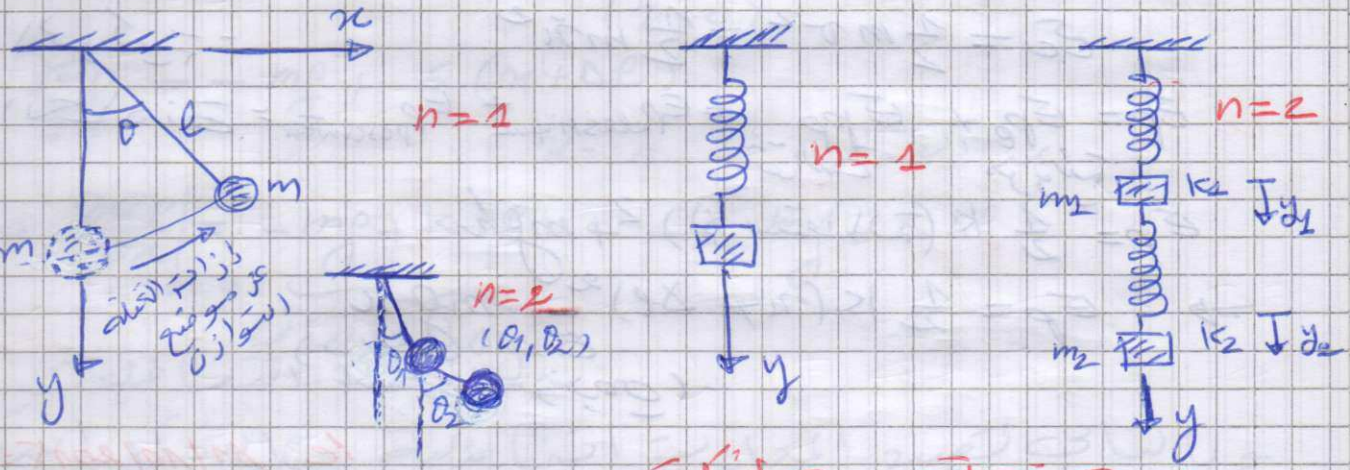
le 07/10/2015

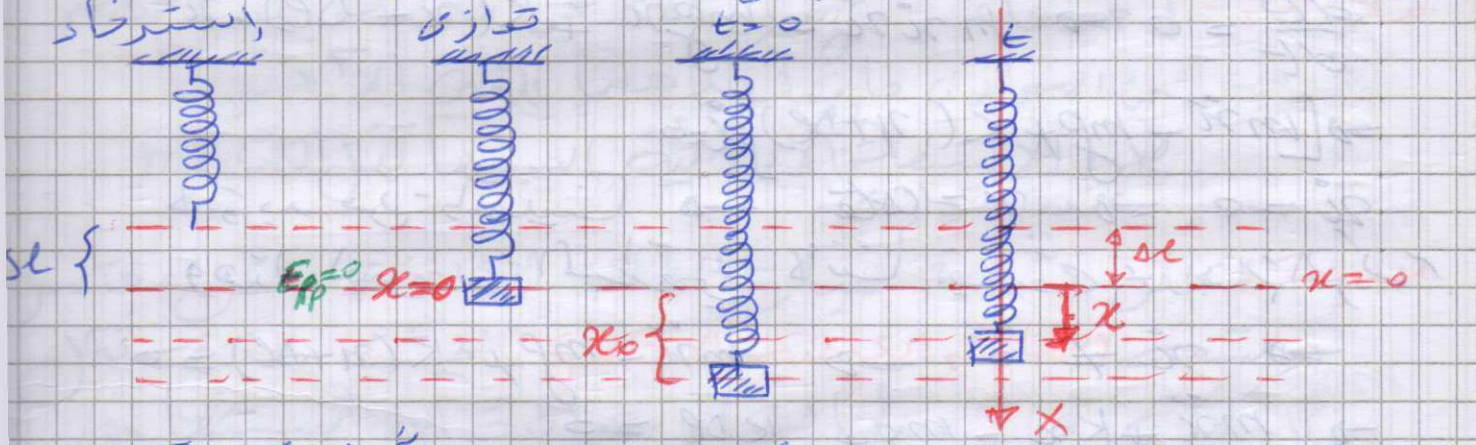
الدرس رقم 2: الاهتزازات الحرة غير المتخامدة ذات درجة حرية واحدة.

تعريف: تنتج هاتة الاهتزازات عن إزاحة المجلة عن وضع توازنها وتركها لتهتز حرة (غياب قوة إثارة خارجية) وتكون غير متخامدة (في غياب القوى المقاومة للحركة وعموما تكون صغيرة عن قوى الاحتكاك). وتكون ذات درجة حرية واحدة إذا أمكن وصف حركتها بإحداثي مستقل واحد.



دراسة تحليلية ميكانيكية:

لتكن لدينا المجلة الميكانيكية التالية:



نزيح المجلة عن وضع توازنها بمقدار x0 ثم نتركها لتهتز حرة المطلوب: وصف حركة هاته المجلة بدلالة الزمن أي إيجاد تغير x(t)؟

هناك 3 طرق:

1| نيوتن: توازن حركة

$$\begin{cases} \sum \vec{F_i} = \vec{0} \\ \sum \vec{F_i} = m\vec{a} \end{cases}$$

2| الطاقة: $\Delta E =$ عمل القوى الخارجية

3| طريقة Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

الحل: - طريقة الطاقة

* لا توجد قوى خارجية $(F_{ext} = 0)$

التغير في E = عمل القوى الخارجية

$$dE = \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{\ell} = 0 = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} \cdot dt = 0 \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$$

$$E = E_c + E_p$$

$$dE_c + dE_p = 0$$

حساب الطاقة:

1) الحركية:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

2) الكامنة: $E_p = E_{pe} + E_{pp} = E_{pelastique} + E_{pesanteur}$

مرونية — ثقالية

$$E_p = \frac{1}{2} k (\Delta\ell_{\text{استطالة}})^2 + mgh$$

$$\rightarrow E_p = \frac{1}{2} k (x + \Delta\ell)^2 - mgx$$

(بالنسبة لمستوى مرجعي)

le 11/10/2015:

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2} k (x + \Delta\ell)^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow m\dot{x}\ddot{x} - mg\dot{x} + k(x + \Delta\ell)\cdot\dot{x}$$

$$\rightarrow [m\ddot{x} - mg + k(x + \Delta\ell)]\dot{x} = 0$$

$\dot{x} = 0 \rightarrow x = cste$ ← توجد حركة واتمنينا

وهذا ليس من المنطقي كأننا نبحث عن حالة الحركة.

$$\rightarrow \dot{x} \neq 0 \rightarrow m\ddot{x} - mg + k(x + \Delta\ell) = 0$$

$$\rightarrow m\ddot{x} + kx - mg + k\Delta\ell = 0$$

$$\rightarrow m\ddot{x} + kx = mg + k\Delta\ell.$$

معادلة تفاضلية من الرتبة 2 (غير متجانسة ؟؟)

من المفروض أن المعادلة تكون متجانسة لأنه ليس لدينا قوى خارجية وعليه فإنه يجب مراجعة حالة التوازن.

من التوازن: * يجب تطبيق مبدأ نيوتن أولا $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

وإنما يجب تطبيق طريقة الطاقة:

لدينا فقط قوى داخلية $\vec{P}$ و $\vec{T}$ وهي قوى محتفظة

من نكون ← $\sum \vec{F_i}(int) = -\overrightarrow{grad}\, E_p = 0$

عند التوازن

$\rightarrow \overrightarrow{grad}\, E_p = 0$ عند التوازن

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i}}$$

$\overrightarrow{grad}\, E_p = 0$ عند التوازن $\rightarrow \left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right| = 0$ توازن $(x=0)$

$\rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = -mg + K(x+\Delta l)$

عند التوازن $x = 0$

$\rightarrow \left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right|_{x=0} = -mg + K\Delta l = 0 \rightarrow mg = K\Delta l$

نقل الفرع الثاني من المعادلة التفاضلية

وبالتالي تصبح المعادلة التفاضلية من الشكل (جربها نفسك)

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

ملاحظة: - إختفاء mg و $K\Delta l$ من المعادلة التفاضلية

- من التوازن فإن أحدهما يلغي الآخر

* (الإستطالة الابتدائية) سببها ثقل الكتلة m عند التوازن.

نتيجة: نلخص كتابة عبارة الطاقة الكامنة بشكل مختصر وتسمى الطاقة الكامنة المختصرة، فيتم حذف ثقل الكتلة مع الاستطالة الابتدائية التي نستنتجها من عبارة الطاقة الكامنة الكلية (الاستطالة ابتدائية أي عند التوازن)

التحقق:

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$E_p = -mgx + \frac{1}{2}K(x+\Delta l)^2 \Rightarrow E_{p(\text{مختصرة})} = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2, \quad \frac{dE}{dt} = 0 = m\dot{x}\ddot{x} + Kx\dot{x}$$

$$= \dot{x}(m\ddot{x} + Kx) = 0$$

$\Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$ = (المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية)

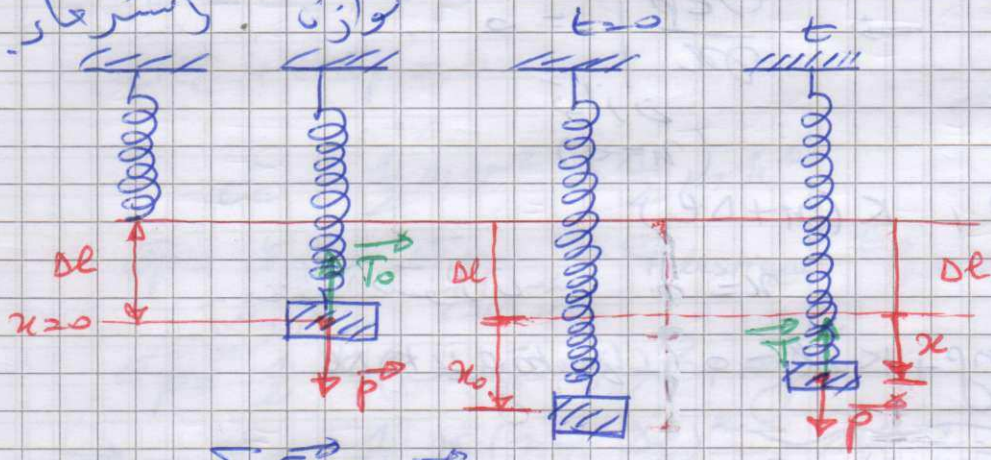
طريقة لاغرانج: $L = E_c - E_p$ ، E_p = الطاقة الكامنة

$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$ ، $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ ، $\Phi = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$ ، $\frac{\partial L}{\partial x} = -Kx$

$\Rightarrow m\ddot{x} - (-Kx) = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$

طريقة نيوتن:



حالة التوازن:

$\sum \vec{F_i} = \vec{0}$

$\vec{P} + \vec{T_0} = \vec{0}$ ، $T = Kx$

$x =$ الإستطالة

بالإسقاط:

$$\boxed{mg - K\Delta\ell = 0}$$

حالة الحركة:

$\sum \vec{F_i} = m\vec{\ddot{x}} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{\ddot{x}}$

بالإسقاط:

$mg - K(x + \Delta\ell) = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} + Kx = \underbrace{mg - K\Delta\ell}_{(\text{من التوازن})} \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + Kx = 0}$ نفس المعادلة السابقة.

حل المعادلة التفاضلية:

$m\ddot{x} + Kx = 0 \ /m \Rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ (معادلة من الرتبة 2 متجانسة)

$\Rightarrow r^2 + \frac{K}{m} = 0$ (المعادلة المميزة) ، $\Delta = 0 - 4\frac{K}{m} < 0$

$\Rightarrow r_{1,2} = 0 \pm i\sqrt{K/m} = \pm i\sqrt{\frac{K}{m}}$

$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)$

$\alpha = 0$ ، $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow x(t) = C_1 \cos\sqrt{\frac{K}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{K}{m}}t$

$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \varphi\right)$ ← الدور

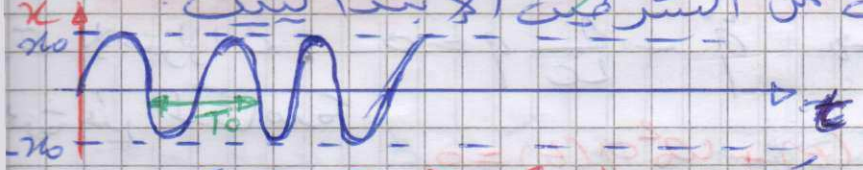
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: نبض الدارة (نبض الحركة) ويتعلق فقط بالدارة (يتعلق بـ m و k فقط) ترمز له بـ ω_0 ويسمى بالنبض الذاتي للجملة

الشكل العام للمعادلة التفاضلية للاهتزازات الحرة غير المتخامدة

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

الحل: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ أو $x(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$

A ، φ ، C_1 ، C_2 تحسب من الشروط البدائية



وصف الحركة: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$: الدور الذاتي

الحركة السابقة عبارة عن حركة اهتزازية جيبية ذات دور ذاتي T_0 ، نبضها الذاتي ω_0 يتعلقان بالجملة وسمي تتعلق بالشروط البدائية.

le 15/10/2015

Rappel: اهتزازات حرة غير متخامدة.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

الحل: $x(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$

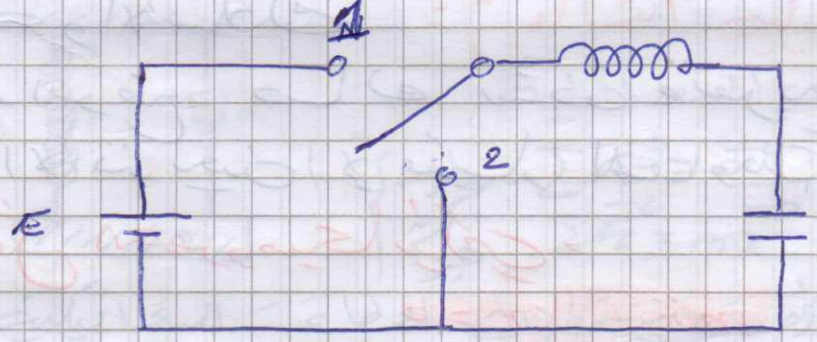
أو

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

طرق البداية لإيجاد المعادلة: قيوتن + الطاقة + تواجد.

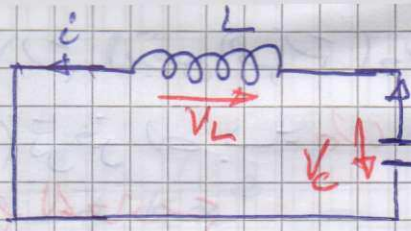
دراسة حالة كهربائية:

لتكن الدارة الكهربائية التالية:



القاطعة في الوضع (1): عملية شحن المكثفة

" " (2): " "



بتطبيق قانون التوترات:

$$V_L + V_C = 0$$

$$\begin{cases} V_C = \frac{q}{C} \\ V_L = L\frac{di}{dt} \end{cases}, \quad i = \frac{dq}{dt} \rightarrow V_L = L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) = L\ddot{q}$$

$$\rightarrow L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

معادلة للاهتزازات الحرة غير المتخامدة.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

$$\rightarrow q(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$$

أو

$$q(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

ملاحظة:

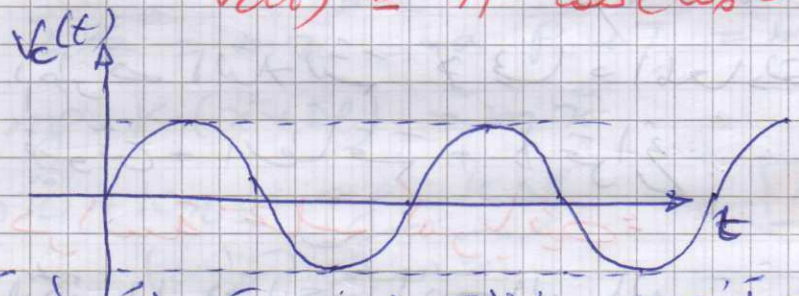
$$V_C(t) = \frac{1}{C}q(t), \quad q(t) = CV_C(t)$$

إذن يمكن دراسة $V_C(t)$

$$\rightarrow V_C(t) = C'_1 \cos\omega_0 t + C'_2 \sin\omega_0 t$$

أو

$$V_C(t) = A'\cos(\omega_0 t + \varphi')$$



نظريا حسب البيان فإنه تحدث شحن وتفريغ دائما عليا

في الحقيقة تتناقص حتى تنعدم، وذلك بسبب مقاومة الوشيعة والأسلاك.

⇐ عند الوضع صفر تحدث شحنة وتفريغ للمكثفة وذلك لعدم الأخذ بعين الاعتبار للمقاومة (وشيعة وأسلاك)

التماثل الكهروميكانيكي.

mécanique : $m\ddot{x} + kx = 0$

électricité : $L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$

ميكانيك		كهرباء	
الإزاحة	x (m)	الشحنة	q (كولوم)
السرعة	$\dot{x}$	شدة التيار	$i = \dot{q}$
الكتلة	m	الذاتية	L
الثابت	k	المكثفة	$\frac{1}{C}$

Chap n°03: المتذبذبات الحرة المتخامدة ذات درجة حرية واحدة.

تعريف: تحدث هذه الحركة بوجود قوى مقاومة للحركة (قوى احتكاك) ولها عدة أشكال

- تخامد جاف
- تخامد مروفي
- تخامد لزوجي

دراسة التخامد اللزوجي

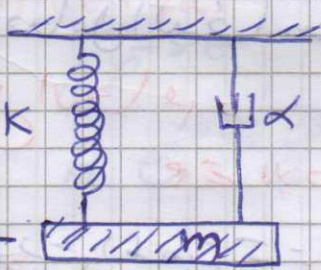
حركة جسم في مائع لزج

$$\vec{F_f} = -\alpha \vec{v}$$

α: معامل اللزوجة.

$$[\alpha] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{kg.\frac{m}{s^2}}{m/s} = kg/s$$

نرمز له بـ:



لتكن المجملة الميكانيكية التالية:

- إيجاد المعادلة التفاضلية

1- **الديناميك:**

$$\sum \vec{F_i} = \vec{0} \quad \text{توازن}$$

$$\sum \vec{F_i} = m\vec{a} \quad \text{حركة}$$

2- **الطاقة:** نطبق نظرية الطاقة الميكانيكية.

$$dE = dW_{fext} = \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{\ell} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} \cdot dt$$

$$dE = -\alpha \vec{v} \cdot \vec{v} \cdot dt = -\alpha v^2 dt$$

$$dE = -\alpha v^2 dt \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = -\alpha v^2}$$

حيث: السرعة التي تضبط الحركة