حدد إذا كانت التطبيقات التالية عبارة عن تطبيقات خطية أم لا:

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+y,\quad x-2y, 0)$
2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+y,\quad x-2y, 1)$
3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 - y^2$

الحــل

1) ليكن f تطبيق خطي. نأخذ $u=(x,y)$ و $v=(x',y')$ في $\mathbb{R}^2$، و $\lambda \in \mathbb{R}$. ومنه

$$\begin{aligned} f(u+v) &= ((x+x')+(y+y'), (x+x')-2(y+y'), 0) \\ &= (x+y, x-2y, 0) + (x'+y', x'-2y', 0) \\ &= f(u)+f(v). \end{aligned}$$

كذلك،

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - 2\lambda y, 0) \\ &= \lambda(x+y, x-2y, 0) \\ &= \lambda f(u). \end{aligned}$$

2) f : ليست تطبيق خطي لأن $f\big((0,0)\big) \neq (0,0,0)$

3) f ليست تطبيق خطي لأن،

$$f\big((1,0)\big) = 1,\ f\big((-1,0)\big) = 1 \quad \text{و} \quad f\big((0,0)\big) = 0 \neq f\big((1,0)\big) + f\big((-1,0)\big).$$

تمرين 2 : ليكن التطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ المعرف:

$$f(x,y) = (x+y, x-y, x+y).$$

أوجد نواة التطبق الخطي f، و صورته. و هل هو متباين؟ غامر؟

الحـــل

1) إيجاد نواة التطبيق الخطي f .

$$Ker(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (0,0,0)\}.$$

هذا يكافئ:

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x-y &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x &= 0 \end{cases}$$

نستنتج أن $Ker(f) = (0,0)$.

2) بما أن $Ker(f) = (0,0)$، حسب النظرية فإن f متباين.

3) إيجاد صورة التطبيق الخطي f. ليكن (u,v,w) شعاع من $\mathbb{R}^3$. نقول أن (u,v,w) من مجموعة صور التطبق الخطي f إذا وفقط إذا كان:

$$\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (u,v,w)=f(x,y) \iff \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} u &= x+y\\ v &= x-y\\ w &= x+y\end{cases}$$

$$\iff \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} u &= x+y\\ u+v &= 2x\\ w-u &= 0\end{cases}$$

$$\iff \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \frac{u-v}{2} &= y\\ \frac{u+v}{2} &= x\\ w-u &= 0\end{cases}$$

نستنتج أن

$$Im(f)=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3;\ u-w=0\}.$$

بصفة خاصة، $(1,1,0)$ لا ينتمي للمجموعة $Im(f)$، ومنه f ليس غامر.

تمرين 3 : ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ المعرف:

$$f(x,y,z)=(x+z,\quad y-x,\quad z+y,\quad x+y+2z).$$

1) أوجد أساسا لـ $Im(f)$.

2) أوجد أساسا لـ $Ker(f)$.

3) هل f متباين؟ غامر؟ تقابلي؟

الحـــل

1) نستعمل تعريف التطبيق الخطي f نجد:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1,-1,0,1)\\ f(e_2) &= (0,1,1,1)\\ f(e_3) &= (1,0,1,2)\end{aligned}$$

يمكن أن نلاحظ أن:

$$f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$$

أي أن الأشعة $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ مرتبطة خطيا، كما نعلم أن الأشعة $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ مولدة لـ $Im(f)$ ومنه $Im(f)$ مولدة من $\{f(e_1), f(e_2)\}$ وهي تكون أساس لها.

2) لدينا

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} x+z &= 0 \\ -x+y &= 0 \\ y+z &= 0 \\ x+y+2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= -z \\ z &= z \end{cases}$$

نستنتج أن الشعاع $(-1,-1,1)$ يولد $Ker(f)$ نظراً لأنه غير معدوم، فهو أساس $Ker(f)$ ومنه

$$\dim(Ker(f)) = 1.$$

3) حسب نظرية النواة والصورة فإن التطبيق f ليس غامر لأن النواة ذات البعد 1 في حين بعد $Im(f)$ لا يساوي 3 لأن

$$Im(f) = Vect\{f(e_1), f(e_2)\} \Longrightarrow \dim(Im(f)) = 2.$$

تمرين 4 : حدد ما إذا كان التطبيق f_i خطيا أم لا :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad & f_2(x,y,z) = (xy, x, y) \\ f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad & f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \quad & f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\ f_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 \quad & f_5(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{aligned}$$

الحـــل

1) f_1 تطبيق خطي. ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ و $(x',y')\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
f_1\big((x,y)+(x',y')\big) &= f_1\big(x+x',y+y'\big)\\
&= \big(2(x+x')+(y+y'),(x+x')-(y+y')\big)\\
&= \big(2x+y+2x'+y',x-y+x'-y'\big)\\
&= \big(2x+y,x-y\big)+\big(2x'+y',x'-y'\big)\\
&= f_1(x,y)+f_1(x',y')
\end{aligned}$$

ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ و $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$f_1\big(\lambda\cdot(x,y)\big)=f_1\big(\lambda x,\lambda y\big)=\big(2\lambda x+\lambda y,\lambda x-\lambda y\big)=\lambda\cdot\big(2x+y,x-y\big)=\lambda\cdot f_1(x,y).$$

2) f_2 ليس تطبيق خطي على سبيل المثال $f_2(1,1,0)+f_2(1,1,0)$ ليست مساوية لـ $f_2(2,2,0)$.

3) f_3 تطبيق خطي : نتحقق من أجل (x,y,z) و (x',y',z') أن

$$f_3\big((x,y,z)+(x',y',z')\big)=f_3(x,y,z)+f_3(x',y',z')$$

بعدها من أجل (x,y,z) و λ لدينا $f_3\big(\lambda\cdot(x,y,z)\big)=\lambda\cdot f_3(x,y,z)$.

4) f_4 تطبيق خطي : نتحقق من أجل (x,y) و (x',y') أن

$$f_4\big((x,y)+(x',y')\big)=f_4(x,y)+f_4(x',y').$$

بعدها، ومن أجل (x,y) و λ لدينا $f_4\big(\lambda\cdot(x,y)\big)=\lambda\cdot f_4(x,y)$.

5) f_5 تطبيق خطي : لتكن $P,P'\in\mathbb{R}_3[X]$ فإن

$$\begin{aligned}
f_5\big(P+P'\big) &= \big((P+P')(-1),(P+P')(0),(P+P')(1)\big)\\
&= \big(P(-1)+P'(-1),P(0)+P'(0),P(1)+P'(1)\big)\\
&= \big(P(-1),P(0),P(1)\big)+\big(P'(-1),P'(0),P'(1)\big)\\
&= f_5(P)+f_5(P')
\end{aligned}$$

و إذا كان $P \in \mathbb{R}_3[X]$ و $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_5(\lambda \cdot P) &= \big((\lambda P)(-1), (\lambda P)(0), (\lambda P)(1)\big) \\ &= \big(\lambda \cdot P(-1), \lambda \cdot P(0), \lambda \cdot P(1)\big) \\ &= \lambda \cdot \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \\ &= \lambda \cdot f_5(P) \end{aligned}$$

تمرين 5 : ليكن التطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف:

$$f(x, y, z) = (-3x - y + z,\ \ 8x + 3y - 2z,\ \ -4x - y + 2z).$$

1) أوجد أساس لنواة التطبيق f وأحسب بُعدها.

2) هل التطبيق f متباين؟

3) أوجد رتبة f. هل التطبيق f غامر؟

4) أوجد أساس لـ $Im(f)$.

الحــل

1) **ليكن** $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. **لدينا** $(x, y, z) \in ker(f)$ **إذا و فقط إذا كان :**

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & - & y & + & z & = & 0 \\ 8x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ -4x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} z & - & y & - & 3x & = & 0 \\ -2z & + & 3y & + & 8x & = & 0 \\ 2z & - & y & - & 4x & = & 0 \end{array}\right.$$

ثم ، بإضافة (إزالة على التوالي) ضعف السطر الأول إلى الثاني (على التوالي الثالث)، نجد:

$$\left\{\begin{array}{rrcrcl} z & -y & - & 3x & = & 0 \\ & y & + & 2x & = & 0 \\ & y & + & 2x & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} z & & -x & = & 0 \\ & y & +2x & = & 0 \end{array}\right. .$$

وبالتالي $(x,y,z)\in ker(f)$ إذاوفقط إذا كان (x,y,z) حل هذه الجملة أي:

$$(x,y,z)=(x,-2x,x)=x(1,-2,1).$$

ومنه نأخذ كأساس لنواة التطبق f الشعاع $(1,-2,1)$ أي الأساس يتكون من عنصر واحد يعني $\dim(ker(f))=1$.

2) النواة لا تتطابق مع الفضاء المعدوم $\{0\}$ ومنه f ليس متباين.

3) حسب نظرية الرتبة لدينا:

$$rg(f)=3-\dim(ker(f))=3-1=2.$$

التطبيق f ليس غامر : لأن بُعد فضاء الصورة يساوي 2 يختلف عن فضاء الوصول الذي هو $\mathbb{R}^3$ ذو البُعد 3.

4) إيجاد فضاء الصور للتطبيق f. لدينا:

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{x(-3,8,-4)+y(-1,3,-1)+z(1,-2,2)\ :\ x,y,z\in\mathbb{R}\} \\ &= vect(u_1,u_2,u_3), \end{aligned}$$

حيث نضع $u_1=(-3,8,-4)$، $u_2=(-1,3,-1)$ و $u_3=(1,-2,2)$. من السؤال السابق فإن رتبة التطبيق f هي 2. من جهة أخرى الجملة (u_1,u_2) مستقلة خطيا فهي تشكل أساس لـ $Im(f)$.

تمرين 6 : ليكن التشاكل الذاتي f من $\mathbb{R}^3$ حيث مصفوفته في الأساس القانوني (e_1,e_2,e_3) معرفة كما يلي:

$$A=\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

أثبت أن الأشعة

$$e'_1=2e_1+3e_2+e_3,\qquad e'_2=3e_1+4e_2+e_3,\qquad e'_3=e_1+2e_2+2e_3$$

تشكل أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$ ثم أوجد مصفوفة f بالنسبة لهذا الأساس.

الحـــل

نرمز بـ $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ للأساس القديم و للأساس الجديد بـ $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$. لتكن P مصفوفة العبور التي أعمدتها هي مركبات الأشعة التي تنتج من التعبير عن مركبات أشعة الأساس الجديد $\mathcal{B}'$ بدلالة الأساس القديم $\mathcal{B}$ نجد:

$$P=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}$$

نتحقق أن P عكوسة، وبحساب مقلوبها نجد أن $\mathcal{B}'$ يشكل أساس، بالإضافة إلى ذلك :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-6&5&-2\\4&-3&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$ نحسب $$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

B هي مصفوفة التطبيق f في الأساس $\mathcal{B}'$.

تمرين 7 : ليكن التشاكل الذاتي f من $\mathbb{R}^2$ حيث مصفوفته

$$A=\begin{pmatrix}2&\frac{2}{3}\\-\frac{5}{2}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

في الأساس القانوني، وليكن $e_1=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ و $e_2=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.

1) أثبت أن $\mathcal{B}'=(e_1,e_2)$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$ ثم أوجد المصفوفة $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.

2) أحسب A^n من أجل $n\in\mathbb{N}$.

3) حدد مجموعة المتتاليات الحقيقية التي تحقق

$$\forall n\in\mathbb{N}:\begin{cases}x_{n+1}=2x_n+\dfrac{2}{3}y_n\\ y_{n+1}=-\dfrac{5}{2}x_n-\dfrac{2}{3}y_n\end{cases}$$

الحـــل

1) نضع P مصفوفة العبور من الأساس القانوني $\mathcal{B}=\big((1,0),(0,1)\big)$ نحو الأساس $\mathcal{B}'=(e_1,e_2)$.
مكونة من أشعة الأعمدة e_1 و e_2 :

$$P=\begin{pmatrix}-2&-2\\3&5\end{pmatrix}$$

$\det P=-4\neq 0$ ومنه P عكوسة وبالتالي $\mathcal{B}'$ أساس.

ومنه مصفوفة f في الأساس $\mathcal{B}'$ هي :

$$B=P^{-1}AP=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&2\\-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&\frac{2}{3}\\-\frac{5}{2}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

2) من السهل جدا حساب قوة مصفوفة قطرية :

$$B^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&(\frac{1}{3})^n\end{pmatrix}$$

بما أن $A=PBP^{-1}$ نستنتج بعدها A^n :

$$A^n=\left(PBP^{-1}\right)^n=PB^nP^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}10-\frac{6}{3^n}&4-\frac{4}{3^n}\\-15+\frac{15}{3^n}&-6+\frac{10}{3^n}\end{pmatrix}$$

3) إذا وضعنا $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ ومنه المعادلات التي تحقق هته المتتاليات تكتب على الشكل المصفوفي كما يلي:

$$X_{n+1}=AX_n.$$

إذا وضعنا الشرط الإبتدائي $X_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ فإن: $X_n=A^nX_0$. ونستنتج أن:

$$\begin{cases}x_n&=&\frac{1}{4}\Big((10-\frac{6}{3^n})x_0+(4-\frac{4}{3^n})y_0\Big)\\ y_n&=&\frac{1}{4}\Big((-15+\frac{15}{3^n})x_0+(-6+\frac{10}{3^n})y_0\Big).\end{cases}$$