Rappel sur la théorie des probabilités

Analyse combinatoire

RAHMANI Naceur

Département de Mathématiques

2023

Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets. Elle fournit des méthodes de dénombrements particulièrement utile en théorie des probabilités.

Notion d'ensemble

Definition

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments.

Ensemble des résultats possibles d'un lancé de dé: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- F est une partie (ou est inclus, ou est un sous-ensemble) de E si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E. Cela se note $F \subset E$.

Notion d'ensemble

Definition

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments.

Ensemble des résultats possibles d'un lancé de dé: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- F est une partie (ou est inclus, ou est un sous-ensemble) de E si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E. Cela se note $F \subset E$.
- On note $\emptyset$ l'ensemble vide: l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Analyse combinatoire

Problématique

Problem

On souhaite répondre à la question suivante: combien y a-t-il de façons de construire un ensemble de p éléments pris dans un ensemble de n éléments. Ce nombre est différent selon que l'on autorise ou non les répétitions (prendre plusieurs fois le même élément) et que l'on tienne compte ou pas de l'ordre des éléments.Il y a quatre possibilités classiques et un cas particulier.

Analyse combinatoire

Introduction

L'analyse combinatoire a pour but de compter les dispositions qui peuvent être formées à partir des éléments d'un ensemble fini d'objets. Un objet est caractérisé par:

1. la place qu'il occupe dans la disposition;

Analyse combinatoire
Introduction

L'analyse combinatoire a pour but de compter les dispositions qui peuvent être formées à partir des éléments d'un ensemble fini d'objets. Un objet est caractérisé par:

1. la place qu'il occupe dans la disposition;
2. le nombre de fois où il peut apparaître.

Analyse combinatoire

Introduction

- **Notion de répétition:** Si un élément apparaît plus d'une fois dans une disposition, on dit que la disposition est avec répétition; sinon, la disposition est dite sans répétition.
- **Notion d'ordre:** Une disposition est dite ordonnée, si lorsqu'à chaque fois qu'un élément change de place (ou de position) la disposition change.

Analyse combinatoire

Exemple

On considère un ensemble E ayant trois éléments $E = \{a; b; c\}$. Choisir deux éléments dans cet ensemble peut se faire de plusieurs façons différentes.

- Le tableau suivant, nous donne tous les cas possibles:

disposition	avec répétition	sans répétition
avec ordre	$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$	ab, ac, ba, bc, ca, cb
sans ordre	aa, ab, ac, bb, bc, cc	ab, ac, bc

Arrangements

- Etant donné un ensemble E de n objets, un arrangement de p de ces objets est une suite ordonnée de p objets pris parmi ces n objets.

Arrangements

- Etant donné un ensemble E de n objets, un arrangement de p de ces objets est une suite ordonnée de p objets pris parmi ces n objets.
- On distingue deux types d'arrangements: avec et sans répétition.

Arrangements

Arrangement sans répétition (tirages sans remise et avec ordre)

On appelle arrangement sans répétition de n objets p à p, toute disposition ordonnée de p objets choisis parmi les n objets sans répétitions.

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1)$$

avec $1 \leq p \leq n$

Arrangements

Arrangement sans répétition (tirages sans remise et avec ordre)

Example

Combien de mots de trois lettres ne contenant pas plus d'une fois la même lettre peut-on former avec les lettres de l'alphabet ?

$$A_{26}^{3} = \frac{26!}{(26-3)!} = 26 \times 25 \times 24 = 15600 \ mots$$

Arrangements

Arrangement avec répétition (tirages avec remise et avec ordre)

- On appelle arrangement avec répétition de n objets p à p, toute disposition ordonnée de p objets choisis parmi les n objets avec répétitions.

Arrangements

Arrangement avec répétition (tirages avec remise et avec ordre)

- On appelle arrangement avec répétition de n objets p à p, toute disposition ordonnée de p objets choisis parmi les n objets avec répétitions.
- Le nombre d'arrangements avec répétition est :

$$n^p = \underbrace{n \times n \times n \times ... \times n}_{p \ fois}$$

avec $1 \leq p \leq n$

Arrangements

Arrangement avec répétition (tirages avec remise et avec ordre)

Example (01)

Si $E = \{a, b, c, d, e\}$, alors il y a $5^3 = 5 * 5 * 5 = 125$ mots de 3 lettres.

Example (02)

Combien de mots de deux lettres peut-on former avec les lettres de l'alphabet?

$$26^2 = 26 \times 26 = 676 mots$$

Permutations

Permutation sans répétition

- Étant donné un ensemble E de n objets. On appelle permutation de n objets distincts toute suite ordonnée de n objets ou tout arrangement n à n de ces objets.

Permutations

Permutation sans répétition

- Étant donné un ensemble E de n objets. On appelle permutation de n objets distincts toute suite ordonnée de n objets ou tout arrangement n à n de ces objets.
- Permutation sans répétition: C'est le cas particulier de l'arrangement sans répétition de p objets parmi n objets, lorsque $p = n$.

Permutations

Permutation sans répétition

- Étant donné un ensemble E de n objets. On appelle permutation de n objets distincts toute suite ordonnée de n objets ou tout arrangement n à n de ces objets.
- Permutation sans répétition: C'est le cas particulier de l'arrangement sans répétition de p objets parmi n objets, lorsque $p = n$.
- Le nombre de permutations de n objets est:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Permutations

Permutation sans répétition

Example

Le nombre de manières de placer huit convives (invités) autour d'une table est $P_8 = 8!$

Permutations

Permutation avec répétition

- Dans le cas où il existe k objets identiques parmi les n objets, alors

$$P_n = \frac{n!}{k!}$$

Example

- Le nombre de mots possibles (avec ou sans signification) que l'on peut formé en permutant les 8 lettres du mot "Quantité", est $P_8 = \frac{8!}{2!} = 20160$ mots; car on a le "t" 2 fois.
- Et en considérant le mot "Natation", le nombre de mots possibles est $P_8 = \frac{8!}{2!2!2!} = 5040$ mots car on a le "n" 2 fois, le "a" 2 fois et le "t" 2 fois:

Combinaisons

Combinaison sans répétitions (sans remises)

- Etant donné un ensemble E de n objets. On appelle combinaisons de p objets tout ensemble de p objets pris parmi les n objets sans remise.

Combinaisons

Combinaison sans répétitions (sans remises)

- Etant donné un ensemble E de n objets. On appelle combinaisons de p objets tout ensemble de p objets pris parmi les n objets sans remise.
- Le nombre de combinaisons de p objets parmi n et sans remise, est:

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

avec $1 \leq p \leq n$

Combinaisons

Combinaison sans répétitions (sans remises)

Example (1)

Le tirage au hasard de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes (main de poker) est une combinaison avec $p = 5$ et $n = 32$. Le nombre de tirages possibles est: $C_{32}^{5} = \dfrac{32!}{(32-5)!5!} = 409696$

Example (2)

La formation d'une délégation de 2 étudiants parmi un groupe de 20 constitue une combinaison avec $p = 2$ et $n = 20$. Le nombre de délégations possibles est: $C_{20}^{2} = \dfrac{20!}{(20-2)!2!} = 190$

Example (3)

Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen.De combien de manières peut-il répondre?

Combinaisons

Combinaison avec répétitions (avec remises)

Le nombre de combinaisons de p objets parmi n et avec remise, est:

$$C_{n+p-1}^{p}=\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}$$

Example

:Soit $E=\{1;2;3;4;5;6\}$.-Combien de couples distincts peut-on créer ? Les couples $(1;2)$ et $(2;1)$ sont identiques.

Example

Soit la constitution de mots de 3 lettres à partir d'un alphabet à 5 lettres avec remise. Le nombre de mots est:

$$C_{5+3-1}^{3}=C_{7}^{3}=\frac{7!}{4!3!}=35$$

Analyse combinatoire
Résumé

Disposition	avec répétition	sans répétition
avec ordre (ordonnée)	n^p	A_n^p
sans ordre (non ordonnée)	$C_{n+p-1}^p = \binom{n+p-1}{p}$	$C_n^p = \binom{n}{p}$