2) الحالة الثانية: $t = +1$. الجملة الخطية تكتب على الشكل:

The second case: if $t = +1$. The linear system is written in the form:

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

والمعادلتان متطابقتان. هناك عدد غير منته من الحلول:

The two equations are identical. There are an infinite number of solutions:

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \{(x, 1 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

3) الحالة الثالثة: $t = -1$. الجملة الخطية تكتب على الشكل:

The third case: if $t = -1$. The linear system is written in the form:

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x + y &= -1, \end{cases}$$

من الواضح أن المعادلتين غير متوافقتين وبالتالي

It is clear that the two equations are not compatible thus

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \varnothing.$$

3.3 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 3*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

حل الجمل الخطية التالية باستعمال طريقة غوص:

Solve the following linear system using the Gauss method:

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = & 3 \\ x & +2y & +z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & & +2z & = & 1 \\ & -y & +z & = & 2 \\ x & -2y & & = & 1 \end{cases}.$$

Solution - الحـــل

بإستخدام طريقة غوص، بالنسبة للجملة الأولى، نكتب:

Using the Gauss method for the first system, we write:

$$\begin{cases} x+y+2z &= 3 \quad L_1 \\ x+2y+z &= 1 \quad L_2 \\ 2x+y+z &= 0 \quad L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ y-z &= -2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y-3z &= -6 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ y-z &= -2 \\ -4z &= -8 \quad L_2 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 0 \\ z &= 2 \end{cases}$$

ومنه حلول الجملة هي $(x,y,z)=(-1,0,2)$.

The solutions to the system are $(x,y,z)=(-1,0,2)$.

بالنسبة للجملة الثانية، نسير بنفس الطريقة:

For the second system, we proceed in the same way:

$$\begin{cases} x+2z &= 1 \quad L_1 \\ -y+z &= 2 \quad L_2 \\ x-2y &= 1 \quad L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2z &= 1 \\ -y+z &= 2 \\ -2y-2z &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2z &= 1 \\ -y+z &= 2 \\ -4z &= -4 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -1 \\ y &= -1 \\ z &= 1 \end{cases}$$

ومنه حلول الجملة هي $(x, y, z) = (-1, -1, 1)$.

The solutions of the system are $(x, y, z) = (-1, -1, 1)$.

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

1) أوجد حلول الجملة التالية بأربع طرق مختلفة (بالتعويض ، بالطريقة المحورية لغوص، بقلب مصفوفة المعاملات و باستخدام صيغة كرامر):

Find the solutions to the following system in four different ways (by substitution, by the pivot-Gauss's method, by matrix inversion coefficient and by using Cramer's method):

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$$

2) اختر الطريقة التي تبدو لك أنها الأسرع في الحل، وفقا لقيم a لإيجاد حلول الجمل التالية:

Choose the method that seems to be the fastest to solve, according to the values of a, to find solutions to the following system:

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2+1)x + 2ay = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1 \end{cases}$$

Solution - الحـــل

1.1) **Substitution method طريقة التعويض**

نستطيع كتابة المعادلة الأولى على الشكل التالي $y = 1 - 2x$. نعوض قيمة y في المعادلة الثانية نجد

We can write the first equation as $y = 1 - 2x$. Substituting the value of y into the second equation, we get:

$$3x + 7y = -2 \implies 3x + 7(1 - 2x) = -2 \implies 11x = 9 \implies x = \frac{9}{11}.$$

نستنتج y :

We get y :

$$y = 1 - 2x = 1 - 2\frac{9}{11} = -\frac{7}{11}$$

ومنه حلول هذه الجملة هي الثنائية: $(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11})$.

The solutions to this system is the pair: $(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11})$.

2.1) **طريقة غوص Gauss's method**

نحتفظ بالسطر الأول L_1 مكانه ونغير موضع السطر L_2 بالسطر $2L_2 - 3L_1$ نجد الجملة المثلثية التالية :

We keep the first line L_1 in its place and change the position of the line L_2 in the line $2L_2 - 3L_1$ we find the following trigonometric system:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 11y = -7 \end{cases}$$

ونستنتج $y = -\frac{7}{11}$ **ومنه من السطر الأول نجد** $x = \frac{9}{11}$.

and we deduce $y = -\frac{7}{11}$, then from the first line we find $x = \frac{9}{11}$.

3.1) **مقلوب المصفوفة Matrix inverse method**

تكتب الجملة على الشكل المصفوفي كما يلي:

The system is written in matrix form as follows:

$$AX = Y \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

نجد حل الجملة بقلب المصفوفة:

We find the solution to the system by the matrix inverse:

$$X = A^{-1}Y.$$

مقلوب مصفوفة من الرتبة 2×2 يحسب كما يلي:

The inverse of a matrix of order 2×2 is calculated as follows:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{فإن} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ومن الضروري التأكد أن المحدد

It is necessary to ensure that the determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

It differs from 0. — **يختلف عن** 0.

we find — **نجد**

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} \\ \frac{-7}{11} \end{pmatrix}$$

4.1) طريقة كرامر **Cramer's method**

تكون صيغ كرامر لجملة خطية من معادلتين على النحو التالي إذا كان المحدد يحقق بالطبع : $ad - bc \neq 0$

Cramer's formulas for a linear system of two equations are as follows, if the determinant of course satisfies $ad - bc \neq 0$:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

which gives us: **الذي يعطينا** :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{9}{11} \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = -\frac{7}{11}$$

2) **بادئ ذي بدء، نتطلع إلى معرفة ما إذا كان هناك حل وحيد، فهذه هي الحالة إذا وفقط إذا كان المحدد ليس معدوما. بالنسبة للجملة الأولى، فإن المحدد هو:**

Firstly, we look to see if there is a unique solution, which is the case if and only if the determinant is not null. For the first system, the determinant is:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

لذلك هناك حل وحيد إذا وفقط إذا كان $a \neq \pm 1$.

So there is only one solution if and only if $a \neq \pm 1$.

بالطبع كل الطرق تؤدي إلى نفس النتيجة، فعلى سبيل المثال باستعمال طريقة التعويض، وعن طريق كتابة السطر الأول على الشكل: $y = 2 - ax$، **وبالتعويض في السطر الثاني نجد** $(a^2+1)x + 2a(2 - ax) = 1$.

Of course, all methods lead to the same result, for example by using the substitution method, and by writing the first line in the form: $y = 2 - ax$, and by substituting in the second line we find $(a^2+1)x + 2a(2-ax) = 1$.

نستنتج أنه إذا كان $a \neq \pm 1$ فإن

We conclude that if $a \neq \pm 1$ then

$$x = \frac{4a-1}{a^2-1} \quad \text{و} \quad y = \frac{-2a^2+a-2}{a^2-1}.$$

الآن نتعامل مع الحالات الخاصة حسب قيم a. إذا كان $a = 1$ فإن الجملة تأخذ الشكل :

Now we deal with the special cases according to the values of a. If $a = 1$, then the system takes the form:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

لكن لا نستطيع أن نتحصل في نفس الوقت على $x + y = 2$ و $x + y = \frac{1}{2}$. ومنه لا توجد حلول.

But we cannot have $x + y = 2$ and $x + y = \frac{1}{2}$ at the same time then, there are no solutions.

إذا كان $a = -1$ فإن الجملة تأخذ الشكل :

If $a = -1$, then the system takes the form:

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$$

and there are no solutions. و لا توجد حلول.

here the determinant هنا المحدد

$$\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a.$$

إذا كان $a \neq 0$ ومنه الحل الوحيد (x, y). مثلا باستعمال صيغة كرامر هو

If $a \neq is0$ then the only solution is (x, y). For example using Cramer's formula is

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a} \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a}.$$

إذا كان $a = 0$ لا توجد حلول.

If $a = 0$ there are no solutions.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

أوجد حلول الجملة التالية :

Find solutions to the following system:

$$(S) = \begin{cases} 3x \quad +2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Solution - الحــل

نبدأ بتبسيط الجملة:

We start by simplifying the system:

- نغير مكان السطر L_3 إلى السطر الأول وإعتباره محور غوص

We change the position of the line L_3 to the first line and consider it a Gauss's axis

- نعيد ترتيب المتغيرات بالترتيب التالي: y, t, x, z للاستفادة من الأسطر البسيطة بالفعل فنحصل على الجملة.

We rearrange the variables in the following order: y, t, x, z to take advantage of the already simple lines, and we get the system.

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 & L_1 \\ 3y + 3t + z = 0 & L_2 \\ -y - t + 2x + z = 0 & L_3 \\ 3x + 2z = 0 & L_4 \end{cases}$$

نبدأ طريقة غوص بالتحويلات التالية :

We start with a Gauss method with the following transformations:

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 & \\ - 3x - 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 3x + 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ 3x + 2z = 0 & \end{cases}$$

نجد أن الأسطر الثلاثة الأخيرة متساوية و منه الجملة تكافئ:

We find that the last three lines are equal, and then, the system is equivalent to:

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

نختار x و y كوسيط ومنه $z = -\frac{3}{2}x$ و $t = -x - y - z = \frac{1}{2}x - y$. و منه حلول الجملة هي

We choose x and y as arguments, of which $z = -\frac{3}{2}x$ and $t = -x - y - z = \frac{1}{2}x - y$. Then, the set solutions is

$$\mathcal{H}(S) = \left\{ \left(x, y, -\frac{3}{2}x, \frac{1}{2}x - y \right) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

حل الجملة التالية :

Solve the following system:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Solution : الحـــل

بالإعتماد على طريقة غوص، نقوم بالتحويلات التالية $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ و $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$ فنتحصل على :

Depending on the Gauss's method, we perform the following transformations $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ and $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$, so we get:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ 5y - 7z = 3b + a \\ 7y + z = 3c - a \end{cases}$$

ثم التحويل $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$ الذي يعطينا الجملة المثلثية :

Then the transformation $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$ which gives us the trigonometric system:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ 5y - 7z = 3b + a \\ 54z = 5(3c - a) - 7(3b + a) \end{cases}$$

من المعادلة الأخيرة نجد : $z = \frac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$ ثم بالتعويض نتحصل على الحلول:

From the last equation, we find: $z = \frac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$ Then, by substituting, we get the solutions:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{18}(8a + 5b - c), \\ y = \frac{1}{18}(-2a + b + 7c), \\ z = \frac{1}{18}(-4a - 7b + 5c). \end{cases}$$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

حل الجمل التالية باستعمال طريقة كرامر:

Solve the following systems using Cramer's method:

$$1)\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Solution - الحـــل

1) **لنتحقق أن الجملة، جملة كرامر بحساب محدد الجملة**

Let's check that the system is Cramer's system, calculates the determinant of the system

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

ومنه الجملة جملة كرامر حلولها من الشكل:

then, the system is Cramer's system, its solutions are of the form:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

2) **لنتحقق أن الجملة، جملة كرامر بحساب محدد الجملة**

Let's check that the system is Cramer's system, calculates the determinant of the system

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

ومنه الجملة جملة كرامر حلولها من الشكل:

then, the system is Cramer's system, its solutions are of the form:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

حل الجملة التالية باستعمال طريقة المصفوفة المعكوسة وما التفسير الهندسي للنتيجة التي تحصلة عليها؟

Solve the following system using the inverse matrix method, and what is the geometric explanation for the result that you get?

$$\begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

Solution - الحـــل

من شكل الجملة

of the system form

$$\begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

نجد:

we get

$$\det\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix} = 4 - m^2$$

ومنه:

tehn

$$4 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = 2 \vee m = -2$$

إذا كان $m = 2$ فإن المعادلة الثانية تصبح $0 = 12$. والجملة ليس لها حلول.

If $m = 2$ then the second equation becomes $0 = 12$, and the system has no solutions.

إذا كان $m = -2$ المعادلة الثانية تصبح $0 = 0$ وهنا الجملة تقبل عدد غير منته من الحلول أي

If $m = -2$, the second equation becomes $0 = 0$, and here the system accepts an infinite number of solutions, i.e.

$$x + my = -3 \Leftrightarrow x = -3 - my.$$

The set of solutions is: مجموعة الحلول هي:

$$\mathcal{S} = \{(-3 - my, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

إذا كان $m \neq 2 \vee m \neq -2$, نأخذ:

If $m \neq 2 \vee m \neq -2$, we take:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}$$

نقوم بحساب المصفوفة العكسية

We calculate the inverse matrix

$$M^{-1} = \frac{(M^*)^T}{\det(M)} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -m \\ -m & 1 \end{pmatrix}^T}{4 - m^2} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -m \\ -m & 1 \end{pmatrix}}{4 - m^2} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{m^2-4} & \dfrac{m}{m^2-4} \\ \dfrac{m}{m^2-4} & -\dfrac{1}{m^2-4} \end{pmatrix}$$

ومنه حلول الجملة تكون من الشكل

then the system solutions are of the form

$$X = M^{-1}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{m^2-4} & \frac{m}{m^2-4} \\ \frac{m}{m^2-4} & -\frac{1}{m^2-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{m-2} \\ -\frac{3}{m-2} \end{pmatrix}$$

i.e.: أي:

$$x = \frac{6}{m-2}, y = -\frac{3}{m-2}$$

هندسيا ، يمكننا استنتاج أن المستقيمين $x + my = -3$ و $mx + 4y = 6$ هم إما:

Geometrically, we can conclude that the two lines $x + my = -3$ and $mx + 4y = 6$ are either:

- متقاطعان في حالة $m \neq (2, -2)$.

They intersect in the case of $m \neq (2, -2)$.

- متوازيان تماما في حالة $m = 2$.

They are perfectly parallel if $m = 2$.

- ولا على التعيين في حالة $m = -2$.

Not on appointment in the case of $m = -2$.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

ناقش وفقا لقيمة الوسيط $a \in \mathbb{R}$ حلول الجملة:

Discuss according to the value of the intermediate $a \in \mathbb{R}$ solutions to the system:

$$\begin{cases} 3x & +y & -z & = & 1 \\ x & -2y & +2z & = & a \\ x & +y & -z & = & 1 \end{cases}$$

Solution - الحـــل

The determinant of the system is محدد الجملة هو:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

معدوم ما يدل عن وجود عدد غير منته من الحلول أو لا يوجد حل ومنه باستعمال التحويلات التالية، و أولها تغيير ترتيب المعادلات حيث نبادل بين الأولى والثالثة نجد:

is equals to zero. What indicates the existence of an infinite number of solutions or that there is no solution, and then, using the following transformations, the first of which is changing the order of the equations, as we exchange between the first and the third one, we find:

$$\begin{cases} 3x & +y & -z & = & 1 \\ x & -2y & +2z & = & a \\ x & +y & -z & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & 1 & L_1 \\ x & -2y & +2z & = & a & L_2 \\ 3x & +y & -z & = & 1 & L_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & 1 & L_1 \\ & -3y & +3z & = & a-1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & -2y & +2z & = & -2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y & -z & = & \frac{1-a}{3} \\ y & -z & = & 1 \end{cases}$$

لكي الجملة تقبل عدد غير منته من الحلول يجب أن تكون قيم a:

In order for the system to accept an infinite number of solutions, the values of a must be:

$$\frac{1-a}{3} = 1 \Longrightarrow a = -2.$$

That is, in the case of $a = -2$, we find: أي في حالة $a = -2$ نجد:

$$\Longrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & 1 \\ & y & -z & = & 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z \\ z = y - 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = y - 1 \end{cases}$$

then, the set of solutions are: ومنه مجموعة الحلول هي:

$$S = \{(0, y, y-1), y \in \mathbb{R}\}$$

If $a \neq -2$ then the system has no solution. إذا كان $a \neq -2$ فإن الجملة ليس لها حل.