الفصل الرابع

حساب التكاملات *Integrals calculus*

فهرس الفصل

1.4 الدالة الأصلية *Primitive functions*

1.1.4 : Definition - تعريف

ليكن $I=[a,b]$ مجال في $\mathbb{R}$ والتكن f دالة حيث :

Let $I=[a,b]$ is a non-empty open interval in $\mathbb{R}$ and let the function $f: I \to \mathbb{R}$.

نقول أن F دالة أصلية للدالة f على I حيث :

We call F a primitive function of f on I such that:

$$F: I \to \mathbb{R}$$

إذا تحقق ما يلي:

satisfying:

1- F قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح I.

F can be derived in the open interval I.

2-

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

1.1.4 : Theorem - نظرية

إذا كانت F دالة أصلية للدالة $f: I \to \mathbb{R}$ على I فإن F مستمرة على I.

If F is a primitive function of $f: I \to \mathbb{R}$ on I, then F is continuous on I.

2.1.4 : Theorem - نظرية

لتكن الدالة $f: I \to \mathbb{R}$ حيث f تقبل دالة أصلية على I

Let $f: I \to \mathbb{R}$ has a primitive function on I. Then :

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي

the set of primitive functions of f is:

$$\{F+c, c \in \mathbb{R}\},$$

حيث F دالة أصلية خاصة للدالة f.

where, F is a primitive function of f.

All primitive functions of f are obtained by shifting any primitive function of f by a constant.

نرمز بـ $\int f(t)dt$ للدالة الأصلية للدالة f ونكتب:

We denote by $\int f(t)dt$ the primitive function of f and we write:

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

1.1.4 التكامل المحدود Definite integral

هناك نوعان من التكاملات هما: التكاملات المحدودة والتكاملات غير المحدودة.

There are two types of integrals: definite integrals and indefinite integrals.

لتكن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ و المستمرة على المجال $[a,b]$ حيث $b \geq a$.

Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ the continues function on $[a,b]$ such that $b \geq a$.

يمكن تعريف التكامل بطريقة أخرى أكثر استعمالا في ايجاد قيم ثابتة للتكاملات من خلال النظرية التالية:

Integration can be defined in another way that is more used to find constant values for the integrals through following theorem:

3.1.4 : Theorem - نظرية

لتكن الدالة $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ المعرفة

Let $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ be the function defined as:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

هي دالة أصلية للدالة f يعني أن الدالة F قابلة للإشتقاق وتحقق :

a primitive function of f means that F derivable and satisfying :

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b].$$

2.1.4 : Definition - تعريف

نسمي التكامل المحدود للدالة f العدد الحقيقي الذي يعبر على المساحة المحصورة بمنحنى الدالة $f(x)$ من النقطة ذات الفاصلة $x = a$ إلى النقطة ذات الفاصلة $x = b$، الذي نرمز له بالرمز :

The definite integral of f is a number which represents the area under the curve $f(x)$ from $x = a$ to $x = b$ denoted by:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ حيث F هي الدالة الأصلية للدالة f و نكتب

The real number $F(b) - F(a)$ where F the primitive function of f and we write:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

1.1.4 : Example - مثال

Let's calculate the following integrals: لنحسب التكاملات التالية:

1− من أجل $f(x) = e^x$ لتكن $F(x) = e^x$ دالة أصلية لها، ومنه

For $f(x) = e^x$ let $F(x) = e^x$ be its primitive function, then

$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

2− من أجل $g(x) = x^2$ لتكن $G(x) = \frac{x^3}{3}$ دالة أصلية لها، ومنه

For $g(x) = x^2$ let $G(x) = \frac{x^3}{3}$ be its primitive function, then

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

−3

$$\int_a^x \cos t\, dt = \left[\sin t\right]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$$

دالة أصلية للدالة $\cos x$.

is a primitive function of $\cos x$.

−4 إذا كانت دالة فردية تكون دالتها الأصلية دالة زوجية (نبرهن لاحقا) ونستنتج أن :

If the function is odd, then its primitive function is be an even function (proved later).

We conclude that:

$$\int_{-a}^a f(t)\, dt = 0.$$

2.4 Properties of integrals خواص التكاملات

الخصائص الرئيسية الثلاثة لحساب التكامل هي علاقة شال، إيجابية و خطية التكاملات.

The three main properties to integral calculus are the relation Chasles, positivity and linearity of integral.

1.2.4 Chasles relation علاقة شال

1.2.4 : Proposition - قضيــة

لتكن $a < c < b$. إذا كان f دالة قابلة للتكامل على $[a, c]$ و $[c, b]$ ، عندها تكون f قابلة للتكامل على $[a, b]$.

Let $a < c < b$. *If* f *integrable on* $[a, c]$ *and* $[c, b]$ *then* f *integrable on* $[a, b]$.

and we have: **ولدينا:**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

We have the following proprieties, for $a = b$: **لدينا الخاصية التالية من أجل** $a = b$:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

and for $a < b$: — و من أجل $a < b$:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

2.2.4 : Example - مثال

We have: — لدينا:

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}\\ \int_3^1 x^2dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^1 = \frac{1}{3} - \frac{27}{3} = -\frac{26}{3}\end{aligned}$$

$$\int_1^3 x^2dx = -\int_3^1 x^2dx.$$

2.2.4 Positivity of integration إيجابية التكامل

2.2.4 : Proposition - قضية

ليكن $a \leq b$ عددين حقيقيين، f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a, b]$.

Let $a \leq b$ two real numbers, f and g two functions have a primitive functions on $[a, b]$.

If $f \leq g$ then: — إذا كان $f \leq g$ فإن

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

على وجه الخصوص ، يكون تكامل الدالة الموجبة إيجابيا:

In particular, the integral of a positive function is positive:

If $f \geq 0$ then: — إذا كانت $f \geq 0$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

3.2.4 Linearity of integration خطية التكامل

3.2.4 : Proposition - قضية

لتكن f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a,b]$

Let f and g two functions have a primitive on $[a,b]$

1– و منه $f+g$ دالة قابلة للتكامل و

then $f+g$ a function integrable and

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2– من أجل كل عدد حقيقي λ الدالة λf هي قابلة للتكامل و لدينا

For all real number λ the function λf is integrable and we have:

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

من خلال هاتين النقطتين الأوليتين لدينا خطية التكامل:

From these first two points we have the linearity of integration:

من أجل كل عدد حقيقي λ و μ لدينا:

For all real numbers λ and μ we have:

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

1.2.4 : Remark - ملاحظة

1) إذا كانت f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a,b]$ فإن في معظم الأحيان

If f and g are integrable functions on $[a,b]$ then most of the time we have:

$$\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

2) إذا كانت f دالة قابلة للتكامل على المجال $[a,b]$ فإن $|f|$ دالة قابلة للتكامل على المجال $[a,b]$ أيضا و لدينا:

If f is an integrable function on $[a,b]$ then $|f|$ is also an integrable function on $[a,b]$

and we have:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

3.2.4 : Example - مثال

We have: لدينا:

$$\int_0^1 \left(7x^2 - e^x\right) dx = 7\int_0^1 x^2\,dx \; - \int_0^1 e^x\,dx = 7\frac{1}{3} \; - \; (e-1) = \frac{10}{3} - e$$

Using the calculations we saw earlier, we find: باستخدام الحسابات التي رأيناها سابقا نجد:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

and و

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

4.2.4 : Example - مثال

Let ليكن

$$I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx$$

Let's prove that $I_n \to 0$ for $n \to +\infty$. لنثبت أن $I_n \to 0$ لما $n \to +\infty$.

$$|I_n| = \left|\int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx\right| \leq \int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\,dx \leq \int_1^n \frac{1}{1+x^n}\,dx \leq \int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx$$

It remains only for us to calculate this last integral يبقى فقط حساب هذا التكامل الأخير

$$\int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^n x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^n = \frac{n^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

لأن $0 \leftarrow n^{-n+1}$ و $0 \leftarrow \frac{1}{-n+1}$ لما $n \to +\infty$.

because $n^{-n+1} \to 0$ *and* $\frac{1}{-n+1} \to 0$ *for* $n \to +\infty$.

2.2.4 : Remark - ملاحظة

نلاحظ أنه حتى و لو كانت $f \cdot g$ قابلة للتكامل فإنه على العموم

We note that even if $f \cdot g$ *is an integrable function, in general we have:*

$$\int_a^b (fg)(x)dx \neq \Big(\int_a^b f(x)dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)dx\Big).$$

على سبيل المثال، لتكن الدالة f و g المعرفتين كمايلي:

For example, let the functions f *and* g *be defined as follows:*

$$f:[0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

and و

$$g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

و منه $f(x) \cdot g(x) = 0$ من أجل كل $x \in [0,1]$، إذن:

Hence $f(x) \cdot g(x) = 0$ *for each* $x \in [0,1]$, *then:*

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$$

although رغم أن

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \quad and \quad \int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

3.4 Primitive of usual functions تكامل بعض الدوال المألوفة

$\int e^x dx = e^x + c$ on على $\mathbb{R}$
$\int \cos x dx = \sin x + c$ on على $\mathbb{R}$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$ on على $\mathbb{R}$
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ، $(n \in \mathbb{N})$ on على $\mathbb{R}$
$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ ، $(\alpha \in \mathbb{R}_{\{-1\}})$ on على $]0, +\infty[$
$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$ on على $]0, +\infty[$ أو $]-\infty, 0[$
$\int shx\ dx = chx + c$، $\int chx\ dx = shx + c$ on على $\mathbb{R}$
$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$ on على $\mathbb{R}$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \dfrac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$ on على $]-1, 1[$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} Argsh\,(x) + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases}$ on على $\mathbb{R}$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} Argch\,(x) + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases}$ on على $x \in]1, +\infty[$

4.4 Integration methods طرق التكامل

يقوم حساب التكامل على إيجاد التابع الأصلي للدالة التي نريد القيام بمكاملتها. وقد عرض غوتفريد فيلهيلم لايبنتز، في 13 نوفمبر 1675، أول عملية تكامل لحساب المساحة. وقد أسس لايبنتز علم التفاضل والتكامل الرياضياتي بشكل مستقل عن إسحاق نيوتن كما أن رموزه الرياضياتية ما زالت تستخدم بشكل شائع منذ أن تم نشرها والتعريف بها. ويوجد عدة طرق للتكامل منها: التكامل بالتجزئة، التكامل بالتعويض، التكامل بتغيير المتغير، ...

Integration is based on finding the primitive function of the function we want to integrate. On November 13, 1675, Gottfried Wilhelm Leibniz demonstrated the first integral for calculating area. Leibniz established the mathematical calculus independently of Isaac Newton, and his mathematical symbols are still in common use since they were first published. There are several methods of integration, including: integration by parts, integration by substitution, integration by changing the variable, ...

1.4.4 التكامل بالتجزئة Integration per partes

4.4.4 : Theorem - نظرية

لتكن u و v دالتين من الفئة $\mathcal{C}^1$ المعرفتين على المجال $[a,b]$ فإن :

Let u and v two functions of the class $\mathcal{C}^1$ defined on $[a,b]$, then :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

صيغة التكامل بالتجزئة للدالة الأصلية هي نفسها ولكن بدون حدود:

The formula for the fractional integral for the primitive function is the same but without bounds:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = [uv] - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

5.4.4 : Example - مثال

لحساب التكامل

To calculate the integral

$$\int_0^1 xe^x\,dx$$

نضع $u(x) = x$ و $v'(x) = e^x$.

We put $u(x) = x$ and $v'(x) = e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x) = 1$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$

We know that the function $u'(x) = 1$ is the derivative of the function $u(x)$

و الدالة $v(x) = e^x$ هي الدالة الأصلية للدالة v'

and the function $v(x) = e^x$ is the primitive function of v'

و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

by using the integration by parts formula we find:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx \\
&= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx \\
&= (1\cdot e^1 - 0\cdot e^0) - [e^x]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

6.4.4 : Example - مثال

To calculate the integral لحساب التكامل

$$\int_1^e x\ln x\,dx.$$

نضع هذه المرة $u(x) = \ln x$ و $v'(x) =$.

This time we put $u(x) = \ln x$ and $v'(x) = a$.

و منه الدالة $u' = \dfrac{1}{x}$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$ و الدالة $v = \frac{x^2}{2}$ هي الدالة الأصلية للدالة v'

The function $u' = \dfrac{1}{x}$ is the derivative of $u(x)$ and the function $v = \frac{x^2}{2}$ is the primitive of v'.

و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

by using the integration by parts formula we find:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x\cdot x\,dx = \int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v &= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,dx \\
&= \left(\ln e\frac{e^2}{2} - \ln 1\frac{1^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.
\end{aligned}$$

7.4.4 : Example - مثال

To calculate the integral لحساب التكامل

$$\int \arcsin x\,dx$$

لإيجاد دالة أصلية للدالة $\arcsin(x)$

to finds a primitive function of the $\arcsin(x)$ *function*

نجعلها من شكل جداء حيث نضع $u(x) = \arcsin(x)$ و $v'(x) = 1$،

we make it in the form of a product, we put $u(x) = \arcsin(x)$ *and* $v'(x) = 1$,

حيث لدينا $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ و $v(x) = x$،

where we have $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *and* $v(x) = x$,

ثم نطبق صيغة التكامل بالتجزئة فنجد

then we use the integration by parts formula we find:

$$\begin{aligned}\int 1\cdot\arcsin(x)dx &= [x\arcsin(x)] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= [x\arcsin(x)] - \left[-\sqrt{1-x^2}\right] \\ &= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c.\end{aligned}$$

8.4.4 : Example - مثال

To calculate the integral 　　　　 حساب التكامل

$$\int x^2 e^x dx.$$

نضع $u(x) = x^2$ و $v'(x) = e^x$.

we put $u(x) = x^2$ *and* $v'(x) = e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x) = 2x$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$

We know that the function $u'(x) = 2x$ *is the derivative of* $u(x)$

و الدالة $v(x) = e^x$ هي الدالة الأصلية للدالة $v'(x)$

and $v(x) = e^x$ *is the primitive function of* $v'(x)$

و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

and by using the integration by parts formula we find:

$$\int x^2 e^x\,dx = \left[x^2 e^x\right] - 2\int x e^x\,dx$$

نعيد التكامل بالتجزئة للمرة الثانية على الجزء الثاني من المساواة السابقة نجد:

Re-integrating by parts for the second time on the second part of the previous equations, *we find:*

$$\int xe^x\,dx = [xe^x] - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + c,$$

في الأخير نجد *Finally we find*

$$\int x^2e^x\,dx = (x^2-2x+2)e^x + c.$$

2.4.4 التكامل بتغيير المتغير Change of variables

5.4.4 : Theorem - نظرية

لتكن f دالة معرفة على المجال $I=[a,b]$ و ليكن التطبيق $\varphi : J \to I$ من الفئة $\mathcal{C}^1$.

Let f be a function defined on $I=[a,b]$ and let the mapping $\varphi : J \to I$ be in class $\mathcal{C}^1$.

من أجل كل $a,b \in J$ لدينا: *for all $a,b \in J$ we have:*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f فإن $F\circ\varphi$ هي الدالة الأصلية للدالة $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

if F is a primitive function of f then $F\circ\varphi$ is the primitive function of $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

بصفة أخرى *in another way*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)\circ\varphi = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

أي أن الدالة الأصلية للدالة $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ تنتج من تركيب كل من الدالة f و φ.

that is, the primitive function $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ results from the combination of f and φ.

العبارة $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ تمثل فعلا تغيير للمتغير،

the statement $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ is actually a change of the variable,

أو بصيغة مبسطة نضع or in a simplified form we put

$$x = \varphi(t)$$

ومنه نجد بعدها بالإشتقاق after derivation, we find

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$$

i.e. أي

$$dx = \varphi'(t)\ dt$$

what it gives us: ما يعطينا :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

9.4.4 : Example - مثال

Calculate the integral حساب التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx$$

by placing بوضع

$$\sin(x) = t \Longrightarrow \sin(x)' = \cos(x) = dt$$

ومنه نتغير حدود التكامل من x الى t كما يلي

Hence, the bounds of integration change from x to t as follows

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow t = \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

from it we find ومنه نجد

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx &= \int_0^1 t^2 dt \\ &= \left.\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$