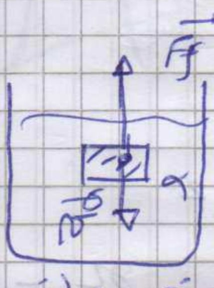
كهرباء:		ميكانيك	
شحنة	(q) كولوم	إزاحة	x (m)
شدة التيار	$i = \dot{q}$	سرعة	$\dot{x}$
وشيعة	L	كتلة	m
مكثفة	$\frac{1}{C}$	النابض	K

Chap n°03: الاهتزازات الحرة المتخامدة ذات درجة حرية واحدة.

تعريف: تحدث الحركة هذه الحركة في وجود قوى معيقة للحركة (قوى احتكاك) ولها عدة أشكال

- تخامد صلب
- تخامد مرون
- تخامد لزوجي

دراسة التخامد اللزوجي:



مخمد لزوجي

حركة جسم في مائع لزج

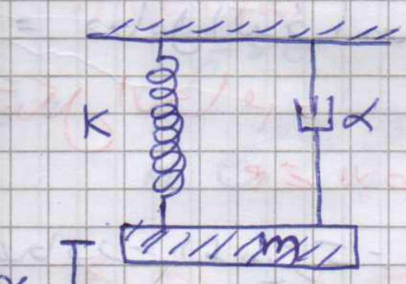
$$\vec{F_f} = -\alpha \vec{v}$$

α = معامل اللزوجة.

$$[\alpha] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{m/s} = kg/s$$

نرمز له بـ:

شكل الجملة الميكانيكية التالية:



- إيجاد المعادلة التفاضلية

1- نيوتن:

$$\begin{cases} \text{توازن} & \sum \vec{F_i} = \vec{0} \\ \text{حركة} & \sum \vec{F_i} = m\vec{\ddot{x}} \end{cases}$$

2- الطاقة: نطبق نظرية الطاقة الميكانيكية:

$$dE = dW_{F_{ext}} = \vec{F_{ext}} \cdot \vec{dl} = \vec{F_{ext}} \cdot \vec{v}\, dt$$

$$dE = -\alpha \vec{v} \cdot \vec{v}\, dt = -\alpha v^2\, dt$$

$$dE = -\alpha v^2 dt \longrightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = -\alpha v^2}$$

v = السرعة التي تخضع لها المخمد

on appliquer direct^{mt} d^{s} les cas $\frac{dE}{dt} = -\alpha v^2$

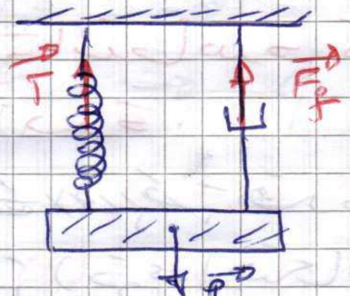
$E = E_c + E_p$

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, $E_p = \frac{1}{2} k x^2$

مختصرة

$\frac{dE}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = -\alpha \dot{x}^2 \rightarrow m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0$

نيوتن :



$\sum \vec{F_i} = \vec{0}$ توازن

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{T_0} = \vec{0} \Rightarrow mg - k\Delta l = 0$

$\sum \vec{F_i} = m\vec{\gamma}$. حركة

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{F_f} = m\vec{\ddot{x}}$

$\Rightarrow mg - k(x + \Delta l) - \alpha \dot{x} = m\ddot{x}$

$\Rightarrow m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0$

13 x لاغرانج :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$

$D = \frac{1}{2} \alpha v^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$, $\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \rightarrow m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0$

حل المعادلة التفاضلية :

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$; ω_0 : النبض الذاتي في غياب التخامد

$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$; δ = معامل التخامد

الشكل العام :

$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

م ع ت للاهتزازات الحرة المتخامدة ذات د ح و

المعادلة المميزة : $r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$

هناك 3 حالات

1) $\Delta < 0$: اهتزازات ذات تخامد ضعيف

$\Delta < 0 \rightarrow \delta^2 < \omega_0^2 \rightarrow \delta < \omega_0$

$r_{1,2} = \frac{1}{2}(-2\delta \pm i\sqrt{|\Delta|}) =$

le 28/10/2015

$r_1, r_2 = \frac{1}{2}(-2\delta \pm 2i\sqrt{\omega_0^2-\delta^2})$, $r_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$

(جذرين مركبين) $= \alpha \pm i\omega$

$\Rightarrow x = A e^{-\delta t}\cos(\underbrace{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}_{\omega_a}\, t + \varphi)$

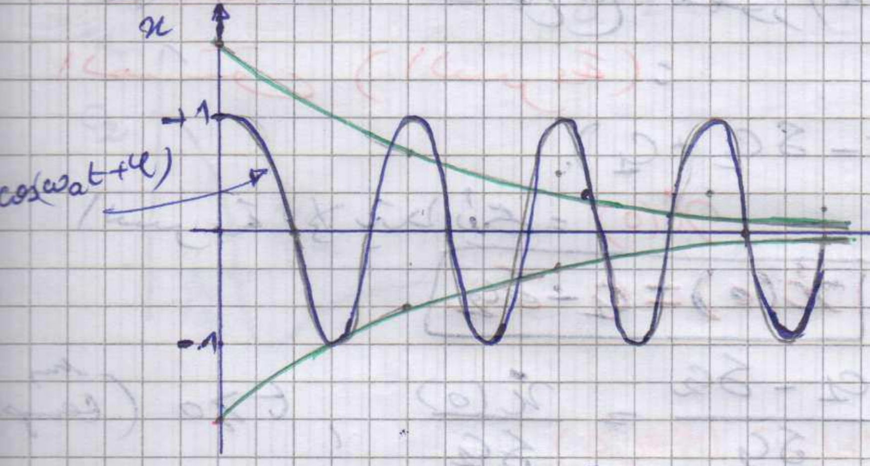
$\Rightarrow x(t) = A e^{-\delta t}\cos(\omega_a t+\varphi)$

ω_a: النبض الطبيعي للحركة.

$x(t) = A(t)\cos(\omega_a t+\varphi)$, $A(t) = A e^{-\delta t}$

الحركة المتحصل عليها هي حركة اهتزازية ذات سعة متناقصة

لها شبه دور T_a حيث: $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$



بعض الخصائص:

T_a: شبه الدور $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$

$A(t)$: سعة متناقصة $A(t) = Ae^{-\delta t}$

ω_a: نبض طبيعي للحركة $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$

D: (النسبة بين سعتين متتاليتين) $D = \frac{A(t)}{A(t+T_a)}$

$D = \frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta T_a}e^{-\delta t}} = e^{\delta T_a}$ $D = e^{\delta T_a}$

التناقص اللوغاريتمي θ:

$\theta = \ln D = \delta T_a \Rightarrow \boxed{\theta = \delta T_a}$

2/ $\Delta = 0$: اهتزازات ذات تخامد حرج ($\delta = \omega_0$)

$\Rightarrow r_1 = r_2$ (حل مضاعف) $= -\delta \Rightarrow x(t) = e^{-\delta t}(C_1 t + C_2)$

الحركة متخامدة ($\lim_{t\to+\infty} e^{-\delta t} \to 0$) لكن ليست

اهتزازية (غياب الدالة الجيبية $\cos$ أو $\sin$ في الحل)

$$\lim_{x\to+\infty} x(t) = 0$$

$$x(t) = e^{-\delta t}(c_1 t + c_2)$$

دراسة: $x(t)$

$$\lim_{x\to+\infty} x(t) = 0 \quad , \quad x(0) = c_2$$

(نفرض $c_2 > 0$)

$$x(t) = 0 \Rightarrow e^{-\delta t}(c_1 t + c_2) = 0 \ , \ e^{-\delta t} \neq 0 \Rightarrow t = -\frac{c_2}{c_1}$$

$$t \text{ (temps)} \Rightarrow t \geq 0 \Rightarrow -\frac{c_2}{c_1} \geq 0 \Rightarrow c_1 < 0$$

(بفرض $c_2 > 0$)

⇐ نقطة تقاطع مع محور (ox)

المشتق (السرعة):

$$\dot{x}(t) = e^{-\delta t}(-\delta c_1 t - \delta c_2 + c_1)$$

السرعة الابتدائية = $\dot{x}(0)$

$$\dot{x}(0) = c_1 - \delta c_2 \qquad \boxed{\dot{x}(0) = c_1 - \delta c_2}$$

$$\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{c_1 - \delta c_2}{\delta c_1} = \frac{\dot{x}(0)}{\delta c_1} \ , \ t \geq 0 \text{ (temps)}$$

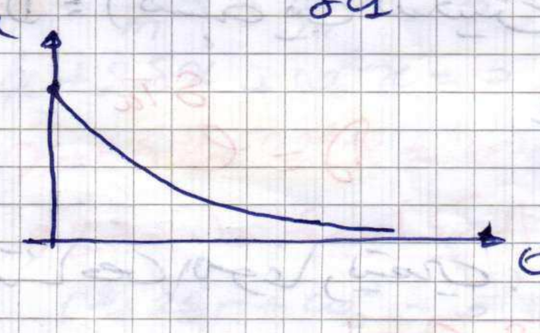
$$\Rightarrow \frac{\dot{x}(0)}{\delta c_1} \geq 0$$

⇐ نميز 3 حالات حسب السرعة الابتدائية

أ) $\dot{x}(0) = 0$

$$\dot{x}(0) = c_1 - \delta c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = \delta c_2 > 0 \quad (c_2 > 0)$$

⇐ لا يقطع محور (ox) $\quad t = \frac{\dot{x}(0)}{\delta c_1} = 0$



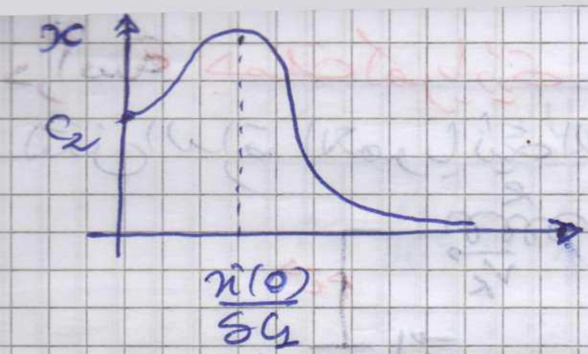
ب) $\dot{x}(0) > 0$

$$\dot{x}(0) = c_1 - \delta c_2 > 0 \Rightarrow c_1 > \delta c_2 > 0$$

⇐ لا يقطع محور الفواصل

$$\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{\dot{x}(0)}{\delta c_1} \geq 0$$

⇐ نهاية موجودة

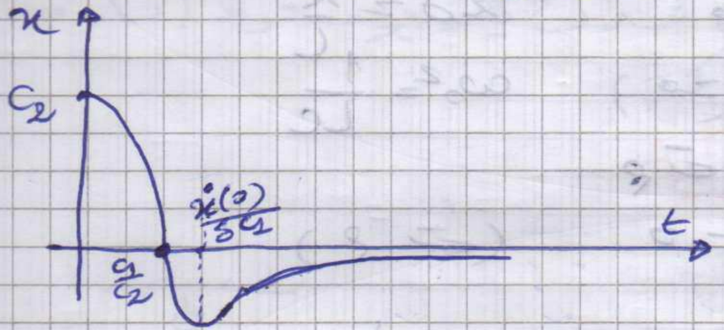


ج/ $\dot{x}(0) < 0$

$\dot{x}(0) = c_1 - \delta c_2 < 0 \Rightarrow c_1 < \delta c_2$

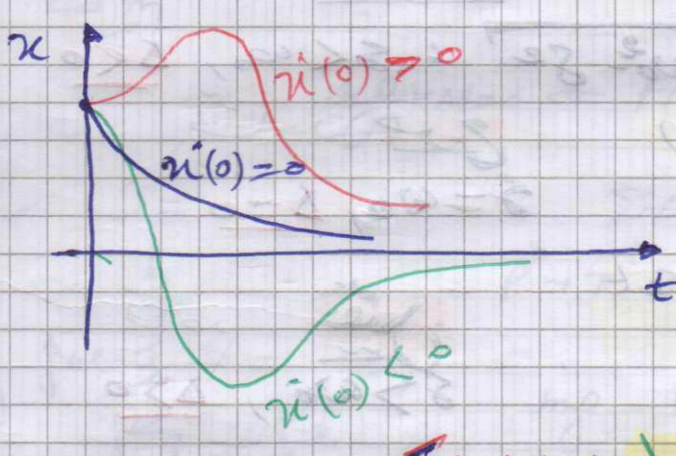
$\boxed{t = -\frac{c_2}{c_1}}$ ← ممكن أن تكون $c_1 < 0$

$\dot{x}(t) = 0 \rightarrow t = \frac{\dot{x}(0) < 0}{\delta c_1 < 0} > 0$ النهاية ممكنة ←



$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$

$\Delta = 0$ (مقارنة مع الحالات الأخرى)



٣) $\Delta > 0$ (تخامد ثقيل) $\delta > \omega_0$

$\boxed{x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}}$

$r_1 < 0$
$r_2 < 0$

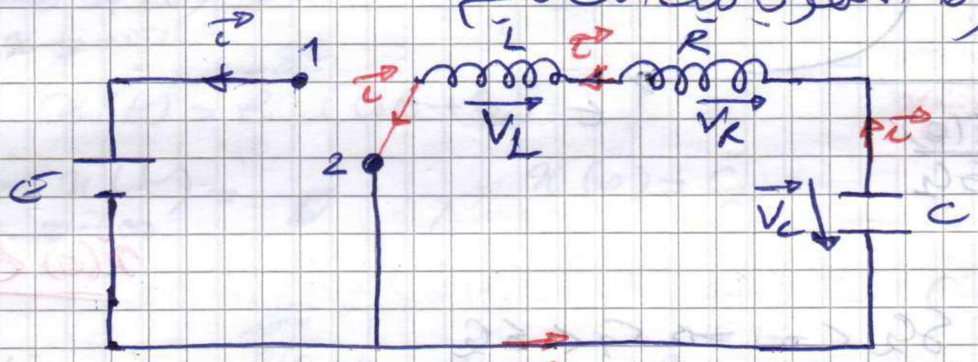
الحركة غير اهتزازية متخامدة

$r_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$

$r_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$

دراسة جملة كهربائية

لتكن الدارة الكهربائية التالية



الوضع RLC :

قانون كيرشوف $\quad V_L + V_R + V_C = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \\ \ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \\ \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$2\delta = \frac{R}{L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

م ت رتبة 2

$$\ddot{V}_C + 2\delta\dot{V}_C + \omega_0^2 V_C = 0 \qquad (\text{م ت})$$

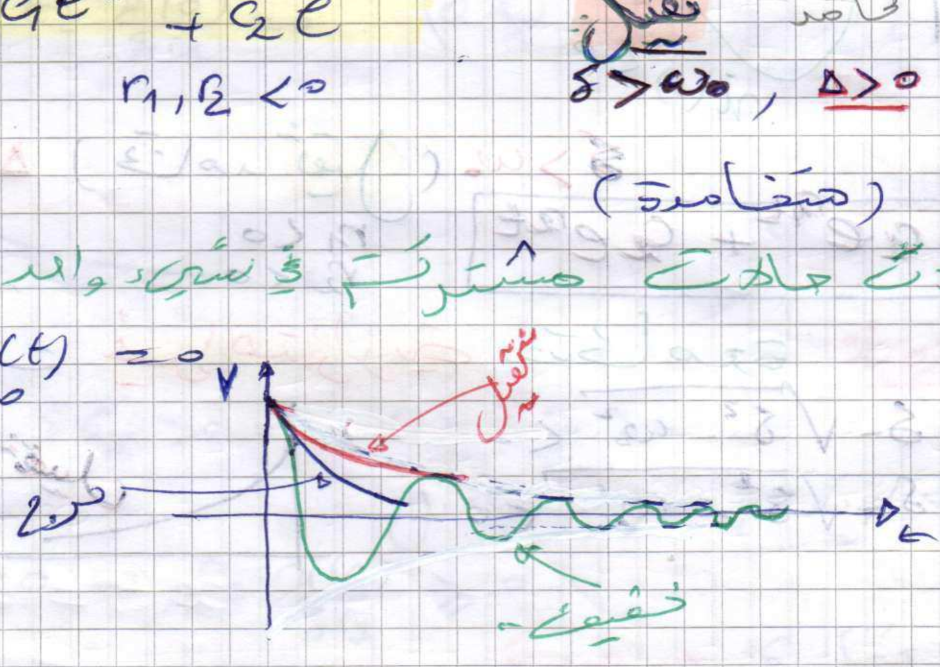
حلها

$$V_C(t) = \begin{cases} Ae^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \varphi) & \text{تخامد ضعيف} \\ \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} & \delta < \omega_0 ,\ \Delta < 0 \\ e^{-\delta t}(c_1 t + c_2) & \text{تخامد حرج} \\ & \delta = \omega_0 ,\ \Delta = 0 \\ c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} & \text{تخامد ثقيل} \\ r_1, r_2 < 0 & \delta > \omega_0 ,\ \Delta > 0 \end{cases}$$

(متخامدة)

الثلاث حالات مشتركة في شيء واحد وهو التخامد.

$$\lim_{t \to +\infty} V_C(t) = 0$$



مطابقة ميكانيك - كهرباء

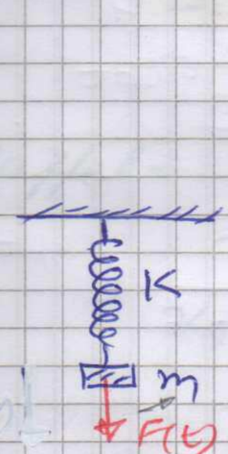
ميكانيك	كهرباء
x	q
$\dot{x}$	$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, $\dot{q} = i$
m	L
k	$1/C$
α	R

الدرس 4: الاهتزازات القسرية ذات درجة حرية واحدة

تعريف: هي الاهتزازات التي تحدث في وجود قوة إثارة خارجية (قوة محركة)

دراسة جملة ميكانيكية

1- في غياب المخمد:

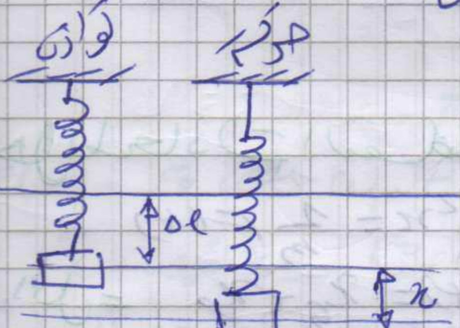


$F(t)$: قوة خارجية

إيجاد المعادلة التفاضلية

1- طريقة نيوتن:

- (توازن) = في غياب $F(t)$ ⇐ $mg - k\Delta l = 0$



- حركة: $\sum \vec{F} = m\ddot{x}\,\vec{i}$

$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}(t) = m\ddot{x}\,\vec{i}$

بالإسقاط:

$mg - k(\Delta l + x) + F(t) = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} + kx = F(t) + \underbrace{mg - k\Delta l}_{=0}$

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = F(t)}$$

ملاحظة: في حالة وجود المخمد ⇐ ظهور المشتق الأول في المعادلة التفاضلية.

حركة اهتزازية حرة ⇐ معادلة متجانسة

" " " قسرية ⇐ " غير متجانسة.

2- طريقة الطاقة:

$dE = dW_{F_{ext}} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dl} = F_{ext}\,\dot{x}\,dt$