السنة الدراسية: 2022/2023 — جامعة محمد خيضر بسكرة
التاريخ: 19/03/2023 — قسم علوم المادة
مقياس : رياضيات II

سلسلة الأعمال الموجهة رقم 3 (تقطير مصفوفة)

تمرين - Exercise 1 : ---

لتكن A مصفوفة من $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ المعرفة كمايلي :

Let A be a matrix of $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ defined as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) هل المصفوفة A قابلة للتقطير ؟

Is the matrix A diagonalizable?

2) أحسب $(A-2I_3)^2$ ثم $(A-2I_3)^n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$. إستنتج A^n.

Calculate $(A-2I_3)^2$ then $(A-2I_3)^n$ for each $n \in \mathbb{N}$. Deduce A^n.

تمرين - Exercise 2 : ---

لتكن المصفوفة

Let the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) أوجد كثير الحدود المميز للمصفوفة A.

Find the characteristic polynomial of the matrix A.

2) أثبت أن المصفوفة A قابلة للتقطير ثم أوجد المصفوفة D القطرية ومصفوفة العبور P العكوسة حيث $A = PDP^{-1}$.

Prove that the matrix A is diagonalizable and then find the diagonal matrix D and the invertible transit matrix P where $A = PDP^{-1}$.

3) أحسب A^n من أجل $n \in \mathbb{N}$.

Calculate A^n for $n \in \mathbb{N}$.

تمرين ـ Exercise 3 : ---

لتكن المصفوفة A :

Let the matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) أقطر المصفوفة A.

Diagonalize the matrix A.

2) عبر عن حلول الجملة التفاضلية $X' = AX$ في قاعدة الأشعة الذاتية وأرسم مساراتها.

Express the solutions of the differential system $X' = AX$ in the eigenvector rule and draw their paths.

تمرين ـ Exercise 4 : ---

لتكن المصفوفة A :

Let the matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1) حلل كثير الحدود المميز لـ A إلى جداء عوامل ثم أوجد القيم الذاتية للمصفوفة.

Factorize the characteristic polynomial of A and then find the eigenvalues of the matrix.

2) أوجد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية لـ A.

Find the sub-eigen-vectorial spaces of A.

3) هل المصفوفة A قابلة للتقطير؟

Is the matrix A diagonalizable?

تمرين ـ Exercise 5 : ---

نسمي مصفوفة $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ عشوائية إذا كانت معاملاتها أعداد حقيقية موجبة أو معدومة وإذا كان مجموع معاملات كل من أسطرها يساوي 1.

We call a matrix $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ random if its coefficients are positive or null real numbers and if the sum of the coefficients of each of its rows is 1.

1) أثبت أنه إذا كانت $\lambda \in \mathbb{C}$ قيمة ذاتية للمصفوفة A فإن $|\lambda| \leq 1$.

Prove that if $\lambda \in \mathbb{C}$ is an eigenvalue of A then $|\lambda| \leq 1$.

2) أثبت أن 1 قيمة ذاتية ثم أوجد الشعاع الذاتي المرافق له.

Prove that 1 is an eigenvalue and then find its eigenvector.

تمرين - Exercise 6 : --

اشرح بدون حساب سبب عدم إمكانية تقطير المصفوفة التالية : *Explain without calculating why the following matrix diagonalization is not possible:*

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

تمرين - Exercise 7 : --

ليكن m عدد حقيقي f تشاكل ذاتي على $\mathbb{R}^3$ ذو المصفوفة A المعطاة في الأساس القانوني كما يلي:

Let m be a real number and f endomorphism of $\mathbb{R}^3$ with matrix A given in canonical basis as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1) أوجد القيم الذاتية للتطبيق f ؟

Find the eigenvalues of f?

2) ماهي قيم m حتى يكون التطبيق الخطي قابل للتقطير ؟

What are the values of m for a linear application to be diagonalizable?

3) نفرض أن $m = 2$. أحسب A^k من أجل كل $k \in \mathbb{N}$.

Suppose that $m = 2$. Calculate A^k for each $k \in \mathbb{N}$.