جامعة محمد خيضر بسكرة
قسم علوم المادة
مقياس : رياضيات I

السنة الدراسية: 2023/2022
التاريخ: 18/01/2023

حل الإمتحان للسداسي الأول

- **حـــل التمرين رقم 1**

1) لدينا:
$$\forall x \in \mathbb{Q} : x\mathscr{R}x \iff x^2 \neq 0$$
وهذا خطأ من أجل $x=0$. ومنه $\mathscr{R}$ علاقة ليست انعكاسية .

2) لدينا:
$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 : x\mathscr{R}y \iff xy \neq 0 \iff yx \neq 0 \iff y\mathscr{R}x.$$
ومنه العلاقة $\mathscr{R}$ تناظرية.

3) لأن العلاقة تناظرية ، فهي حتما ليست ضد تناظرية، أو لأن $1\mathscr{R}(-1)$ و $(-1)\mathscr{R}1$ ، بينما $1 \neq -1$.

4) إذا كان $xy \neq 0$ فإن $x \neq 0$ و $y \neq 0$. وأيضا إذا كان $yz \neq 0$، فإن $y \neq 0$ و $z \neq 0$. ينتج لنا $xz \neq 0$ لأن x و z غير معدومين. ومنه العلاقة متعدية.

5) ومنه هذه العلاقة ليست علاقة تكافؤ ، ولا علاقة ترتيب.

- **حـــل التمرين رقم 2**

1) مشتق الدالة هو
$$\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

2) لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $|f(x)| \leq |x|$، نستنتج أن f تؤول لـ 0 عند 0. أي أنها قابلة للتمديد بالإستمرار عند 0 وتمديدها هو الدالة $\tilde{f}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{إذا كان } x \neq 0 \\ 0 & \text{إذا كان } x = 0. \end{cases}$$

- **حـــل التمرين رقم 3**

1) لدينا
$$\begin{aligned} \forall x,y \in \mathbb{R} : x\bigstar y &= x+y-1 \\ &= y+x-1 \\ &= y\bigstar x \end{aligned}$$
لأن الجمع تبديلي في مجموعة الأعداد الحقيقية. ومنه $\bigstar$ تبديلي.

2) لدينا:

$$\begin{aligned}\forall x,y,z \in \mathbb{R} : (x\bigstar y)\bigstar z &= (x+y-1)\bigstar z\\ &= (y+x-1)+z-1\\ &= x+(y+z-1)-1\\ &= x\bigstar(y+z-1)\\ &= x\bigstar(y\bigstar z)\end{aligned}$$

ومنه $\bigstar$ تجميعي.

3) ليكن e العنصر الحيادي بالنسبة لـ $\bigstar$ فإن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x\bigstar e = x \Longleftrightarrow x+e-1=x \quad \Longleftrightarrow \quad e=1$$

- **حـــل التمرين رقم 4**

1) نضع P مصفوفة العبور من الأساس القانوني $\mathcal{B}=\big((1,0),(0,1)\big)$ نحو الأساس $\mathcal{B}'=(e_1',e_2')$. مكونة من أشعة الأعمدة e_1' و e_2' :

$$P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$\det P = 3 \neq 0$ ومنه P عكوسة وبالتالي $\mathcal{B}'$ أساس.

ومنه مصفوفة f في الأساس $\mathcal{B}'$ هي :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

2) نضع P^{-1} مصفوفة العبور من الجديد $\mathcal{B}'=(e_1',e_2')$ نحو الأساس القانوني $\mathcal{B}=\big((1,0),(0,1)\big)$ ومنهك

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-\beta\\ \alpha+2\beta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x=\alpha-\beta\\ y=\alpha+2\beta\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y, \beta=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}x$$

من أجل: $e_1=(1,0) \Longrightarrow \alpha=\frac{2}{3}, \beta=-\frac{1}{3}$

ومن أجل: $e_2=(0,1) \Longrightarrow \alpha=\frac{1}{3}, \beta=\frac{1}{3}$

ومنه مصفوفة العبور العكسية هي: $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

3) من السهل جدا حساب قوة مصفوفة قطرية : $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

بما أن $B = P^{-1}AP$ فإن: $A = PBP^{-1}$ نستنتج بعدها A^n :

$$A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & -3^{n-1} \\ -2\text{X}3^{n-1} & 2\text{X}3^{n-1} \end{pmatrix}.$$