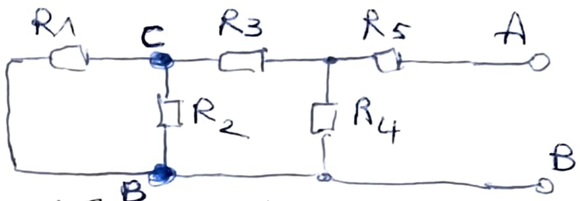
حل السلسلة رقم 1

Exercice N°1

حساب المقاومة المكافئة لثنائي قطب بين النقطتين A و B.

قبل حساب المقاومة يجب أن نتأكد بأنه لا وجود لمولدات جهد أو تيار مستقلة



عند حساب المقاومة المكافئة نبحث أولا عن وجود مقاومات على التسلسل أو مقاومات على التوازي (التفرع).

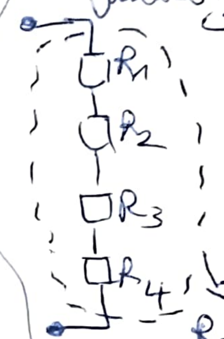
- نقول أن مقاومات هي على التسلسل إذا كانت تنتمي إلى نفس الفرع أي ليس بينها أي عقدة (نفس التيار).

في هذا التمرين لا توجد أي مقاومات على التسلسل.

- نقول أن مقاومات هي على التفرع إذا كانت محصورة بين عقدتين ولها نفس الجهد

تذكير

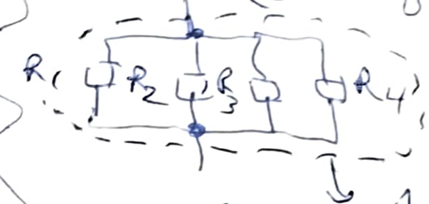
على التسلسل



$R_{eq} = \sum R_i$

$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$

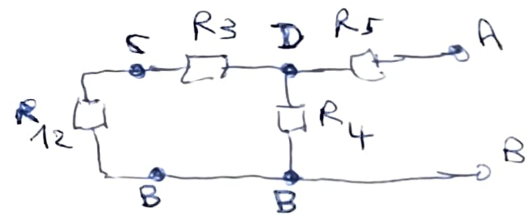
على التفرع



$$R_{eq} = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_i}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

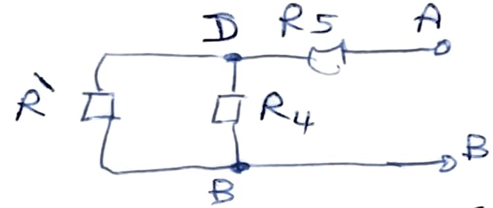
إذا في التمرين نلاحظ أولا أن R_1 و R_2 على التفرع لأنهما محصورتين بين العقدة C والعقدة B أي لهما نفس الجهد.

$$R_{12} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$



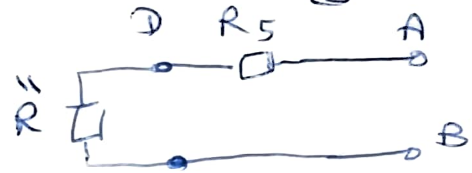
نلاحظ الآن أن R_3 و R_{12} على التسلسل وتنتميان إلى الفرع DCB أي يمر بهما نفس التيار.

$$R' = R_{12} + R_3$$



مرة أخرى نلاحظ أن R_4 و R' هما على التفرع.

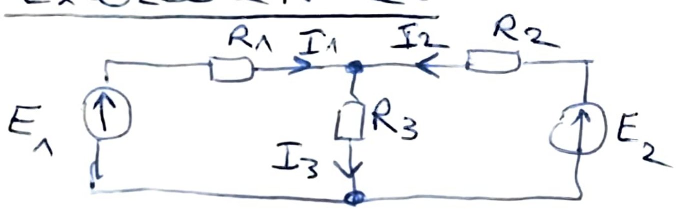
$$R'' = \frac{1}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{R_4}}$$



وفي الأخير لدينا R_5 و R'' على التسلسل.

$$R_{AB} = R_5 + R''$$

Exercice N°2 :



المطلوب حساب التيارات I_1 ، I_2 ، I_3 باستعمال قوانين كيرشوف

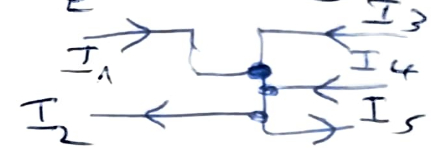
تذكير

قوانين كيرشوف

قانون العقد

مجموع التيارات الداخلة إلى عقدة يساوي مجموع التيارات الخارجة من نفس العقدة

$$\sum I_E = \sum I_S$$

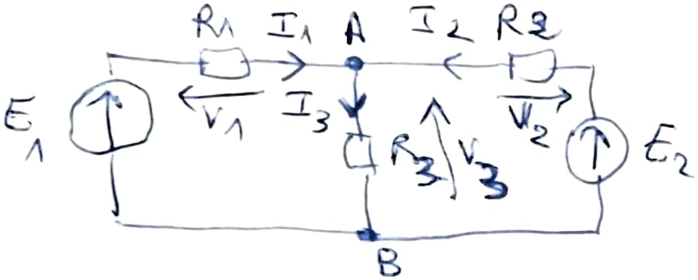


$$I_1 + I_3 + I_4 = I_2 + I_5$$

قانون العروات:

مجموع الجهود في عروة معينة (دارة مغلقة) انطلاقا من نقطة معينة ورجوعا إلى نفس النقطة يساوي الصفر $\sum V_i = 0$ مع الأخذ بعين الاعتبار الاتجاه. فالجهود (التوترات) التي مع الاتجاه تكون موجبة والتي عكس الاتجاه المفترض تكون سالبة

نطبق الآن على التمرين.



أولا قانون العقد:

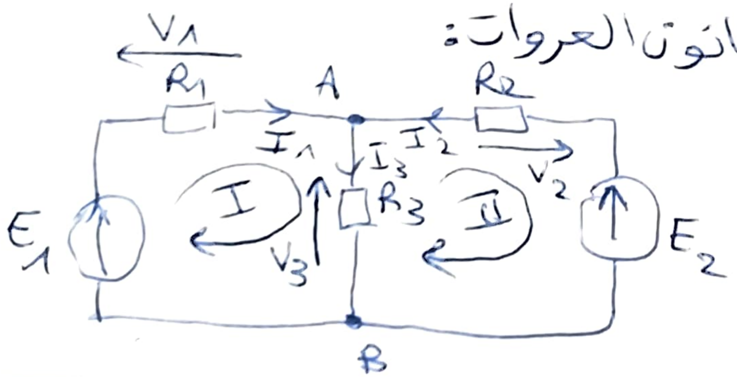
النقطة A هي عقدة لأنها نقطة تلاقي ثلاثة فروع وهي الفرع القادم من R_1 و الفرع القادم من R_2 والفرع القادم من R_3.

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad \text{——} \quad (1)$$

التيارات الداخلة — التيارات الخارجة

النقطة B هي أيضا عقدة ولكن ستعطينا نفس المعادلة (1).

ثانيا قانون العروات:



$$\sum V_i = 0$$

لدينا عروتين مستقلتين I و II.
وعروة ثالثة مكونة من I و II.

العروة I:

الاتجاه المفترض الموجب هو مع عقارب الساعة. أي أن كل جهد مع هذا الاتجاه فهو موجب وأي جهد عكس هذا الاتجاه فهو سالب.

$$E_1 - V_1 - V_3 = 0$$

$$\Rightarrow E_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0 \quad \text{——} \quad (2)$$

العروة II: بنفس الطريقة نجد

$$-E_2 + R_3 I_3 + R_2 I_2 = 0 \quad \text{——} \quad (3)$$

لدينا جملة ثلاث معادلات (1)، (2)، (3) يمكن حلها رياضيا بعدة طرق.

- بالنسبة لمن يريد الحل يدويا فيمكن استعمال طريقة التعويض كما يلي:

$I_3 = I_1 + I_2$ —— (1)

نعوض (1) في (2) :

$$E_1 - R_1 I_1 - R_3 (I_1 + I_2) = 0$$

$$\Rightarrow -(R_1 + R_3) I_1 - R_3 I_2 + E_1 = 0 \quad \text{—— (4)}$$

نعوض (1) في (3) :

$$-E_2 + R_3 (I_1 + I_2) + R_2 I_2 = 0$$

$$R_3 I_1 + (R_2 + R_3) I_2 - E_2 = 0 \quad \text{—— (5)}$$

الآن لدينا جملة معادلتين (4) و (5)

$$(4) \Rightarrow I_2 = \frac{E_1 - (R_1 + R_3) I_1}{R_3} \quad \text{—— (6)}$$

نعوض (6) في (5) :

$$R_3 I_1 + (R_2 + R_3) \left[\frac{E_1 - (R_1 + R_3) I_1}{R_3} \right] - E_2 = 0$$

$$\left(R_3 - \frac{(R_2 + R_3)(R_1 + R_3)}{R_3} \right) I_1 = E_2 - \frac{R_2 + R_3}{R_3} E_1$$

$$\left[\frac{R_3^2 - R_1 R_2 - R_2 R_3 - R_1 R_3 - R_3^2}{R_3} \right] I_1 = \frac{R_3 E_2 - (R_2 + R_3) E_1}{R_3}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{(R_2 + R_3) E_1 - R_3 E_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}} \quad (a)$$

(a) $\longrightarrow$ (6) :

$$I_2 = \frac{E_1 - \frac{[(R_2 + R_3) E_1 - R_3 E_2]}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \cdot (R_1 + R_3)}{R_3}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{-R_3 E_1 + (R_1 + R_3) E_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}} \quad (b)$$

بتعويض (a) و (b) في (1) :

$$\boxed{I_3 = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}} \quad (c)$$

• أما من يريد حل المعادلات (1)، (2) و (3) بالبرمجة مثلا باستعمال ماطلاب فهو كما يلي :

نعيد كتابة المعادلات ①، ②، ③ كما يلي :

$$① \Rightarrow I_1 + I_2 - I_3 = 0 \rightarrow (I)$$

$$② \Rightarrow -R_1 I_1 + 0 \cdot I_2 - R_3 I_3 = -E_1 \rightarrow (II)$$

$$③ \Rightarrow 0 \cdot I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 \rightarrow (III)$$

نكتب المعادلات (I)، (II)، (III) على الشكل :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -R_1 & 0 & -R_3 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}}_{B}$$

A هي مصفوفة 3×3

X هو شعاع 3×1

B هو شعاع 3×1

لدينا إذن : $AX = B$

$$\Rightarrow A^{-1} A X = A^{-1} B$$

$$\Rightarrow \boxed{X = A^{-1} B}$$

الآن يمكننا كتابة الحل عن ماطلاب كما يلي :

```
clear; clc;
R1 = 1e3;
R2 = 1e3;
R3 = 1e3;
E1 = 6; E2 = 12;
A = [1    1    1
    -R1   0   -R3
     0    R2   R3];
B = [0; -E1; E2];
X = inv(A)*B;
```

النتيجة :

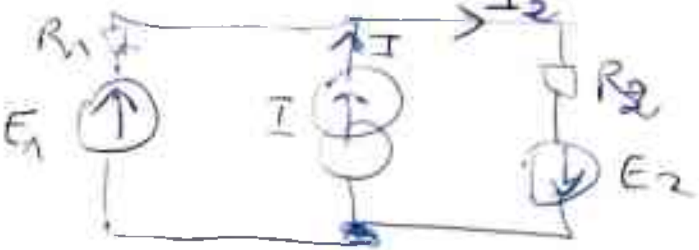
$I_1 = X(1) = 0 \text{ mA}$

$I_2 = X(2) = 6 \text{ mA}$

$I_3 = X(3) = 6 \text{ mA}$

Exercice 3 :

باستعمال نظرية التراكب (المطابقة) superposition من أجل حساب I_2 .



المطلوب هو التيار I_2 .
هذا التيار ناتج من كل المولدات الموجودة في الدارة . بالتالي حسب هذه النظرية :

$I_2 = \underset{(-)}{+} I_2$ (الناتج من E_1 فقط)

$\underset{(-)}{+} I_2$ (الناتج من I فقط)

$\underset{(-)}{+} I_2$ (الناتج من E_2 فقط)

$$I_{21} = I_2 \left(E_1 \neq 0 , E_2 = 0 , I = 0\right)$$

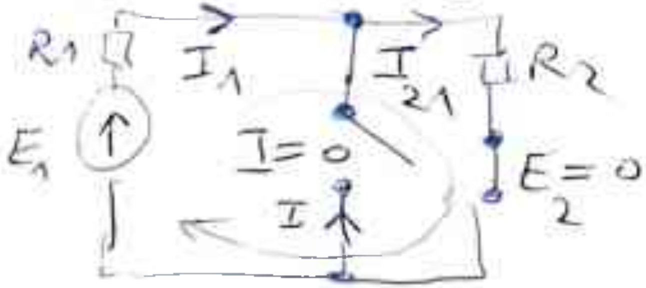
$$I_{22} = I_2 \left(E_1 = 0 , E_2 = 0 , I \neq 0\right)$$

$$I_{23} = I_2 \left(E_1 = 0 , E_2 \neq 0 , I = 0\right)$$

$$I_2 = \underset{(-)}{+} I_{21} \underset{(-)}{+} I_{22} \underset{(-)}{+} I_{23}$$

تحديد الاشارة (+ أو -) يكون حسب الاتجاه المختار .
إذا كان مثلا I_{21} بنفس اتجاه I_2 إذا ~~الا~~ فالاشارة هي +
أما إذا كان العكس تكون − .
في هذا التمرين اخترنا أن يكون I_{21} و I_{22} في نفس اتجاه I_2 بينما I_{23} عكس I_2 .

* حساب I_{21} (بوجود E_1 فقط) :



هنا اخترنا I_{21} بنفس اتجاه I_2 .

$$I_1 + I = I_{21} \quad , \quad I = 0$$

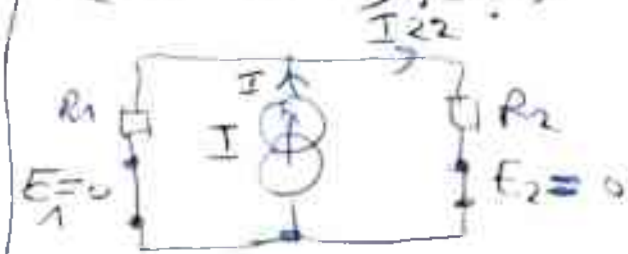
$$I_1 = I_{21}$$

بتطبيق قانون العروات :

$$E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_{21} = 0 \quad , \quad I_1 = I_{21}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{21} = \frac{E_1}{R_1 + R_2}}$$

* حساب I_{22} (بوجود I فقط)



هنا أيضا اخترنا اتجاه I_{22} بنفس اتجاه I_2 .

يمكن حساب I_{22} بعدة طرق .

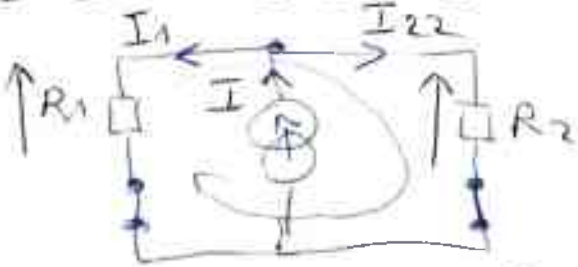
- باستعمال قاسم التيار والذي يطبق فقط في حالة وجود مقاومات على التفرع .

$$\underbrace{I_{22}}_{\text{الجزئي}} = + \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \cdot \underbrace{I}_{\text{الكلي}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

الاشارة هنا تكون + اذا التيارين الجزئي والكلي أحدهما داخل والآخر خارج .

أما اذا كان التيارات داخلان معا أو خارجان معا من العقدة فنضع الاشارة − .

- باستعمال قوانين كيرشوف:



$I = I_1 + I_{22}$ — (1)

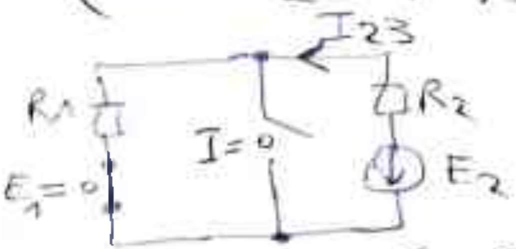
$R_1 I_1 - R_2 I_{22} = 0$ — (2)

(1) $\Rightarrow I_1 = I - I_{22}$ — (3)

(3) $\longrightarrow$ (2) : $R_1 (I - I_{22}) - R_2 I_{22} = 0$

$\Rightarrow I_{22} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$

* حساب I_{23} (بوجود E_2 فقط)



هنا اخترنا I_{22} عكس اتجاه I_2 .

بعد الحساب نجد :

$I_{23} = \frac{E_2}{R_1 + R_2}$

الآن لدينا I_{21} مع اتجاه I_2

I_{22} مع اتجاه I_2

I_{23} عكس اتجاه I_2

بالتالي :

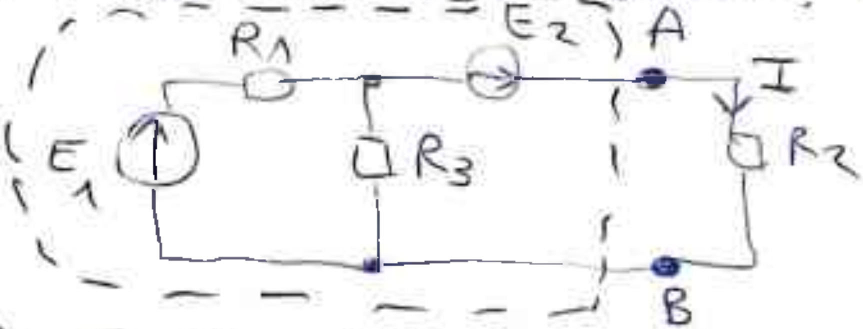
$I_2 = +I_{21} + I_{22} - I_{23}$

$I_2 = \frac{E_1}{R_1+R_2} + \frac{R_1}{R_1+R_2} I + \frac{E_2}{R_1+R_2}$

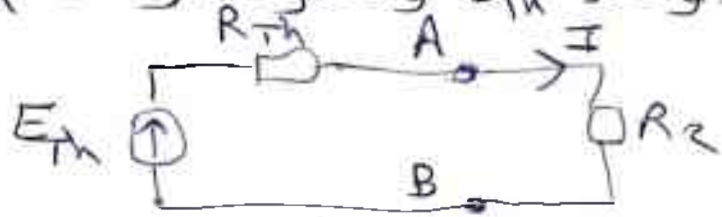
$\Rightarrow I_2 = \frac{E_1 + E_2 + R_1 I}{R_1 + R_2}$

Exercice 4 :

المطلوب حساب التيار I المار بالمقاومة R_2 باستعمال نظرية Thévenin.



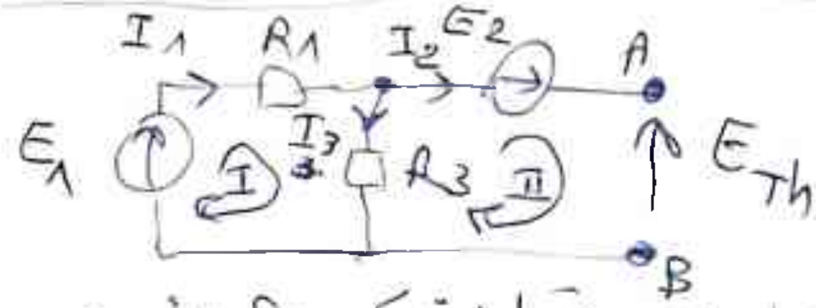
حسب Thévenin فإنه يمكن تعويض ثنائي قطب يحوي مقاومات ومولدات بمولد واحد E_{Th} ومقاومة واحدة R_{Th}.



حساب E_{Th} و R_{Th}

• $E_{Th} = ?$

مولد Thévenin هو التوتر بين A و B بعد فصل الجزء غير المعني وهو R_2 في هذه الحالة.



بتطبيق قوانين كيرشوف :

$I_1 = I_2 + I_3$

لدينا $I_2 = 0$ لأن الفرع مفتوح.

$\Rightarrow I_1 = I_3$ —— (1)

العروة (I) : $E_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$

$\Rightarrow I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_3}$; $I_1 = I_3$

العروة (II) :

$R_3 I_3 + E_2 - E_{Th} = 0$

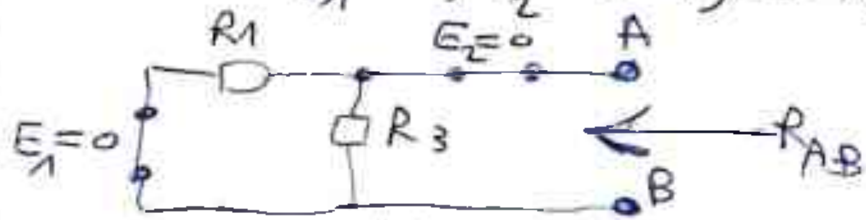
$\Rightarrow E_{Th} = R_3 I_1 + E_2$; $I_1 = I_3$

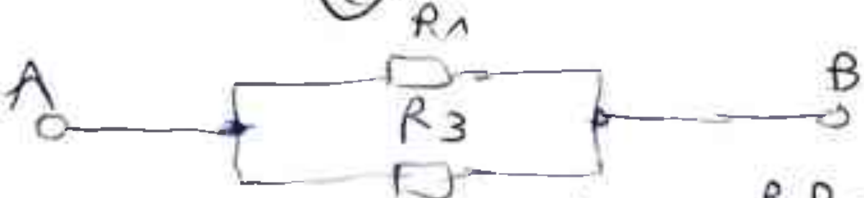
$\Rightarrow E_{Th} = R_3 \left(\frac{E_1}{R_1 + R_3}\right) + E_2$

$\Rightarrow \boxed{E_{Th} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \cdot E_1 + E_2}$

• $R_{Th} = ?$

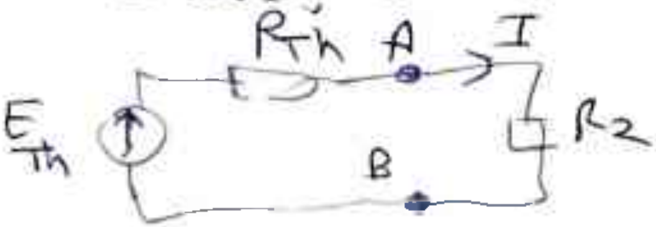
مقاومة Thévenin هي المقاومة بين A و B وذلك أولا بفصل R_2 ثم بإلغاء كل المولدات المستقلة في الدارة: $E_1 = 0, E_2 = 0$:





$$R_{Th} = R_1 // R_3 = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}} = \frac{R_1 R_3}{R_1+R_3}$$

نرجع الآن إلى الدارة بوجود R_2:



بتطبيق قانون العروات:

$$E_{Th} - R_{Th} I - R_2 I = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{E_{Th}}{R_{Th}+R_2}}$$

التطبيق العددي:

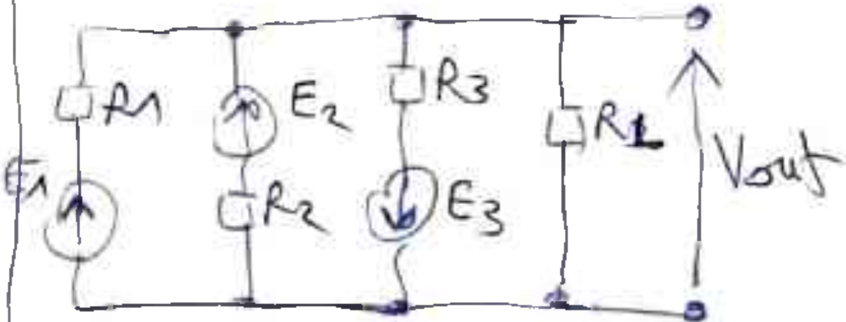
$E_1 = 18V$, $E_2 = 9V$, $R_1 = R_2 = 100\,\Omega$
$R_3 = 220\,\Omega$.

إذن بالتعويض نجد:

$E_{Th} = 21,37\ V$
$R_{Th} = 68,75\ \Omega$
$I = 0,1267\,A = 126,7\ mA$

Exercice 5:

حساب V_{out} بتطبيق نظرية Millman



مراحل تطبيق نظرية Millman
يجب أن نتأكد أن لدينا عدة فروع على التفرع وأن كل فرع يحوي مقاومة أو مقاومة ومولد توتر وأن V_{out} غير موصول بدارة أخرى.

$$V_{out} = \frac{+\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3} + \frac{0}{R_L}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_L}}$$

إختيار ~~الاتجاهات~~ الاشارات من البسط يكون بمقاومة اتجاه V_{out} مع كل مولد.

Exercice 6:

حساب V_{AB} باستعمال عدة نظريات.

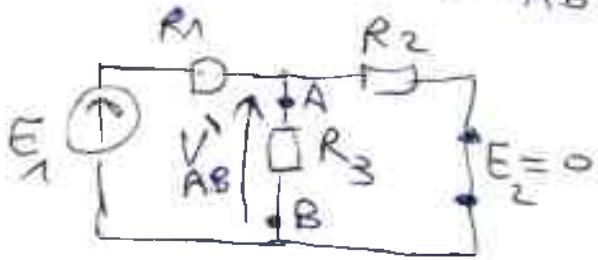
(1) باستعمال المطابقة أو التراكب (superposition)

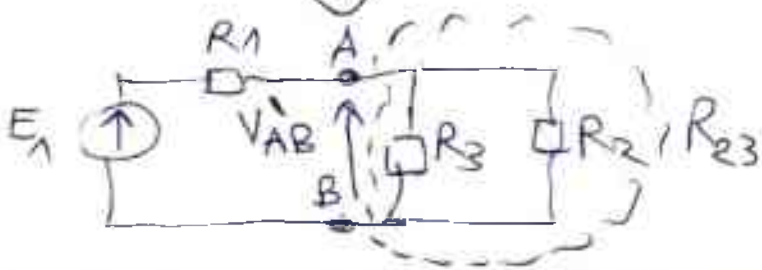
هذه النظرية تعتمد على ترك مولد واحد فقط في كل مرة ونحسب عندئذ المقدار المطلوب وفي الأخير نجمع كل النتائج مع مراعاة الاتجاه.

$$V_{AB} = V_{AB}(E_1 \neq 0 \text{ et } E_2 = 0) - V_{AB}(E_1 = 0 \text{ et } E_2 \neq 0)$$

$$V'_{AB} = V_{AB}(E_1 \neq 0 \text{ et } E_2 = 0)$$
$$V''_{AB} = V_{AB}(E_1 = 0 \text{ et } E_2 \neq 0)$$

حساب V'_{AB} :





R_{23} هي المقاومة المكافئة لـ R_2 و R_3

على التفرع : $R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$

نلاحظ أن R_{23} هي مع التسلسل مع R_1

إذن يمكن تطبيق قاسم التوتر :

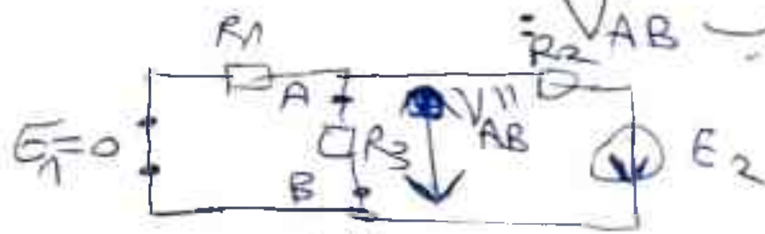
$$V'_{AB} = \frac{R_{23}}{R_{23} + R_1} \cdot E_1$$

نلاحظ أيضا أن V'_{AB}

له نفس اتجاه V_{AB}

(إختيار تلقائي)

حساب V''_{AB} :



$R_{13} = R_1 // R_3$

$$V''_{AB} = \frac{R_{13}}{R_{13} + R_2} \cdot E_2$$

نلاحظ أن V''_{AB} عكس اتجاه V_{AB}

ومنه : $V_{AB} = +V'_{AB} - V''_{AB}$

لأننا اخترنا V'_{AB} مع اتجاه V_{AB}

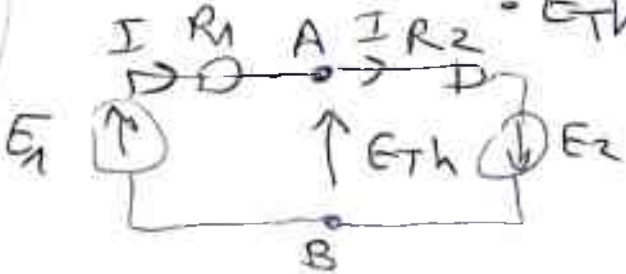
واخترنا V''_{AB} عكس اتجاه V_{AB}

$$\Rightarrow V_{AB} = \frac{R_{23}}{R_{23}+R_1} E_1 - \frac{R_{13}}{R_{13}+R_2} \cdot E_2$$

ج) حساب V_{AB} باستعمال Thévenin :

يجب أولا فصل الجزء غير المعني وهو في هذه الحالة R_3 حسب التمرين.

• حساب E_{Th} :



نستعمل هنا Millman لأنها الأسهل :

$$E_{Th} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

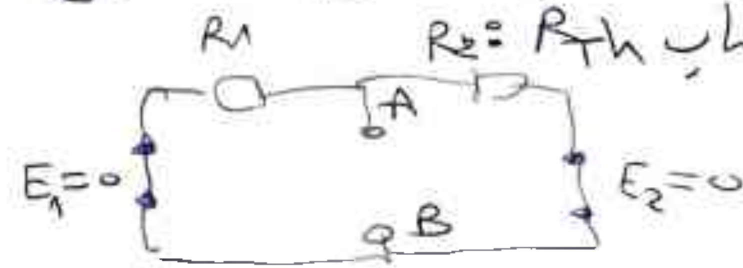
كما يمكن استعمال قانون كيرشوف

$E_1 - R_1 I - E_{Th} = 0$ —— (1)

$E_{Th} - R_2 I + E_2 = 0$ —— (2)

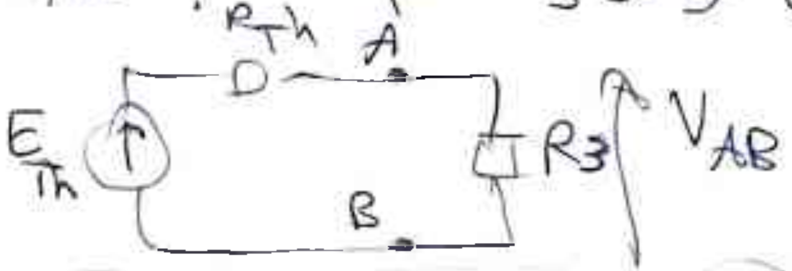
لدينا جملة معادلتين . بعد الحل نجد نفس النتيجة السابقة.

• حساب R_{Th} :



$R_{Th} = R_1 // R_2$

الآن نوصل R_3 ثم نحسب V_{AB}



$$\boxed{V_{AB} = \frac{R_3}{R_{Th}+R_3} \cdot E_{Th}}$$

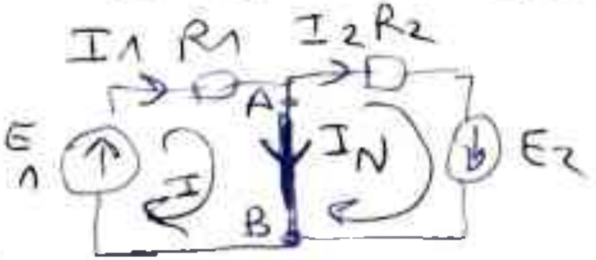
③ حساب V_{AB} باستعمال NORTON

مولد NORTON هو مولد تيار مع مقاومة R_N على التفرع.

• حساب R_N : $R_N = R_{Th}$

• حساب I_N :

I_N هو التيار قصر الدارة بين A و B



العقدة A : $I_1 = I_N + I_2$

$\Rightarrow I_N = I_1 - I_2$ — (1)

العروة (I) :

$E_1 - R_1 I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1}{R_1}$ — (2)

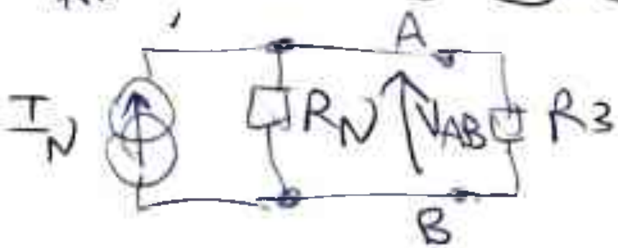
العروة (II) :

$E_2 - R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{E_2}{R_2}$ — (3)

(2) et (3) $\longrightarrow$ (1) :

$$\boxed{I_N = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}}$$

الآن نوصل R_3 لحساب V_{AB}



$$V_{AB} = (R_N // R_3)\, I_N$$

$$R_N = R_{Th} = R_1 // R_2$$