

## Propriétés des composites

### 1. Les propriétés élastiques

#### 1.1 Loi de comportement élastique linéaire

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. L'expérience montre que de nombreux milieux solides déformables ont, pour une température donnée, un comportement élastique linéaire.

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] \quad \text{eq1.1}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix},$$

$[\sigma]$ : Matrice des contraintes

$[C]$ : Matrice des coefficients élastiques (matrice de rigidité)

$[\varepsilon]$ : Matrice des déformations

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité  $C$ , symétrique.

Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général par 21 coefficients indépendants.

La relation d'élasticité peut s'écrire sous la forme inverse, suivant :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix},$$

Avec  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$  eq.1.2

Les coefficients  $S_{ij}$  sont appelés *constantes de flexibilité* ou *constantes de souplesse*.

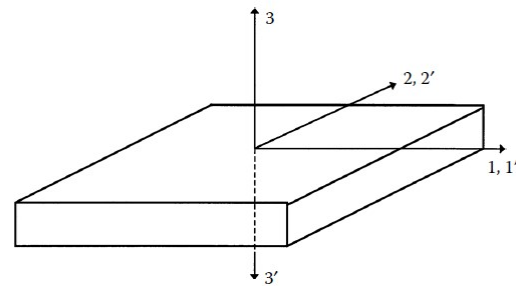
### 1.2. 2 Matériaux anisotropes

Lorsque le matériau est quelconque et ne présente pas de symétrie élastique, il est dit anisotrope. Un matériau anisotrope est caractérisé par 21 constantes élastiques indépendantes.

### 1.2.3 Matériau monoclinique :

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1,2), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}.$$



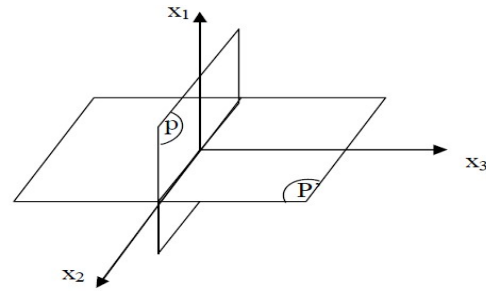
La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

### 1.2.4 Matériau orthotrope

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième : la forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice

dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une matrice de rigidité de la forme :

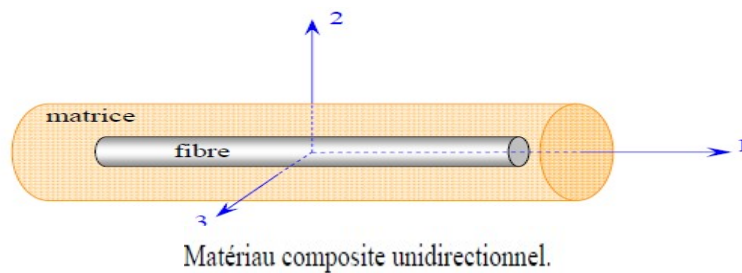
$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$



La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9.

### 1.2.5 Matériau unidirectionnel (orthotrope à isotrope transverse)

Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (ou souplesse).



La matrice de rigidité s'écrit donc suivant :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

et la matrice de souplesse :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}$$

Les propriétés du matériau unidirectionnel sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes.

### 1.2.6 Matériau isotrope

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}.$$

Généralement, les constantes de rigidité sont exprimées en introduisant les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$C_{12} = \lambda, \quad \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}) = \mu,$$

$$C_{11} = \lambda + 2\mu.$$

**Tableau 1** Relation entre les coefficients d'élasticité d'un matériau isotrope

	$\lambda, \mu$	$E, \nu$	$E, G$
$\lambda$	$\lambda$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
$\mu$	$\mu$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$G$
$E$	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$E$	$E$
$\nu$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\nu$	$\frac{E-2G}{2G}$
$k$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{GE}{3(3G-E)}$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

### 1.3 Evaluation des constantes élastiques d'un composite unidirectionnelle

Des expressions simplifiées et pratiques des modules peuvent être obtenues en faisant une approche très simplifiée du comportement mécanique de la cellule élémentaire du matériau composite unidirectionnel.

#### 1.3.1 Module d'Young longitudinal

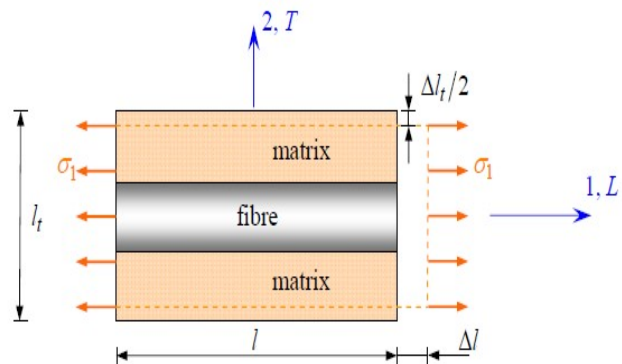
Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinale. L'hypothèse simplificatrice est de supposer une déformation uniforme et identique dans la fibre et dans la matrice.

Par essai de traction, le composite s'allonge d'une quantité  $\Delta L$ , donc on définit une déformation:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l}$$

L'identité de la déformation dans la fibre et dans la matrice impose:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_1.$$



Si la fibre et la matrice ont un comportement élastique, les contraintes dans la fibre et la matrice sont exprimées par :

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_1,$$

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_1.$$

La charge totale appliquée est :

$$F_1 = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m,$$

où  $S_f$  et  $S_m$  sont respectivement les aires des sections droites de la fibre et de la matrice. Si  $S$  est l'aire de la section droite de la cellule moyenne, la contrainte moyenne  $\sigma_1 = F_1/S$  s'écrit :

$$\frac{F_1}{S} = \sigma_f \cdot \frac{S_f}{S} + \sigma_m \cdot \frac{S_m}{S}$$

Ainsi,  $\sigma_1 = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m$  ou encore  $\sigma_1 = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f)$ .

Cette contrainte moyenne est liée à la déformation de la cellule par le module d'Young longitudinal :

$$\sigma_1 = E_L \varepsilon_1.$$

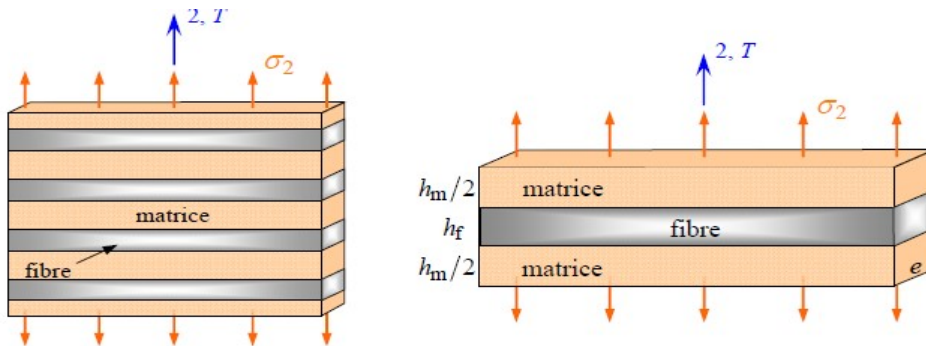
$$E_1 \cdot \varepsilon_1 = E_f V_f \varepsilon_1 + E_m \varepsilon_1 (1 - V_f)$$

$$E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

Cette expression est connue sous le nom de loi des mélanges pour le module d'Young dans la direction des fibres.

### 1.3.2 Module d'Young transversal

Le module d'Young transversal est déterminé dans un essai de traction transversal où le composite est chargé suivant la direction normal de la fibre. On définit :



Schématisation par couches d'un composite unidirectionnel.

$$V_f = \frac{h_f}{h_f + h_m} \quad \text{et} \quad 1 - V_f = \frac{h_m}{h_f + h_m}.$$

La charge  $F_2$  imposée suivant la direction transverse est transmise intégralement dans la fibre et dans la matrice, imposant des contraintes égales :

$$\text{Dans ce cas on a : } \sigma_2 = \sigma_m = \sigma_f$$

Il en résulte que les déformations respectives de la fibre et de la matrice dans la direction transverse s'écrivent :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f}, \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m}.$$

L'allongement transverse d'une cellule élémentaire résulte des allongements cumulés dans la fibre et la matrice. Soit :

$$\Delta l_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m,$$

et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{h_f + h_m} = \varepsilon_f \frac{h_f}{h_f + h_m} + \varepsilon_m \frac{h_m}{h_f + h_m}.$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f).$$

Cette déformation est liée à la contrainte imposée sur la cellule, par le module transverse :

$$\sigma_2 = E_T \varepsilon_2.$$

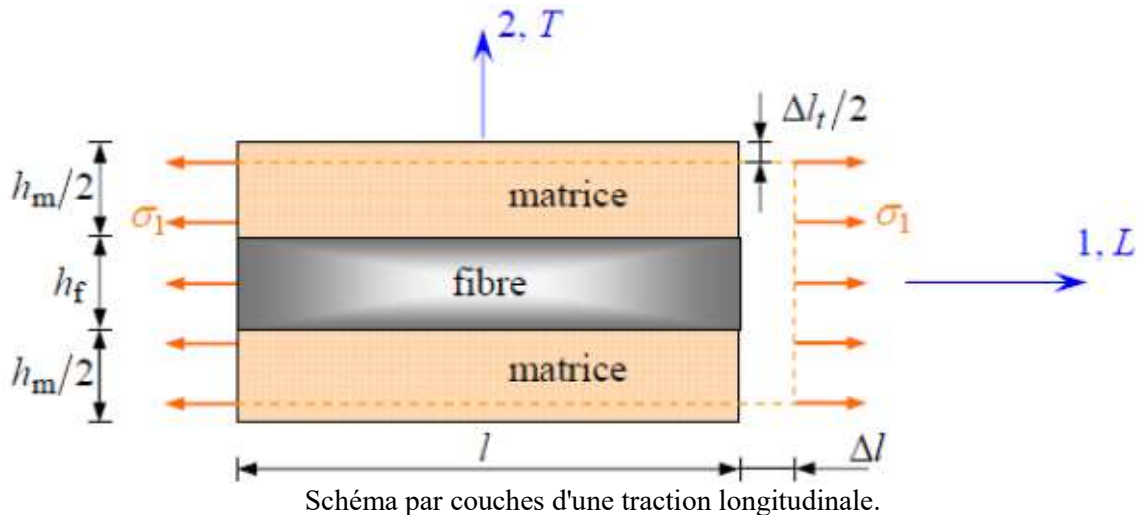
$$\boxed{\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m}.}$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi inverse des mélanges* et peut être réécrite, en rapportant le module transverse au module d'Young de la matrice, suivant une relation sans dimension sous la forme :

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1}{1 + \left( \frac{E_m}{E_f} - 1 \right) V_f}$$

### 1.3.3 Coefficient de Poisson longitudinal

Pour déterminer le coefficient de Poisson longitudinal  $\nu_{LT}$ , nous reprenons le schéma précédent dans lequel le composite unidirectionnel est schématisé par couches successives. Le coefficient  $\nu_{LT}$  est déterminé dans un essai de traction longitudinale.



La fibre et la matrice subissent des déformations identiques. Il en résulte que les déformations transverse dans la matrice et dans les fibres s'écrivent :

$$\varepsilon_{2m} = -\nu_m \varepsilon_l$$

$$\varepsilon_{2f} = -\nu_f \varepsilon_l$$

L'allongement transverse de la cellule élémentaire est

$$\Delta l_t = -\nu_m \varepsilon_l h_m - \nu_f \varepsilon_l h_f$$

et la déformation transverse s'écrit:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_t}{h_f + h_m} = -[\nu_m (1 - V_f) + \nu_f V_f] \varepsilon_1$$

D'où l'expression du coefficient de poisson:

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f)$$

Cette expression est la loi des mélanges pour le coefficient de Poisson longitudinal.



La variation de  $\nu_{LT}$  en fonction de la fraction volumique de fibres est linéaire entre  $\nu_m$  et  $\nu_f$ . Dans la pratique, les valeurs de  $\nu_m$  et  $\nu_f$  sont assez proches (voisines de 0,3). Le coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$  restera donc également proche de cette valeur.

### **Module de cisaillement longitudinal**

Le module de cisaillement longitudinal  $G_{LT}$  est déterminé dans un essai de cisaillement longitudinal schématisé sur la figure 9.17, en utilisant à nouveau la modélisation par couches du composite unidirectionnel. Les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales, du fait des contraintes  $\sigma$  imposées sur la cellule. Les déformations en cisaillement de la fibre et de la

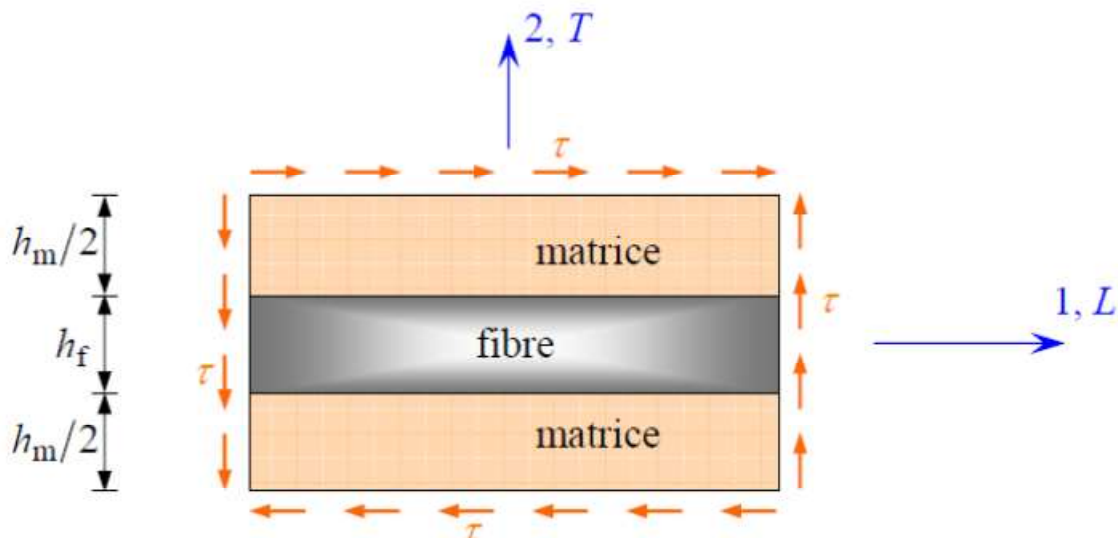


Schéma par couches d'un essai de cisaillement longitudinal.

Matrice s'expriment donc suivant:

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad \text{et} \quad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m}$$

Les déformations induites dans la fibre et dans la matrice sont:

$$\delta_f = h_f \gamma_f \quad \text{et} \quad \delta_m = h_m \gamma_m$$

La déformation totale de la cellule est

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f \gamma_f + h_m \gamma_m$$

et l'angle de cisaillement de la composite est déterminée par l'expression:

$$\gamma = \frac{\delta}{h_f + h_m} = \gamma_f V_f + \gamma_m (1 - V_f)$$

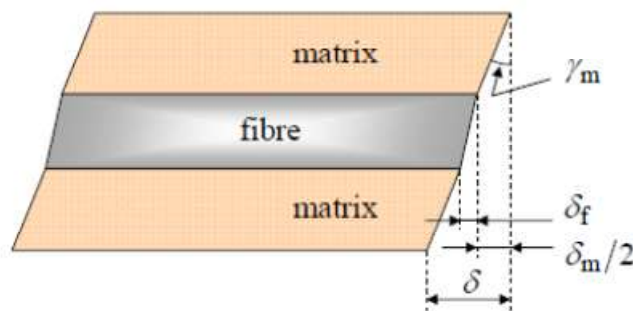
Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement longitudinal  $G_{LT}$  suivant la relation:

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}}$$

Nous obtenons:

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1 - V_f}{G_m}$$

Cette expression a une forme identique à celle obtenue pour le module d'Young transverse. Les mêmes considérations peuvent être transposées ici.



Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre.

## 2. Propriétés de la rupture

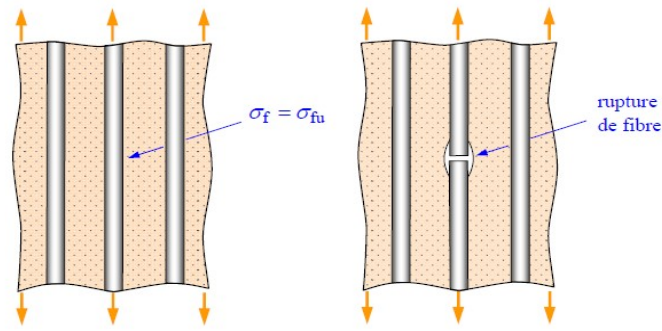
### 2.1. Divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes élémentaires :

- la rupture des fibres,
- la rupture transverse de la matrice,
- la rupture longitudinale de la matrice,
- la rupture de l'interface fibre-matrice.

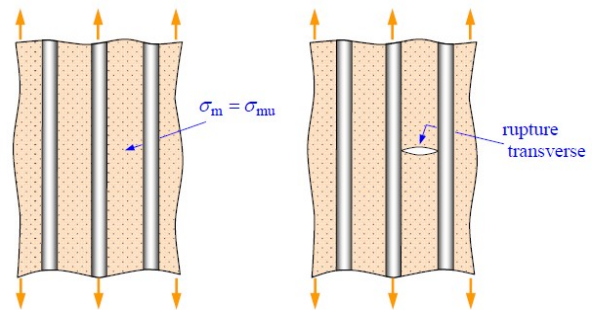
#### 2.1.1 Rupture de fibre

Dans un matériau composite unidirectionnel soumis à des sollicitations mécaniques, la rupture des fibres intervient lorsque la contrainte de traction dans une fibre  $\sigma_f$  atteint la contrainte à la rupture de la fibre  $\sigma_{fu}$ .



### 1.2 Fissuration transverse de la matrice

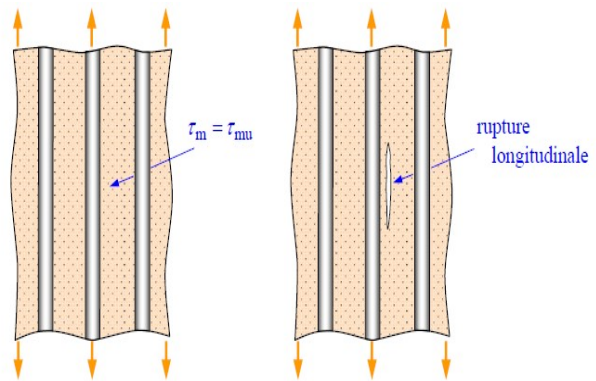
Lorsque la contrainte en traction dans la matrice atteint la contrainte à la rupture de la matrice.



Fissuration transverse de la matrice

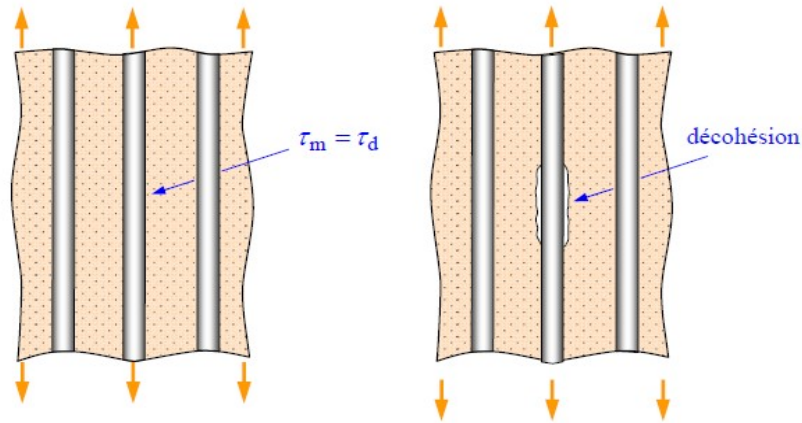
### 2.3 Fissuration longitudinale de la matrice.

lorsque la contrainte de cisaillement dans la matrice atteint la contrainte en cisaillement à la rupture.



Fissuration longitudinale de la matrice

Au voisinage d'une fibre la rupture de la matrice se produit lorsque la contrainte de décohesion est supérieure à la contrainte en cisaillement à la rupture de la matrice. Dans le cas contraire, il se produit une rupture par décohesion de l'interface fibre-matrice.

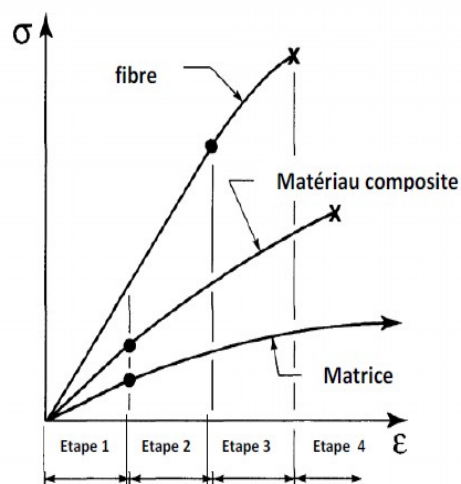


Décohésion fibre-matrice

### 2.1 Composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale

Un matériau composite renforcé par des fibres unidirectionnelles, se déforme en fonction de l'augmentation de charge en suivant quatre étapes, et selon la fragilité relative ou la ductilité des fibres et de la matrice :

- Les deux constituants : fibres et matrice se déforment élastiquement.
- Les fibres continuent à se déformer élastiquement, mais la matrice se déforme d'une manière plastique.
- les fibres et la matrice se déforment plastiquement.
- La rupture des fibres conduit à la rupture totale du matériau composite.



les étapes de déformation d'un matériau composite fibreux.

Dans le cas d'un composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale, l'initiation de la rupture se produit généralement soit par rupture des fibres lorsque la déformation à la rupture des fibres est plus faible que celle de la matrice  $\varepsilon_{fu} \leq \varepsilon_{fm}$ , soit par rupture transverse de la matrice dans le cas contraire.

En admettant l'égalité des déformations dans la fibre et dans la matrice:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f + (\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}} (1 - V_f)$$

où  $\sigma_{cu}$  est la contrainte à la rupture du composite,  $\sigma_{fu}$  la contrainte à la rupture des fibres et  $(\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}}$  la contrainte dans la matrice pour une déformation égale à la déformation  $\varepsilon_{fu}$  à la rupture des fibres. La contrainte  $(\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}}$  est inférieure à la contrainte à la rupture  $\sigma_{mu}$  de la matrice, d'où :

$$\sigma_{cu} \leq \sigma_{fu} V_f + \sigma_{mu} (1 - V_f)$$

Généralement, l'expression retenue pour la contrainte à la rupture du composite est la loi des mélanges :

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f + \sigma_{mu} (1 - V_f)$$

avec pour les fractions usuelles de fibres

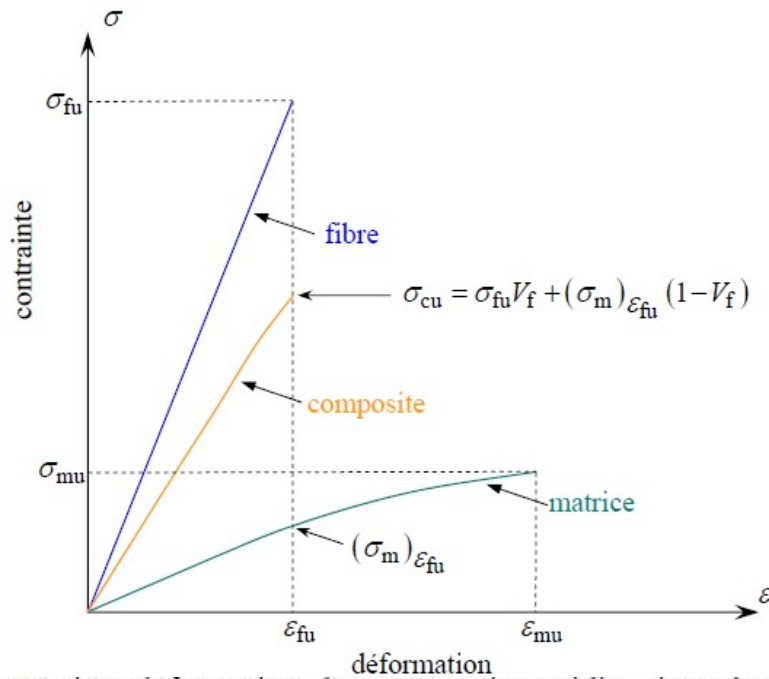
$$\sigma_{cu} \approx \sigma_{fu} V_f$$

Dans laquelle la résistance à la traction de la matrice a été ignorée car elle est très inférieure à la résistance à la traction de la fibre.

Dans le cas où la déformation à la rupture de la matrice est inférieure à celle des fibres

la contrainte à la rupture est donnée par l'expression

$$\sigma_{cu} = (\sigma_f)_{\varepsilon_{mu}} V_f + \sigma_{mu} (1 - V_f)$$



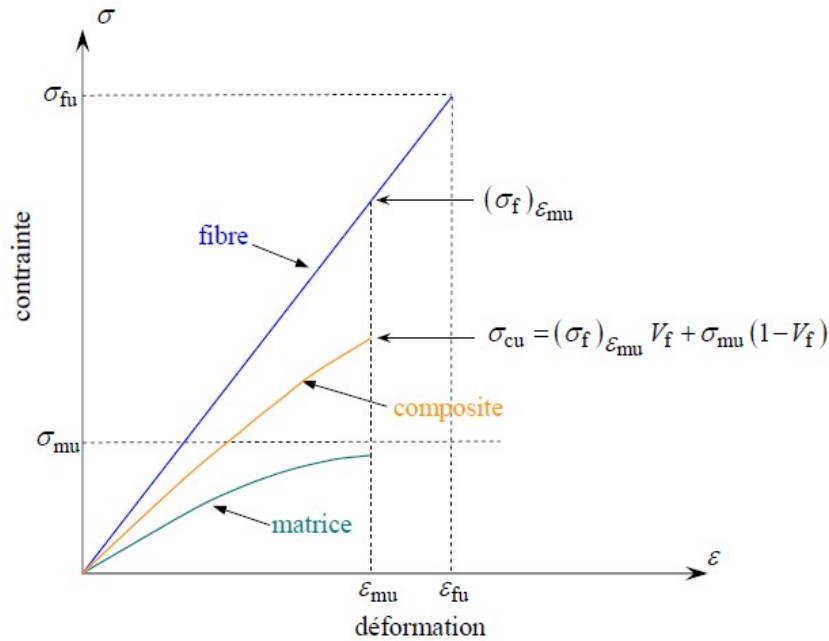
Courbe contrainte-déformation d'un composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale, dans le cas où  $\varepsilon_{fu} < \varepsilon_{mu}$ .

où  $(\sigma_f)_{\varepsilon_{mu}}$  est la contrainte dans la fibre au moment de la rupture de la matrice. La valeur de la contrainte à la rupture du matériau composite est alors bien inférieure à celle donnée par l'expression

- pour les fibres de carbone :
  - à haute résistance (HS) :  
 $E_f = 220 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_{fu} = 3\,000 \text{ à } 4\,000 \text{ MPa}$ , soit  $\varepsilon_{fu} = 1,4 \text{ à } 1,8 \%$  ;
  - à haut module (HM) :  
 $E_f = 400 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_{fu} \approx 2\,200 \text{ MPa}$ , soit  $\varepsilon_{fu} = 0,5 \%$  ;
- pour les fibres de verre E :  
 $E_f = 70 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_{fu} = 2\,400 \text{ à } 3\,400 \text{ MPa}$ , soit  $\varepsilon_{fu} = 3,4 \text{ à } 4,8 \%$ .

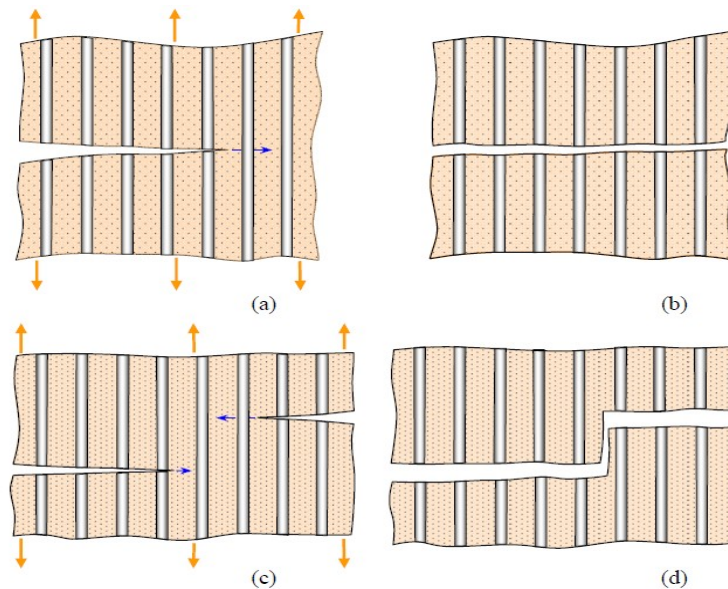
L'allongement à la rupture des résines usuelles est :

- pour les polyesters rigides :  $\varepsilon_{mu} = 2 \text{ à } 5 \%$ ,
- pour les résines phénoliques :  $\varepsilon_{mu} \approx 2,5 \%$ ,
- pour les résines époxydes :  $\varepsilon_{mu} = 2 \text{ à } 5 \%$ .



Courbe contrainte-déformation d'un composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale, dans le cas où  $\epsilon_{fu} > \epsilon_{mu}$ .

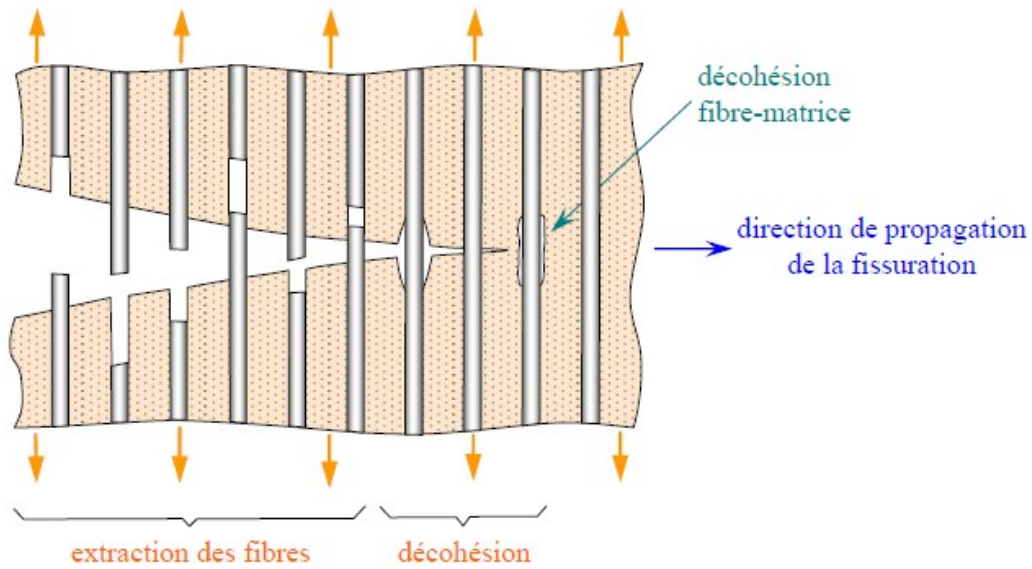
La propagation de la rupture diffère suivant la nature de l'interface fibre-matrice. **Dans le cas d'une adhérence fibre-matrice élevée**, la rupture initiée, soit par rupture des fibres, soit par rupture de la matrice, induit en front de fissure des concentrations de contraintes conduisant à une propagation de la rupture successivement dans les fibres et dans la matrice.



Propagation de la rupture dans le cas d'une forte adhérence fibre-matrice.

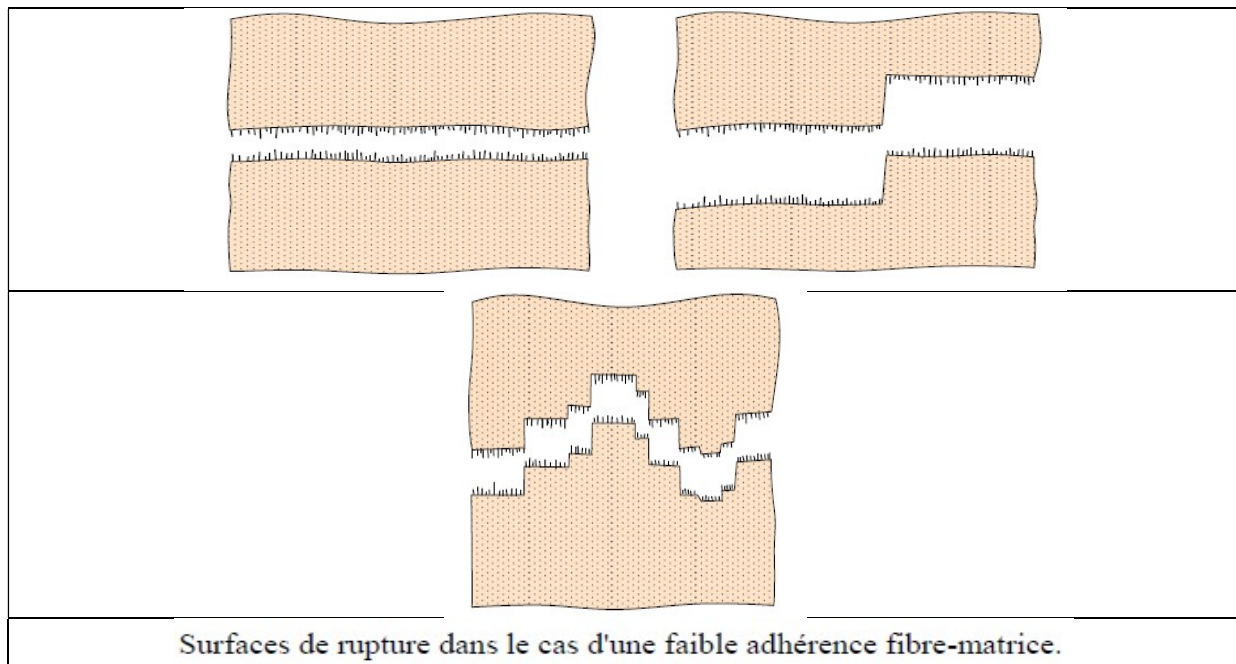
Dans le cas d'une faible adhérence fibre-matrice, la propagation transverse de la fissuration peut être schématisée de la manière suivante. En tête de fissure, la rupture de la matrice traverse les fibres, sans qu'il y ait rupture des fibres, mais avec décohésion de l'interface fibre-

matrice. Dans certains cas, les concentrations de contraintes en tête de fissure peuvent conduire à une décohésion fibre-matrice avant rupture transverse de la matrice. En arrière, l'ouverture de la fissure induit des contraintes élevées dans les fibres pontant la fissure.

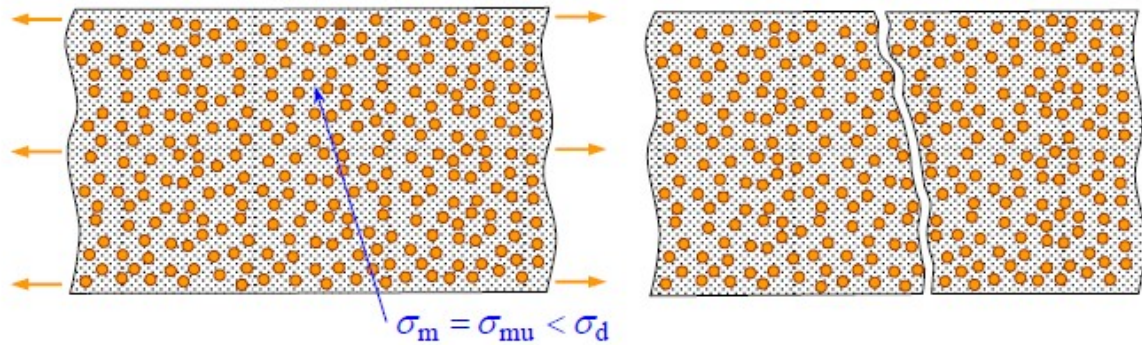


Propagation de la rupture dans le cas d'une faible adhérence fibre-matrice.

Le pontage des fissures transversales peut se faire par propagation de la rupture à l'interface fibre-matrice, conduisant à un profil plus ou moins en escalier de la surface de rupture.



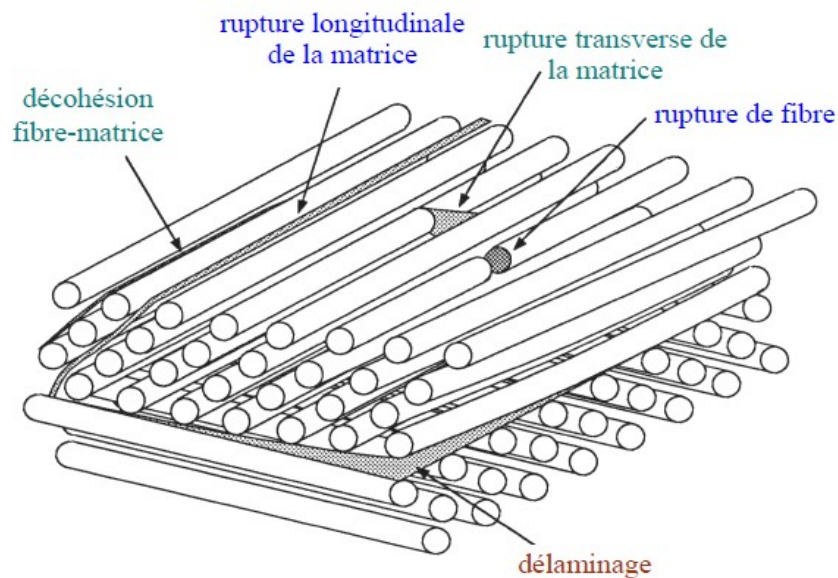




Rupture d'un composite unidirectionnel soumis à une traction transverse.

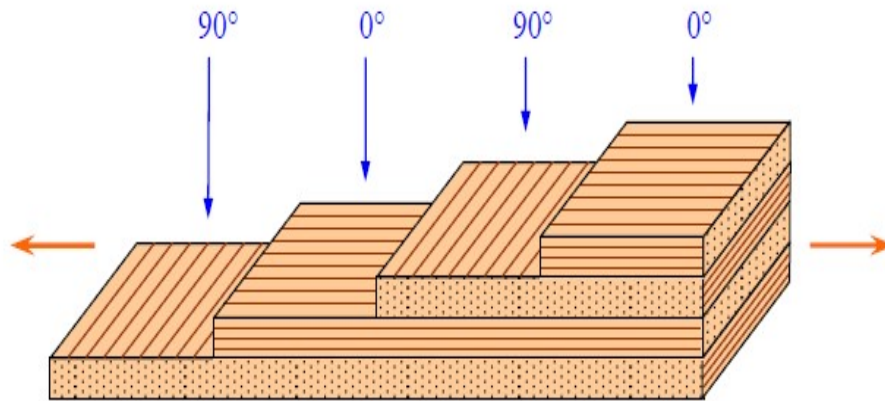
## 2.2. Divers mécanismes de rupture dans un composite stratifiés

Dans le cas de stratifiés, aux mécanismes élémentaires décrits précédemment (décohésion fibre-matrice, rupture longitudinale de la matrice, rupture transverse de la matrice, rupture de fibres), s'ajoute (un mécanisme de rupture entre les couches, appelé rupture par *délaminage*). Les mécanismes de rupture induits dépendent de la nature des constituants, de l'architecture des couches et du mode de sollicitation mécanique imposé.



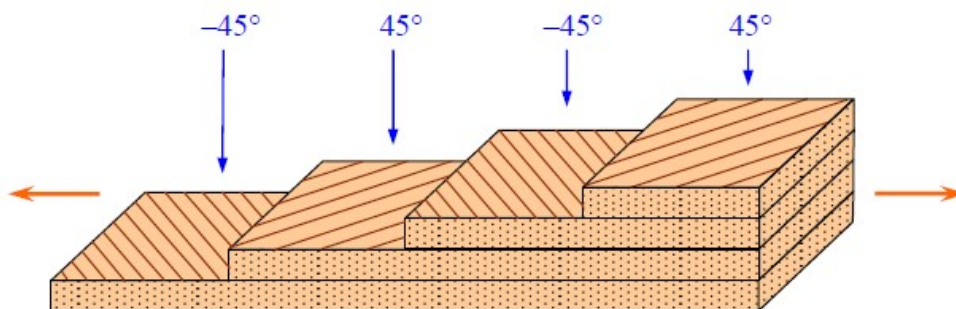
Mécanismes de rupture observés dans les stratifiés.

- Le cas d'un stratifié croisé soumis à une traction dans la direction  $0^\circ$ , le premier phénomène de rupture observé est celui de la fissuration des couches orientées à  $90^\circ$ . La fissuration se produit par rupture longitudinale de la matrice ou/et par rupture de l'interface fibre-matrice dans les couches orientées à  $90^\circ$ .

Stratifié croisé soumis à une traction dans la direction  $0^\circ$ .

Cette fissuration conduit à la formation de fissures orientées transversalement à la direction du chargement mécanique. **Cette fissuration initiale des couches à  $90^\circ$  est appelée fissuration transverse du stratifié croisé.** Lorsque le chargement mécanique est augmenté, le nombre de fissures croît jusqu'à atteindre un état de saturation de la fissuration. Les fissures transverses créent en pointes de fissures, entre les couches orientées à  $90^\circ$  et à  $0^\circ$ , des concentrations de contraintes qui conduisent à l'initiation puis à **la propagation du délaminage à l'interface entre les couches.** Ce délaminage se développe ensuite jusqu'à la rupture finale du stratifié par rupture des fibres et de la matrice dans les couches à  $0^\circ$ .

- Dans le cas d'un stratifié croisé  $\pm 45^\circ$ , soumis à une traction longitudinale dans la direction  $0^\circ$  (figure on observe d'abord une rupture longitudinale dans les couches à  $\pm 45^\circ$ , suivie d'un délaminage entre les couches.

Stratifié croisé  $\pm 45^\circ$  soumis à une traction dans la direction  $0^\circ$ .

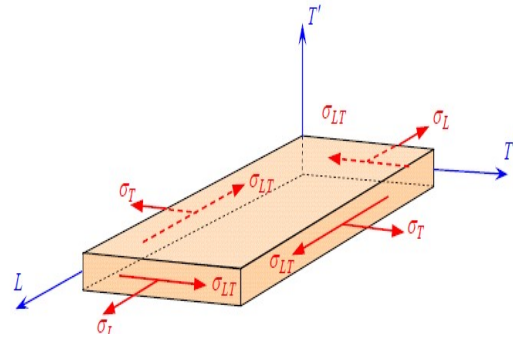
### 2.3 Critères de rupture

Les critères de rupture sont établis dans le cas d'une couche d'un stratifié et peuvent être classés suivant :

- des critères en contraintes maximales,
- des critères en déformations maximales,
- des critères interactifs, souvent appelés critères énergétiques.

#### 2.3.1 Critères en contraintes maximales (critères dans les axes principaux)

$$\begin{aligned}
 -X_c &< \sigma_L < X_t, \\
 -Y_c &< \sigma_T < Y_t, \\
 -S &< \sigma_{LT} < S.
 \end{aligned}$$



Contraintes dans les axes des matériaux d'une couche.

$X_t, X_c$  : les contraintes à la rupture suivant l'axe longitudinal respectivement en traction et en compression,

$Y_t, Y_c$  : les contraintes à la rupture suivant l'axe transversal respectivement en traction et en compression,

$S$  : la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

Les grandeurs à la rupture sont les valeurs positives des contraintes à la rupture mesurées dans des essais de traction, compression ou cisaillement.

Dans le cas d'une couche soumise à un état de contraintes planes ( $\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT}$ ) dans les axes des matériaux, les critères en contraintes maximales stipulent que la résistance mécanique de la couche est atteinte lorsque l'une des trois contraintes auxquelles la couche est soumise atteint la valeur de la contrainte à la rupture

Si les six inéquations sont vérifiées, l'état de contraintes limite n'est pas atteint : la rupture de la couche ne se produit pas. Si l'une quelconque des inéquations n'est plus vérifiée, l'état limite est atteint : la rupture se produit suivant le mécanisme correspondant à la contrainte de l'inéquation non vérifiée.

Dans le cas où l'allongement à la rupture de la matrice est supérieur à celui des fibres), la contrainte à la rupture en traction longitudinale d'un composite unidirectionnel suit la loi des mélanges, soit:

$$X_t = \sigma_{fu} V_f + (\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}} (1 - V_f),$$

avec pour des fractions usuelles de fibres :

$$X_t \approx \sigma_{fu} V_f.$$

### 2.3.2 -Critères en déformations maximales (Critère dans les axes des matériaux)

$X_{\varepsilon t} (X_{\varepsilon c})$  : la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe longitudinal,

$Y_{\varepsilon t} (Y_{\varepsilon c})$  : la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe transversal,

$S_{\varepsilon}$  : la déformation à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

La résistance mécanique est alors considérée comme étant atteinte, lorsque l'une des déformations principales atteint la déformation à la rupture correspondante. Les critères en déformations maximales s'écrivent donc sous la forme :

$$\begin{aligned} -X_{\varepsilon c} < \varepsilon_L < X_{\varepsilon t}, & \quad X_{\varepsilon t} = \frac{X_t}{E_L}, & \quad X_{\varepsilon c} = \frac{X_c}{E_L}, \\ -Y_{\varepsilon c} < \varepsilon_T < Y_{\varepsilon t}, & & \\ -S_{\varepsilon} < \gamma_{LT} < S_{\varepsilon}, & \quad Y_{\varepsilon t} = \frac{Y_t}{E_T}, & \quad Y_{\varepsilon c} = \frac{Y_c}{E_T}, & \quad S_{\varepsilon} = \frac{S}{G_{LT}}. \end{aligned}$$

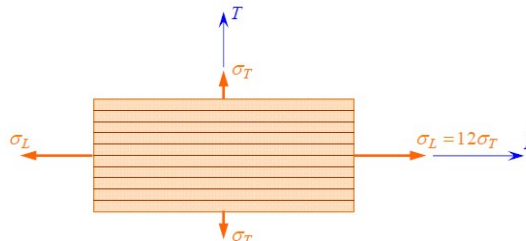
**2.4 -Comparaison entre les critères en contraintes et en déformations maximales**

Nous considérons l'exemple d'une couche sollicitée dans un état de contraintes planes tel que

La couche est constituée d'un composite unidirectionnel à fibres de verre E dont les caractéristiques à la rupture et les modules d'élasticité sont:

$$\sigma_L = 12\sigma_T \quad \text{et} \quad \sigma_{LT} = 0.$$

La couche est constituée d'un composite unidirectionnel à fibres de verre E dont les caractéristiques à la rupture et les modules d'élasticité sont:



Couche sollicitée suivant un état de contraintes planes.

$$\begin{aligned} X_t &= 1\,400 \text{ MPa}, & Y_t &= 35 \text{ MPa}, & S &= 70 \text{ MPa}, \\ E_L &= 46 \text{ GPa}, & E_T &= 10 \text{ GPa}, & G_{LT} &= 4,6 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,31. \end{aligned}$$

Nous cherchons les valeurs de  $\sigma_L$  et  $\sigma_T$  ( $\sigma_L = 12\sigma_T$ ) pour lesquelles la rupture est atteinte.

**a. Utilisation des critères en contraintes maximales**

Les critères en contraintes maximales s'écrivent ici :

$$\sigma_L < X_t, \quad \sigma_T < Y_t.$$

$$\begin{cases} 12\sigma_T < X_t \\ \sigma_T < Y_t, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sigma_T < \frac{1}{12} X_t = 117 \text{ MPa} \\ \sigma_T < Y_t = 35 \text{ MPa}. \end{cases}$$

La valeur de la contrainte limite est donnée par la plus petite des deux valeurs. Il en résulte que la rupture est atteinte par rupture transversale. L'état des contraintes est alors :

$$\begin{aligned} \sigma_L &= 12 \times 35 = 420 \text{ MPa}, \\ \sigma_T &= 35 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

**b. Utilisation des critères en contraintes maximales**

Les critères en contraintes maximales s'écrivent ici :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_L &= S_{11}\sigma_L + S_{12}\sigma_T = \frac{1}{E_L}(\sigma_L - \\ \varepsilon_T &= S_{12}\sigma_L + S_{22}\sigma_T = \frac{1}{E_T}(-\nu_{TL} \end{aligned}$$

En admettant que le comportement du matériau est linéaire jusqu'à la rupture

$$\sigma_L - \nu_{LT}\sigma_T < X_t,$$

$$-\nu_{TL}\sigma_L + \sigma_T < Y_t.$$

Soit, puisque  $\sigma_L = 12\sigma_T$  :

$$\sigma_L < \frac{X_t}{12 - \nu_{LT}} = 120 \text{ MPa},$$

$$\sigma_T < \frac{Y_t}{1 - 12\nu_{TL}} = 183 \text{ MPa},$$

$$\nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}.$$

$$\sigma_L = 1440 \text{ MPa}, \quad \sigma_T = 120 \text{ MPa}.$$

## 2.4-Critères interactifs

Les critères en contraintes maximales et en déformations maximales ne permettent pas de rendre compte de l'ensemble des résultats expérimentaux. D'autre part, ces critères excluent l'existence d'interactions entre les contraintes ou déformations dans les axes des matériaux : les mécanismes de rupture longitudinale, transversale ou en cisaillement sont supposés se produire indépendamment.

### 2.4.1 Critère de Hill

Un des premiers critères interactifs de rupture appliqués aux matériaux anisotropes a été introduit par R. Hill .Ce critère peut être formulé en disant que l'état limite de contraintes d'un matériau anisotrope n'est pas atteint tant que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} F(\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + G(\sigma_{T'} - \sigma_L)^2 + H(\sigma_L - \sigma_T)^2 \\ + 2L\sigma_{T'}^2 + 2M\sigma_{L'}^2 + 2N\sigma_{L'}^2 < 1. \end{aligned}$$

La rupture du matériau se produit donc lorsque l'égalité est vérifiée, soit :

$$\begin{aligned} F(\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + G(\sigma_{T'} - \sigma_L)^2 + H(\sigma_L - \sigma_T)^2 \\ + 2L\sigma_{T'}^2 + 2M\sigma_{L'}^2 + 2N\sigma_{L'}^2 = 1. \end{aligned}$$

Cette égalité constitue le critère de Hill, rapporté aux axes principaux  $(L, T, T')$  du matériau. Il peut également être mis sous une autre forme suivant :

$$(G+H)\sigma_L^2 + (F+H)\sigma_T^2 + (F+G)\sigma_{T'}^2 - 2H\sigma_L\sigma_T - 2G\sigma_L\sigma_{T'} - 2F\sigma_T\sigma_{T'} + 2L\sigma_{TT'}^2 + 2M\sigma_{LT'}^2 + 2N\sigma_{LT}^2 = 1.$$

Les paramètres  $F, G, H, L, M$  et  $N$  sont des paramètres caractéristiques du matériau considéré, qui sont reliés aux contraintes à la rupture  $X, Y$  et  $S$  du matériau

Dans le cas d'un essai de traction (ou compression) dans la direction  $L$ , le critère de Hill se réduit à :

$$G+H = \frac{1}{X^2},$$

où  $X$  est la contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction  $L$ . De même, on trouve :

$$F+H = \frac{1}{Y^2},$$

$$F+G = \frac{1}{Z^2},$$

où  $Y$  et  $Z$  sont les contraintes à la rupture en traction (ou en compression) dans les directions  $T$  et  $T'$ .

Dans le cas d'un essai de cisaillement dans le plan  $(L, T)$ , le critère de Hill se réduit à :

$$2N = \frac{1}{S_{LT}^2},$$

où  $S_{LT}$  est la contrainte de rupture en cisaillement dans le plan  $(L, T)$ . De même :

$$2M = \frac{1}{S_{LT'}^2},$$

$$2L = \frac{1}{S_{TT'}^2},$$

où  $S_{LT'}$  et  $S_{TT'}$  sont les contraintes de rupture en cisaillement, respectivement dans les plans  $(L, T')$  et  $(T, T')$ .

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{T'}}{Z}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_L\sigma_T - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}\right)\sigma_L\sigma_{T'} - \left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}\right)\sigma_T\sigma_{T'} + \left(\frac{\sigma_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{LT'}}{S_{LT'}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{TT'}}{S_{TT'}}\right)^2 = 1.$$

Il est à noter que le critère de Hill ne prend pas en compte la différence du comportement des matériaux en traction et compression.

Dans le cas d'un état de contraintes planes dans le plan  $(L, T)$  de la couche de matériau composite :  $\sigma_{T'} = \sigma_{LT'} = \sigma_{TT'} = 0$ , le critère de Hill se simplifie suivant :

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_L\sigma_T + \left(\frac{\sigma_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 = 1.$$

### 2.4.2 Critère de Tsai-Hill

Le critère de rupture précédent en contraintes planes a été simplifié par Tsai dans le cas de matériaux composites unidirectionnels. En effet, dans ce cas :  $Z = Y$ , et le critère s'écrit :

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_L\sigma_T}{X^2} + \left(\frac{\sigma_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 = 1.$$