4.1 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 1*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

Let . لتكن

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

and و

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

$A)$ أحسب كل المجاميع الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات.

Calculate all possible sums of two of these matrices.

$B)$ أحسب كل الجداءات الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات.

Calculate all possible products of two of these matrices.

$C)$ أحسب $3A + 2E$ و $5B + 4EA^T$.

Calculate $3A + 2E$ *and* $5B + 4EA^T$.

$D)$ أوجد α حيث $A - \alpha E$ المصفوفة المعدومة.

Find α *where* $A - \alpha E$ *is the null matrix.*

Solution - الحــل

$A)$ المجاميع الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات هي

The possible sums of two of these matrices are

$$A + E = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -3 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

باقي المجاميع غير ممكنة.

Other combinations are not possible.

$B)$ الجداءات غير الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات هي:

The non-possible products of two of these matrices are:

$$AB, AC, CA, DA, AE, EA, CB, BD, DB, EB, CD, DC, CE, EC, DE$$

و الجداءات الممكنة هي:

The possible products are:

$$BA = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ -13 & -3 \\ -20 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AD = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$BE = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & 20 \\ -15 & 10 \\ -11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$ED = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$(C$

$$3A + 2E = \begin{pmatrix} -19 & 10 \\ -6 & -3 \\ -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5B + 4EA^T = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -13 \\ 94 & 15 & -7 \\ 287 & -14 & -123 \end{pmatrix}.$$

D) لا يوجد α حيث

There is no α where

$$A - \alpha E = \begin{pmatrix} -\alpha - 7 & 2 - 2\alpha \\ 3\alpha & -1 \\ 8\alpha + 1 & -6\alpha - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

لأن $0 \neq -1$.

because $0 \neq -1$.

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

.

1) أحسب الجدائين AB و BA عندما يكون معرف، في كل من الحالات التالية:

Calculate the product AB and BA when is defined, in each of the following cases:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \ (a$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ (b$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ (c$$

2) أحسب منقول المصفوفات السابقة.

Calculate the transpose of the previous matrices.

Solution : الحـــل

1) حساب الجداءات الممكنة:

Calculation of possible product:

- نظرا لأن A و B مصفوفتان مربعتان من نفس الرتبة، فإن الجدائين AB و BA ممكنان. و نجد:

Since A and B are square matrices of the same order, the product AB and BA are possible and we find:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

على وجه الخصوص، $AB = BA = 0$ بينما لا المصفوفة A ولا B معدومة.

In particular, $AB = BA = 0$ while neither the matrix A nor B is zero.

- الجداء AB غير معرف لأن A يحتوي على ثلاثة أعمدة و B على سطرين. لذا نجد

The product of AB is undefined because A has three columns and B has two rows. So we find

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

- الجداء BA غير معرف لكن من ناحية أخرى، لدينا

The product BA is undefined but on the other hand, we have

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) حساب منقول المصفوفات السابقة:

Calculation of transpose of the past matrices:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = B \quad (a$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b$$

$$.A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (c$$

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

لتكن $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ المصفوفة المعرفة بـ:

Let $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ be the matrix defined by:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

قارن بين المصفوفتين $(A+B)^2$ و $A^2+2AB+B^2$. ثم قارن بين المصفوفتين $(A+B)^2$ و $A^2+AB+BA+B^2$.

Compare the two matrices $(A+B)^2$ with $A^2+2AB+B^2$. Then compare the two matrices $(A+B)^2$ with $A^2+AB+BA+B^2$.

Solution : الحــل

نجري الحسابات المختلفة فنجد

We make various calculations and find out

$$(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

and و

$$A^2+2AB+B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

وبالتالي، نلاحظ أن $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ **خطأ بالنسبة للمصفوفات. من ناحية أخرى، المساواة** $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$ **التي أثبتناها بالتوزيع المزدوج، صحيحة لجميع المصفوفات المربعة** A **و** B.

So we can see that $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ is false for matrices. On the other hand, the equality $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$, which we prove by double distribution, is true for all square matrices A and B.

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

لتكن

Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

أوجد كل المصفوفات

Find all matrices

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

التي يمكنها أن تتبادل مع A، يعني $AB = BA$.

which can be exchanged with A, i.e. $AB = BA$.

Solution : الحــل

لدينا

We have

$$AB = \begin{pmatrix} c+e & d+f \\ e & f \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} c & c+d \\ e & e+f \end{pmatrix}.$$

لأننا فرضنا $AB = BA$ **نتحصل على الجملة :**

because we assume $AB = BA$, we get the system:

$$\begin{cases} c+e &= c \\ d+f &= c+d \\ f &= e+f \end{cases}$$

بحل الجملة نجد $e = 0$ **و** $c = f$. **ومنه كل المصفوفات** B **فهي من الشكل :**

Solving the system, we find $e = 0$ and $c = f$ then, all the matrices B are of the form:

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

لتكن a و b أعداد حقيقية غير معدومة و المصفوفة

Let aandb be non-zero real numbers and the matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

أوجد كل المصفوفات $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي يمكنها أن تتبادل مع A، أي $AB = BA$.

Find all the matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ that can interchange with A, i.e. $AB = BA$.

Solution : الحــل

Let — لتكن

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

then, we have — ومنه لدينا

$$AB = \begin{pmatrix} ac + be & ad + bf \\ ae & af \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} ac & bc + ad \\ ae & be + af \end{pmatrix}.$$

لأننا فرضنا $AB = BA$ نتحصل على الجملة :

because we assume $AB = BA$, we get the system:

$$\begin{cases} ac + be &= ac \\ ad + bf &= bc + ad \\ af &= be + af \end{cases}$$

بحل الجملة نجد $e = 0$ و $c = f$. ومنه كل المصفوفات B فهي من الشكل :

Solving the system, we find $e = 0$ and $c = f$, and then, all the matrices B are at the form:

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

أجد A و B من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ حيث : $AB = 0$ و $BA \neq 0$.

Find A and B from $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ where: $AB = 0$ and $BA \neq 0$.

Solution : الحــل

مثلا من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $a \neq 0$ و $b \neq 0$ فإن:

For example, for each non-zero real number $a \neq 0$ and $b \neq 0$, then:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note that **نلاحظ أن**

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and **و**

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

Let the matrix لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

1) هل توجد مصفوفة $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ حيث $AB = I_3$؟ إن كان الجواب بنعم، هات صيغة المصفوفة B.
Is there a matrix $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ where $AB = I_3$? If yes, give the matrix formula of B.

2) هل توجد مصفوفة $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ حيث $CA = I_2$؟ إن كان الجواب بنعم، هات صيغة المصفوفة C.

Is there a matrix $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ where $CA = I_2$? If yes, give the matrix formula of C.

Solution : الحـــل

لتكن $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ تكتب على الشكل التالي:

Let $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ be written in the following form:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

ومنه الجداء AB يساوي

So the product of AB is equal to

$$AB = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix}.$$

إذا كان لدينا $AB = I_3$، فسنحصل على وجه الخصوص على $d = 1$ و $a = 0$ و $a + d = 0$. وهي مستحيلة.

In particular, if we have $AB = I_3$, we get $d = 1$, $a = 0$, and $a + d = 0$. It is impossible.

لتكن $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ تكتب على الشكل التالي:

Let $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ be written in the following form:

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

ومنه الجداء CA يساوي:

So the product of CA is equal to

$$CA = \begin{pmatrix} b+c & a+c \\ e+f & d+f \end{pmatrix}.$$

لدينا $CA = I_2$ إذا وفقط إذا كان:

We have $CA = I_2$ if and only if:

$$\begin{cases} b+c &= 1 \\ a+c &= 0 \\ e+f &= 0 \\ d+f &= 1 \end{cases}$$

the solution of the system is

حل الجملة هو:

$$\begin{cases} a &= -c \\ b &= 1-c \\ e &= -f \\ d &= 1-f \end{cases}$$

لذلك يمكن أن نجد مصفوفة مناسبة C، على سبيل المثال:

So we can find a suitable matrix C, for example:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercise N°– 8 – تمرين رقم

Let the following matrices as:

لتكن المصفوفات التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) أحسب A^2، A^3. ثم إستنتج من A^n من أجل كل $n \geq 1$.

Calculate A^2, A^3. Then deduce from A^n for every $n \geq 1$.

2) أجب على نفس السؤال من أجل المصفوفة B.

Answer the same question for the matrix B.

Solution : الحـــل

سنبدأ بحساب الحدود الأولى لـ A^n لمحاولة تخمين الصيغة النهائية. لدينا

We'll start by calculating the first terms of A^n to try to guess the final formula. we've got

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

ثم نثبت بالتراجع أن من أجل $n \geq 1$:

Then we prove by induction that for $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

إن الإثبات بالتراجع بسيط للغاية، و يعتمد ببساطة على $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$

The induction proof is very simple, it simply depends on $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$

نفعل الشيء نفسه بالنسبة لـ B:

We do the same for B:

$$B^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ B^3=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 8\end{pmatrix}.$$

ثم نثبت بالتراجع أن من أجل $n\geq 1$:

Then we prove by induction that for $n\geq 1$:

$$B^n=\begin{pmatrix}1 & 2^n-1\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}.$$

Exercise N°– 9 – تمرين رقم

أحسب بإستعمال طريقة غوص ثم طريقة المصفوفة المرافقة، مقلوب المصفوفة

Calculate using the submerged method and then the conjugate matrix method, the inverse of the matrix

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Solution - الحــل

1) حساب مقلوب المصفوفة A باستعمال طريقة غوص، المصفوفة المعززة:

Calculating the inverse of the matrix A using the Gauss method. The augmented matrix is:

$$(A\mid I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}L_1\\ L_2\\ L_3\end{array}$$

نجعل 0 يظهر في العمود الأول:

We make 0 appear in the first column:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_2-2L_1\end{array}$$

then ثم

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow \frac{-1}{4} L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \end{array}$$

and finally و في الأخير

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

وبالتالي، فإن مقلوب المصفوفة A هو المصفوفة التي تم الحصول عليها على اليمين :

Thus, the inverse matrix of A is the matrix obtained on the right:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) **نستعمل طريقة المصفوفة المرافقة: نحسب المحدد**

We use the adjoint matrix method: we calculate the determinant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = -4$$

We calculate the adjoint matrix **نحسب المصفوفة المرافقة**

$$A^* = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculate the transpose of the adjoint matrix — نحسب منقول المصفوفة المرافقة

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

نطبق النظرية لحساب المقلوب، نجد:

Applying the theorem to calculate the inverse, we find:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A^*)^T = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercise N°– 10 – تمرين رقم

Prove that — أثبت أن

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c.$$

Solution : الحــل

نجمع كل الأسطر ونضعها في السطر الأول. نحصل على سطر يتكون من $1+a+b+c$ يمكننا استخلاصها من المحدد، أي نحصل علي:

We sum all the lines and put them on the first line. We get a line consisting of $1+a+b+c$ that we can extract from the determinant, that is we get:

$$D = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}.$$

ثم نقوم بالتحويل التالي على الأعمدة: $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$، $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ نحصل على:

Then we do the following transformation on the columns: $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ we get:

$$D = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

نحصل على محدد مصفوفة مثلثية سفلية، عناصر قطرها 1. ومنه المحدد

We get the determinant of the lower triangular matrix, elements of diagonal 1. Then de determinant is:

$$D = 1+a+b+c.$$