Exercice N°1 :

1) Déterminer les paramètres de la matrice impédance [Z].

تسمية المصفوفة بـ [Z] لأنها تربط بين الجهد [V] والتيار [I] :

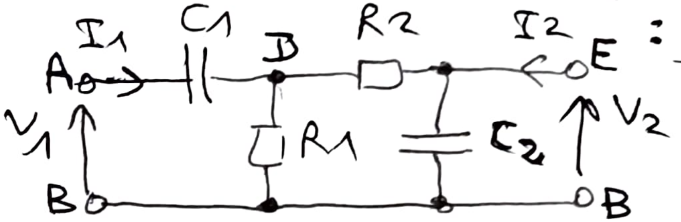
$$[V] = [Z][I]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_{11} = \left.\dfrac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \\ Z_{12} = \left.\dfrac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \\ Z_{21} = \left.\dfrac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \\ Z_{22} = \left.\dfrac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} \end{cases}$$

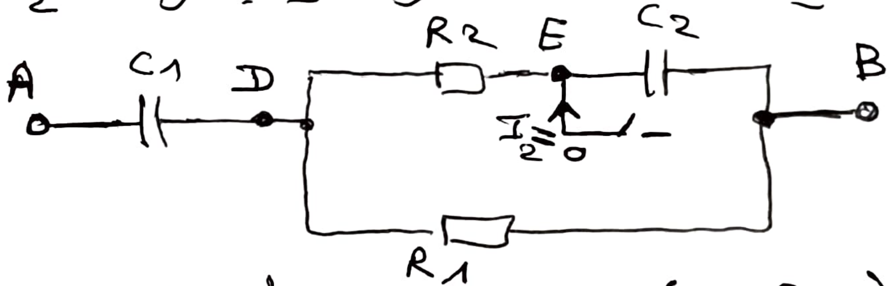
رباعي الأقطاب المعطى في التمرين هو :



من أجل تسهيل تحليل الدارة نقوم بتسمية كل النقاط والعقد في الدارة.

a) $Z_{11} = \left.\dfrac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$

Z_{11} هي الممانعة المكافئة Z_{AB} أي عند مدخل الرباعي بشرط $I_2=0$



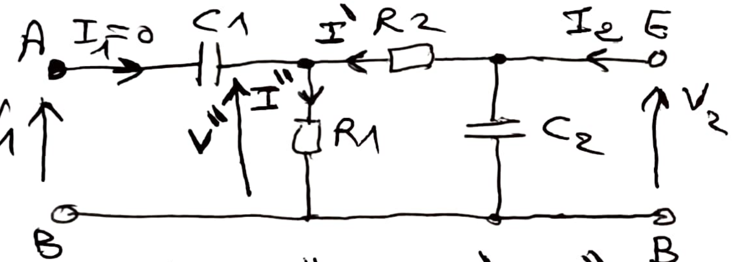
$$Z_{11} = Z_{AB}\Big|_{I_2=0} = Z_{C_1} + R_1 // (R_2 + Z_{C_2})$$

$$= Z_{C_1} + \frac{R_1(R_2 + Z_{C_2})}{R_1 + R_2 + Z_{C_2}}$$

$$Z_{C_1} = \frac{1}{j\omega C_1}, \quad Z_{C_2} = \frac{1}{j\omega C_2}$$

b) $Z_{12} = \frac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0}$

من أجل حساب Z_{12} يجب إيجاد علاقة مباشرة بين V_1 و I_2 بشرط $I_1=0$.



$I_1 + I' = I'' \Rightarrow I' = I''$

$V_1 - Z_{C_1} I_1 - V'' = 0 \Rightarrow V'' = V_1$

$\Rightarrow V_1 = V'' = R_1 I'' = R_1 I'$

نلاحظ أن Z_{C_2} على التوازي مع R_1+R_2 .

إذن يمكن تطبيق قاسم التيار:

$$I' = \frac{\frac{1}{R_1+R_2}}{\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{Z_{C_2}}} \cdot I_2 \quad \text{—— (1)}$$

$$V_1 = R_1 I' \quad \text{—— (2)}$$

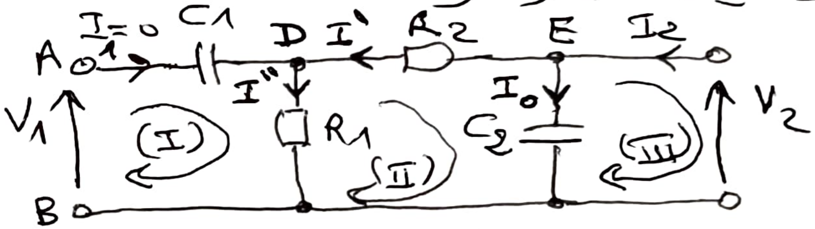
(1) → (2) :

$$V_1 = R_1 \cdot \frac{\frac{1}{R_1+R_2}}{\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{Z_{C_2}}} \cdot I_2$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{11} = \frac{V_1}{I_2} = R_1 \frac{\frac{1}{R_1+R_2}}{\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{Z_{C_2}}}}$$

$$\Rightarrow Z_{12} = \frac{R_1 \cdot Z_{C_2}}{R_1+R_2+Z_{C_2}}$$

الطريقة الثانية لحساب Z_{12} باستعمال قوانين كيرشوف:



(I) : $V_1 - Z_{C_1} I_1 - R_1 I'' = 0$ —— (1)

(II) : $R_1 I'' + R_2 I' - Z_{C_2} I_0 = 0$ —— (2)

(III) : $Z_{C_2} I_0 - V_2 = 0$ —— (3)

D : $I_1 + I' = I''$ —— (4)

E : $I_2 = I_0 + I'$ —— (5)

مع العلم : $I_1 = 0$.

بما أن : $Z_{12}=\frac{V_1}{I_2}$

فإننا نعتبر V_1 مجهول فقط.

إذن لدينا المجاهيل التالية :

$$V_1 \; , \; I' \; , \; I'' \; , \; I_0 \; , \; V_2$$

$$(5) \Rightarrow I' = I_2 - I_0 \quad \text{———} \quad (6)$$

$$(6) \Rightarrow (4) : \; I'' = I' + \cancel{I_1}^{\,0}$$

$$\Rightarrow I'' = I_2 - I_0 \quad \text{———} \quad (7)$$

$$(3) \Rightarrow I_0 = \frac{1}{Z_{C_2}} \cdot V_2 \quad \text{———} \quad (8)$$

$$(8) \longrightarrow (7) : \; I'' = I_2 - \frac{1}{Z_{C_2}} V_2 \quad \text{———} \quad (9)$$

$$(8) \longrightarrow (6) : \; I' = I_2 - \frac{1}{Z_{C_2}} V_2 \quad \text{———} \quad (10)$$

$$(10) \longrightarrow (1) : \; V_1 - Z_{C_1}\cancel{I_1}^{\,0} - R_1\left(I_2 - \frac{1}{Z_{C_2}} V_2\right) = 0$$

$$\Rightarrow V_1 - R_1 I_2 + \frac{R_1}{Z_{C_2}} V_2 = 0$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{Z_{C_2}}{R_1}\left(R_1 I_2 - V_1\right) \quad \text{———} \quad (11)$$

$$\underbrace{(11) , (8) , (9)}_{} \longrightarrow (2) :$$

$$(R_1+R_2)\cdot\left[I_2 - \frac{1}{Z_{C_2}}\cdot\frac{Z_{C_2}}{R_1}\left(R_1 I_2 - V_1\right)\right] - Z_{C_2}\cdot\frac{1}{Z_{C_2}}\cdot\frac{Z_{C_2}}{R_1}\left(R_1 I_2 - V_1\right) = 0$$

$$(R_1+R_2) I_2 - \frac{R_1+R_2}{R_1}\left(R_1 I_2 - V_1\right) - \frac{Z_{C_2}}{R_1}\left(R_1 I_2 - V_1\right) = 0$$

$$\frac{R_1+R_2}{R_1} V_1 - Z_{C_2} I_2 + \frac{Z_{C_2}}{R_1} V_1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{R_1+R_2}{R_1} + \frac{Z_{C_2}}{R_1}\right) V_1 = Z_{C_2} I_2$$

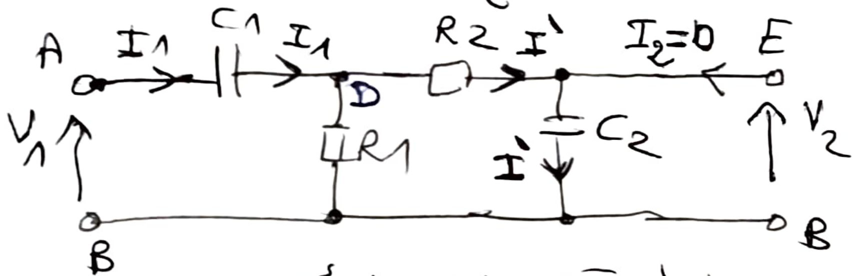
$$\Rightarrow V_1 = \frac{R_1 Z_{C_2}}{R_1+R_2+Z_{C_2}} \cdot I_2$$

$$\Rightarrow Z_{12} = \frac{R_1 Z_{C_2}}{R_1+R_2+Z_{C_2}}$$

وهي نفس نتيجة الطريقة الأولى

ولكنها طويلة نوعا ما.

c) $Z_{21} = \left.\dfrac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$



بنفس الطريقة نلاحظ أن :

$(R_2+Z_{C_2})$ على التوازي مع R_1 .

إذن يمكن تطبيق قاسم التيار.

$$I' = \frac{\frac{1}{R_2+Z_{C_2}}}{\frac{1}{R_2+Z_{C_2}}+\frac{1}{R_1}} \cdot I_1 \quad (1)$$

ولدينا : $V_2 = Z_{C_2} I' \quad (2)$

$(1) \rightarrow (2)$:

$$V_2 = Z_{C_2} \cdot \frac{\frac{1}{R_2+Z_{C_2}}}{\frac{1}{R_2+Z_{C_2}}+\frac{1}{R_1}} \cdot I_1$$

$$\Rightarrow Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = Z_{C_2} \frac{\frac{1}{R_2+Z_{C_2}}}{\frac{1}{R_2+Z_{C_2}}+\frac{1}{R_1}}$$

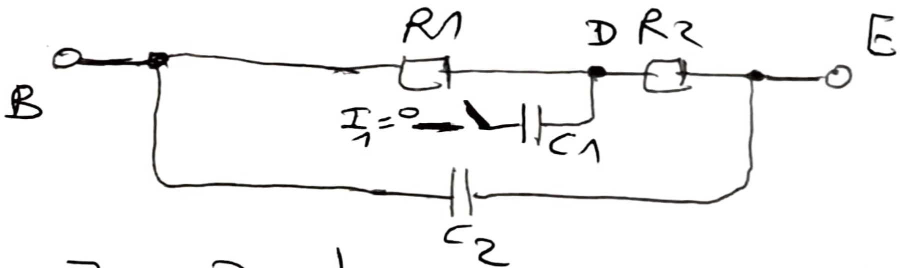
$$\Rightarrow \boxed{Z_{21} = \frac{R_1 Z_{C_2}}{R_1+R_2+Z_{C_2}}}$$

d) $Z_{22} = \left.\dfrac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$

Z_{22} هي الممانعة المكافئة Z_{EB}

أي عند مخرج الرباعي

بشرط $I_1=0$



$$Z_{22} = Z_{EB}\Big|_{I_1=0} = Z_{C_2} \,//\, (R_1+R_2)$$

$$\boxed{Z_{22} = \frac{Z_{C_2}(R_1+R_2)}{Z_{C_2}+R_1+R_2}}$$

2) Déterminer les paramètres de la matrice admittance [Y].

تسمية المصفوفة بـ [Y] لأنها تربط بين التيار [I] والجهد [V] :

$$[I] = [Y][V]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

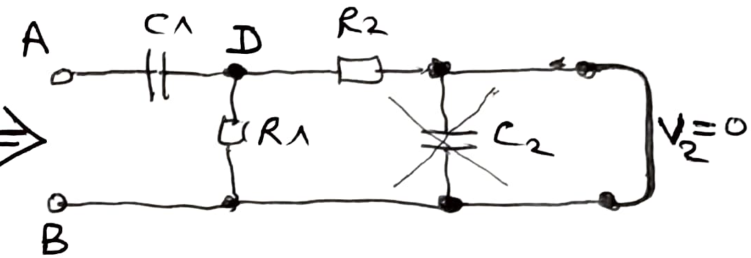
$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{cases}$$

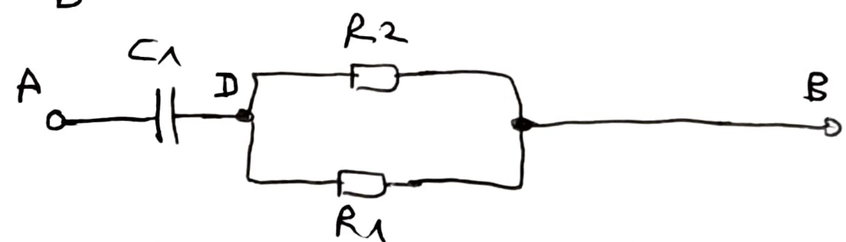
$$\Rightarrow \begin{cases} Y_{11} = \dfrac{I_1}{V_1}\Big|_{V_2=0} \\ Y_{12} = \dfrac{I_1}{V_2}\Big|_{V_1=0} \\ Y_{21} = \dfrac{I_2}{V_1}\Big|_{V_2=0} \\ Y_{22} = \dfrac{I_2}{V_2}\Big|_{V_1=0} \end{cases}$$

a) $Y_{11} = \dfrac{I_1}{V_1}\Big|_{V_2=0}$:

Y_{11} هي القابلية المكافئة عند مدخل الرباعي أي هي مقلوب الممانعة المكافئة عند مدخل الرباعي بشرط $V_2 = 0$.

$$Y_{11} = \frac{1}{Z_{AB}|_{V_2=0}}$$

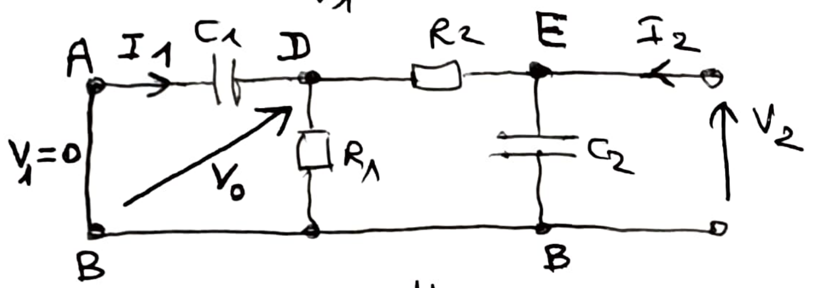
$\Rightarrow$ 



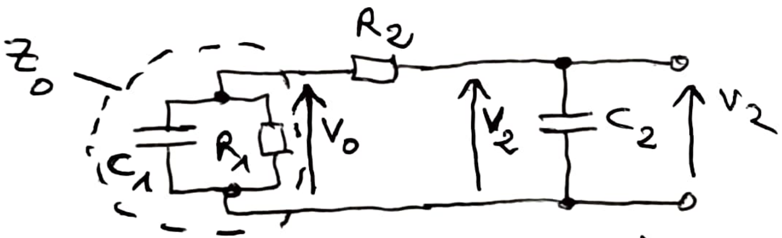
$$Z_{AB}|_{V_2=0} = Z_{C_1} + R_1 // R_2$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_{11} = \frac{1}{Z_{AB}|_{V_2=0}} = \frac{1}{Z_{C_1} + R_1 // R_2}}$$

b) $Y_{12} = \dfrac{I_1}{V_2}\Big|_{V_1=0}$



$\Downarrow$



نلاحظ أن Z_0 على التسلسل R_2 .

$$V_0 = \frac{Z_0}{Z_0 + R_2} \cdot V_2 \quad , \quad Z_0 = Z_{C_1} /\!/ R_1$$

ولدينا أيضا الجهد V_0 بين طرفي C_1

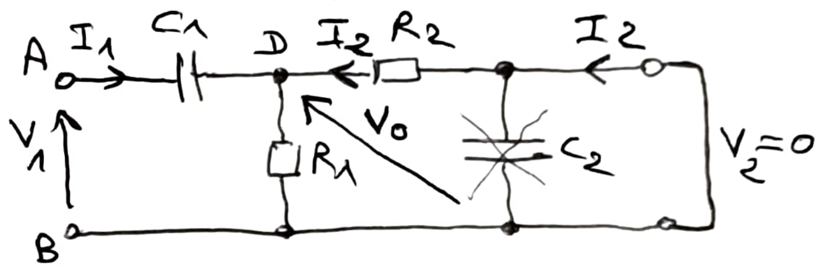
والتيار المار في C_1 لهما نفس الاتجاه

إذن : $V_0 = -Z_{C_1} I_1$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{1}{Z_{C_1}} \cdot V_0 = -\frac{1}{Z_{C_2}} \cdot \frac{Z_0}{Z_0 + R_2} \cdot V_2$$

$$\Rightarrow Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = -\frac{1}{Z_{C_2}} \cdot \frac{Z_0}{Z_0 + R_2}$$

c) $Y_{21} = \dfrac{I_2}{V_1}\Big|_{V_2=0}$:



$\Downarrow$

$$V_0 = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_{C_1}} \cdot V_1 \quad , \quad Z_0 = R_1 /\!/ R_2$$

$$V_0 = -R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = -\frac{1}{R_2} V_0$$

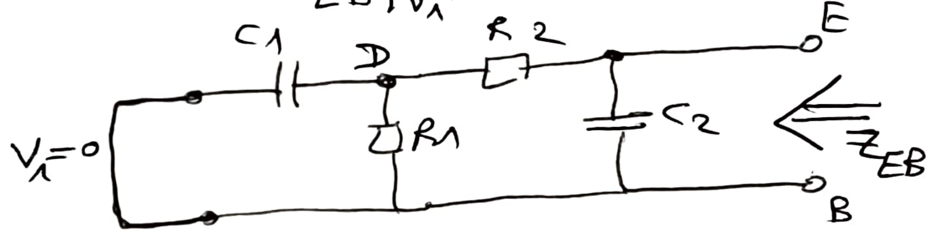
$$\Rightarrow I_2 = -\frac{1}{R_2} \cdot \frac{Z_0}{Z_0 + Z_{C_1}} \cdot V_1$$

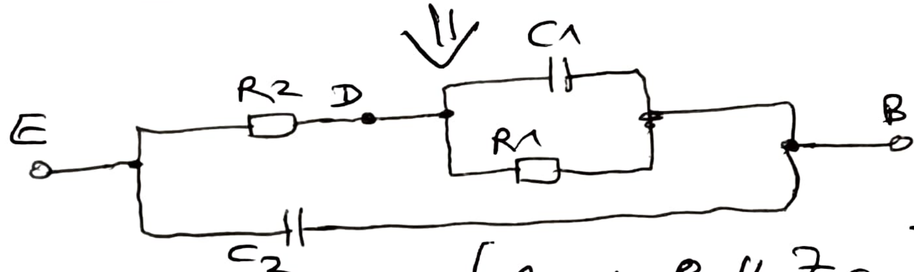
$$\Rightarrow Y_{21} = -\frac{1}{R_2} \cdot \frac{Z_0}{Z_0 + Z_{C_1}}$$

d) $Y_{22} = \frac{I_2}{V_2}\Big|_{V_1=0}$

Y_{22} هي القابلية المكافئة عند مخرج الرباعي أو هي مقلوب الممانعة المكافئة عند مخرج الرباعي بشرط $V_1=0$

$$Y_{22} = \frac{1}{Z_{EB}|_{V_1=0}}$$



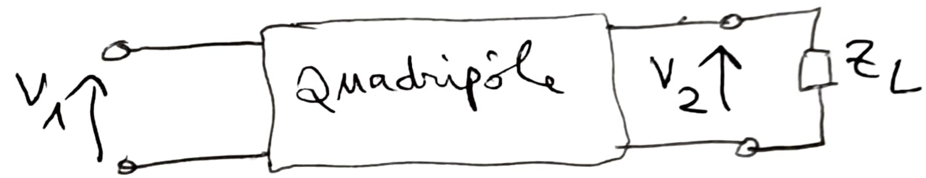


$$Z_{EB}|_{V_1=0} = Z_{C_2} // \left(R_2 + R_1 // Z_{C_1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_{22} = \frac{1}{Z_{EB}|_{V_1=0}} = \frac{1}{Z_{C_2} // \left(R_2 + R_1 // Z_{C_1}\right)}}$$

3) Le gain en tension :

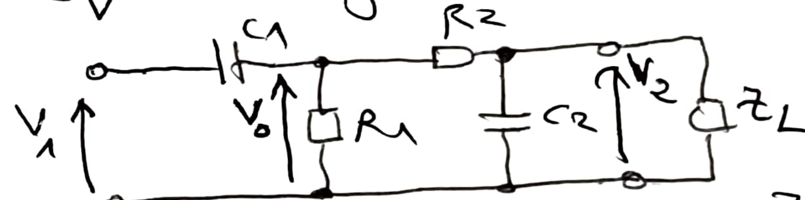
$$G_V = \frac{V_2}{V_1}$$

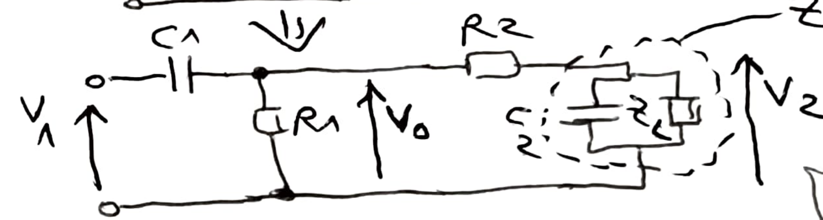


يمكن حساب G_V بوصل Z_L أو بفصل Z_L.

$$G_V = \begin{cases} G_{V0} = \frac{V_2}{V_1}\Big|_{I_2=0} & \text{(à vide)} \\ G_V = \frac{V_2}{V_1}\Big|_{I_2\neq 0} & \text{(en charge)} \end{cases}$$

a) G_V en charge :





لدينا Z' على التسلسل مع R_2 :

$$V_2 = \frac{Z'}{Z'+R_2} \cdot V_0 \quad , \quad Z' = Z_{C_2} /\!/ Z_L$$

لدينا أيضا Z'' على التسلسل مع C_1 :

$$V_0 = \frac{Z''}{Z''+Z_{C_1}} \cdot V_1 \quad , \quad Z'' = R_1 /\!/ (R_2+Z')$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{Z'}{Z'+R_2} \cdot \frac{Z''}{Z''+Z_{C_1}} \cdot V_1$$

$$\Rightarrow G_V(\text{en charge}) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z'}{Z'+R_2} \cdot \frac{Z''}{Z''+Z_{C_1}}$$

بالنسبة لـ G_{V0} (بفصل Z_L) هو نفسه G_V (بوصل Z_L) ولكن Z' تصبح :

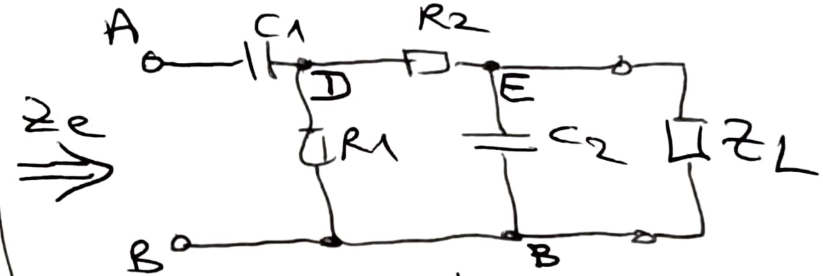
$$Z' = Z_{C_2} /\!/ Z_L = Z_{C_2}$$

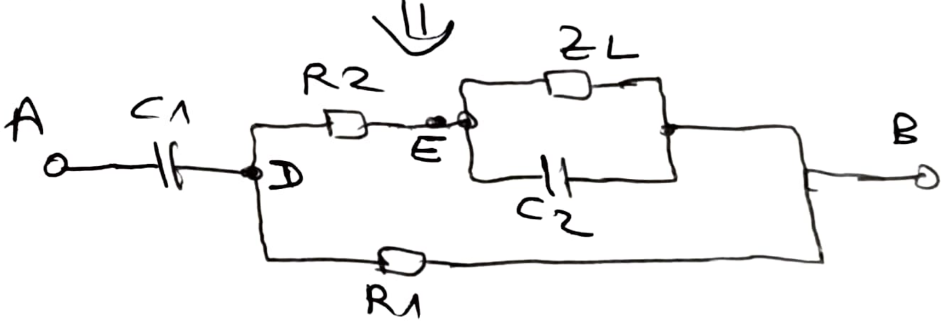
4) L'impédance d'entrée :

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1}$$

يمكن حسابها بوصل Z_L أو بفصل Z_L .

Z_e هي الممانعة المكافئة عند مدخل الرباعي : $Z_e = Z_{AB}$





$$Z_e(\text{en charge}) = Z_{AB}$$

$$\boxed{Z_e = Z_{C_1} + R_1 /\!/ (R_2 + Z_{C_2} /\!/ Z_L)}$$

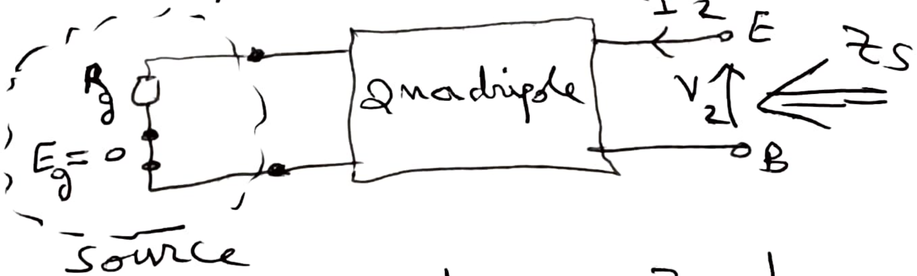
En charge
بوصل Z_L.

بالنسبة لـ Z_e بفصل Z_L (à vide)

فقط بنفس الطريقة السابقة نجد :

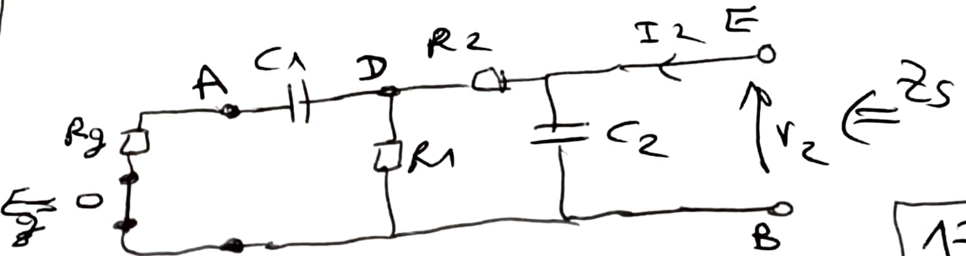
$$\boxed{Z_e(\text{à vide}) = Z_{C_1} + R_1 \,//\, (R_2 + Z_{C_2})}$$

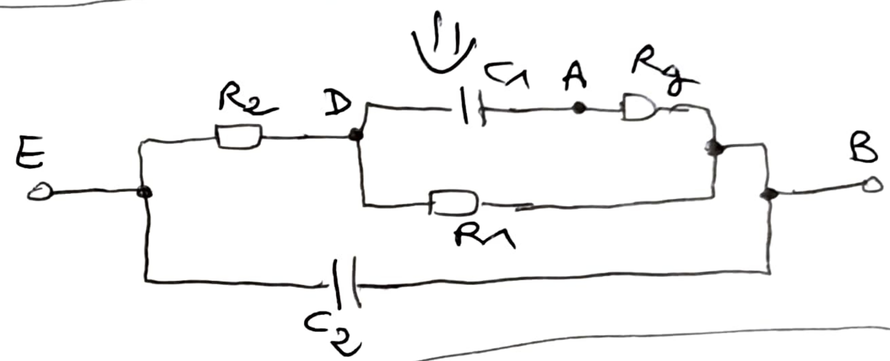
5) L'impédance de sortie :



$$Z_s = \frac{V_2}{I_2}\Big|_{E_g=0} = Z_{EB}\Big|_{E_g=0}$$

Z_s هي الممانعة المكافئة عند مخرج الرباعي مع حساب تأثير مقاومة المولد عند المدخل .





$$\boxed{Z_s = Z_{EB}\Big|_{E_g=0} = Z_{C_2} \,//\, \left(R_2 + R_1 \,//\, (Z_{C_1} + R_g)\right)}$$

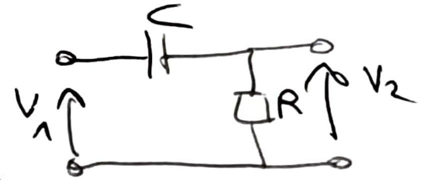
يجب التنبيه على أنه يجب فصل Z_L قبل حساب Z_s .

Exercice N°2 :

1) Réponse en fréquence $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1}$$

$$V_2 = \frac{R}{R+Z_C} \cdot V_1$$



$$\Rightarrow \boxed{H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R}{R+Z_C}}$$

$$\Rightarrow H(w) = \frac{R}{R + \frac{1}{jwC}} = \frac{jwRC}{1 + jwRC}$$

2) Fréquence de Coupure :

$$f_c = \frac{w_c}{2\pi}$$

لحساب w_c نطبق العلاقة التالية :

$$|H(w)|_{w = w_c} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad \text{—— (I)}$$

$$A = \begin{cases} |H(w)|_{w=0} & \text{passe-bas} \\ |H(w)|_{w\to\infty} & \text{passe-haut} \\ |H(w)|_{w\to w_0} & \text{passe-bande} \end{cases}$$

يجب إذن حساب $|H(w)|$:

$$|H(w)| = \frac{wRC}{\sqrt{1 + (wRC)^2}}$$

Filtre passe-haut: في هذا التمرين لدينا ويمكن بطريقة بسيطة إثبات ذلك .

$$\left.\begin{aligned} |H(w)|_{w=0} &= 0 \\ |H(w)|_{w\to\infty} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Filtre passe-haut}$$

$$A = |H(w)|_{w\to\infty} = 1$$

إذن من أجل حساب w_c نحل المعادلة السابقة (I) :

$$\frac{w_c RC}{\sqrt{1 + (w_c RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(w_c RC)^2}{1 + (w_c RC)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow w_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_c = \frac{w_c}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_c = \frac{1}{2\pi RC}}$$

3) Diagrammes de Bode :

بما أن $H(w)$ هي عدد مركب أي له طويلة وزاوية . إذن مخطط Bode هو رسم لكل من $|H(w)|$ بإدخال اللوغاريتم عليها وأيضا رسم الزاوية .

Bode $\rightarrow H_{dB} = 20\log_{10}(|H(w)|)$

Bode $\rightarrow \varphi = \arg(H(w))$

a) H_{dB} :

$$H_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{wRC}{\sqrt{1+(wRC)^2}}\right)$$

$$= 20\log_{10}(wRC) - 20\log_{10}\left(1+(wRC)^2\right)^{1/2}$$

$$H_{dB} = 20\log_{10}(wRC) - 10\log_{10}\left(1+(wRC)^2\right)$$

من أجل رسم HdB نقوم بما يلي :

- $H_{dB}\big|_{w=0} = ?$
- $H_{dB}\big|_{w\to\infty} = ?$
- $H_{dB}\big|_{w=w_c} = ?$
- Pente $= ?$ الميل

- $H_{dB}\big|_{w=0} = ?$

$$H_{dB}\big|_{w=0} = 20\log_{10}\left(\frac{wRC}{\sqrt{1+(wRC)^2}}\right)\Bigg|_{w=0} = -\infty \text{ dB}$$

- $$H_{dB}\big|_{w\to\infty} = 20\log_{10}\left(\frac{wRC}{\sqrt{1+(wRC)^2}}\right)\Bigg|_{w\to\infty} = 20\log_{10}(1) = 0 \text{ dB}$$

- $$H_{dB}\big|_{w=w_c} = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+1^2}}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3 \text{ dB}$$

- Pente $= H_{dB}\big|_{w=w_2} - H_{dB}\big|_{w=w_1}$

مع : $\begin{cases} w_2 = 10\, w_1 \\ w_2 \ll w_c \text{ et } w_1 \ll w_c \end{cases}$

يمكن كتابة HdB كما يلي :

$$H_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{w/w_c}{\sqrt{1+(w/w_c)^2}}\right)$$

$$w_c = \frac{1}{RC}$$

$$w_2 \ll w_c \Rightarrow \frac{w_2}{w_c} \ll 1$$

$$H_{dB}\Big|_{w_2} = 20\log_{10}\left(\frac{w/w_c}{\sqrt{1+\left(\frac{w}{w_c}\right)^2}}\right)\Bigg|_{w=w_2}$$

$$\approx 20\log_{10}\left(\frac{w_2}{w_c}\right) \quad , \left(\frac{w_2}{w_c}\right)^2 \ll 1$$

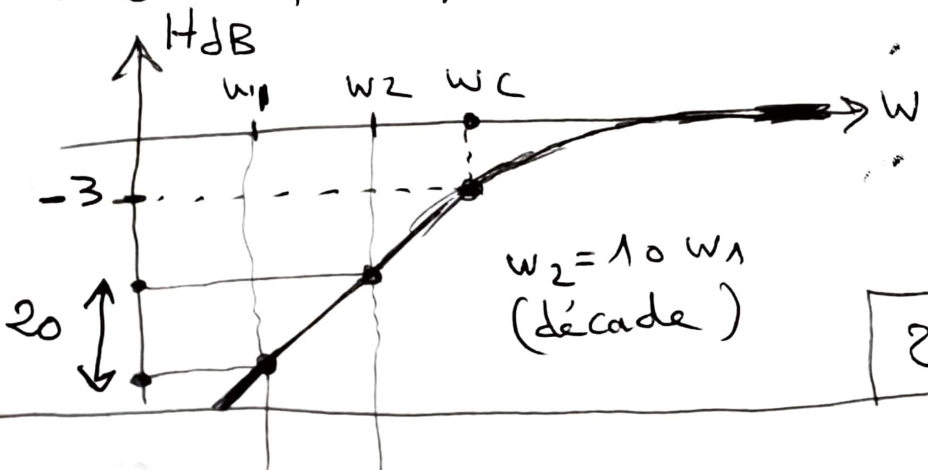
$$H_{dB}\Big|_{w_1} \approx 20\log_{10}\left(\frac{w_1}{w_c}\right)$$

$$\text{Pente} = 20\log_{10}\left(\frac{w_2}{w_c}\right) - 20\log_{10}\left(\frac{w_1}{w_c}\right)$$

$$= 20\log_{10}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) \quad , w_2 = 10 w_1$$

$$= 20\log_{10}\left(10^1\right) = 20$$

$$\text{Pente} = +20 \,/\, \text{décade}$$

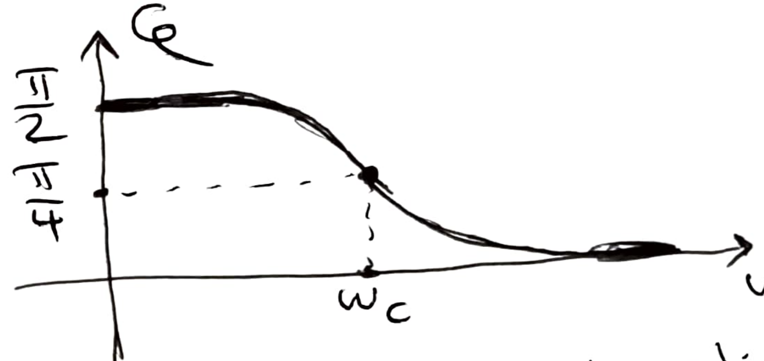


b) $\varphi = \arg\left(H(w)\right)$

$$= \arg\left(\frac{jwRC}{1+jwRC}\right)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(wRC)$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & w = 0 \\ \frac{\pi}{4} & w = w_c \\ 0 & w \to \infty \end{cases}$$



ملاحظة : المحور w يجب أن يكون لوغاريتميا كما هو مبين أسفله: وهذا بالنسبة لـ HdB وأيضا φ.