Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

Soient $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E une partie non vide de $\mathbb{K}$. On considère l'ensemble des fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$, noté par $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$.

2.1 Suites de fonctions

Définition 2.1 *Une application $f : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(E,\mathbb{K})$ s'appelle suite de fonctions sur E, on la note par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou f_n.*

Pour tout x fixé dans E, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique .

Exemple 2.1 *:*

- $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2}, \quad \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$
- $g_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{inx}}{n}, \quad \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

2.1.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 2.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans $\mathbb{K}$.*
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $D \subseteq E$ si pour tout $x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ et on écrit :

$$\{f_n \to f\} \iff \{\forall \epsilon > 0, \forall x \in D, \exists n_0 = n_0(\epsilon, x) : \forall n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\}.$$

- *La fonction f s'appelle la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur D.*

- *Le plus grand sous-ensemble $D \subseteq E$ des points $x \in D$ tel que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$, s'appelle domaine de convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exemple 2.2 *Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{-nx} \end{array}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 0 & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ +\infty & si\ x < 0 \end{cases}$$

donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

On remarque que la fonction f n'est pas continue par contre les fonctions f_n sont continues.

Exemple 2.3 *Soit la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où*

$$\begin{array}{rccc} g_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sin nx}{n} \end{array}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0,$$

donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $g = 0$.

On remarque que toutes fonctions g_n sont continument dérivables sur $\mathbb{R}$, mais la suite des dérivées $\left(g_n'\right)$ n'a pas de limite, c-à-d :

$$\lim_{n\to+\infty} g_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \cos nx \quad n'existe\ pas.$$

Remarque 2.1 *La convergence simple ne conserve pas les propriétés des fonctions : continuité, intégrabilité, dérivabilité.*

2.1.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 2.3 *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $f_n \in \mathcal{F}(E,\mathbb{K})$) est dite uniformément convergente sur $D \subseteq E$ vers la fonction f si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in D, \forall n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

C-à-d :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

et on écrit $f_n \rightrightarrows f$ sur D.

De plus l'ensemble D sera dit le domaine de convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour prouver la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) sur l'ensemble D d'après la définition 2.3, on doit suivre les étapes suivants :

1. Trouver la fonction f par l'étude de la convergence simple.
2. Détermination de la suite (u_n) telle que $u_n = \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Ceci justifie que la convergence uniforme est plus difficile à vérifier que la convergence simple.

Remarque 2.2 *Dans la définition de la convergence simple, n_0 dépend de x et de ϵ par contre dans la définition de la convergence uniforme, n_0 dépend seulement de ϵ et commun pour tous les x de D, ce qui est traduit graphiquement qu'à partir d'un certain rang n_0, les courbes des fonctions f_n s'insèrent dans une bande de largeur 2ϵ autour de la courbe de f.*

Proposition 2.1 *La limite unifome (simple) d'une suite de fonctions si elle existe elle est unique.*

Proposition 2.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions (où $f_n \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})$).*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D ssi il existe une suite positive $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers zéro vérifiant :*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq W_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D.$$

2. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur D ssi il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0$.*

Démonstration. *C'est évident car :*

1. *Ona* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$.
2. *Ona* $0 < \lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty$ ∎

Exemple 2.4 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[0, 2\pi[$ par :*

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = 0.$$

De plus

$$\sup_{x\in[0,2\pi[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi[} \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,2\pi[} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Ce qui traduit la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 2.5 *Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :*

$$g_n(x) = \frac{2nx}{1+x^2n^2}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2nx}{1+x^2n^2} = 0 = g(x).$$

Posons $x_n = \dfrac{1}{n} \in [0,1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} |g_n(x_n) - g(x_n)| = \lim_{n\to+\infty} \left| g_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 1.$$

Donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Proposition 2.3 *La convergence uniforme d'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique sa convergence simple.*

L'inverse n'est pas toujours vrais.

Démonstration. Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D.

$$\begin{aligned}
f_n \rightrightarrows f \text{ sur } D \quad &\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.\\
&\Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall n > n_0 \implies \|f_n - f\|_\infty < \epsilon.\\
&\Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall n > n_0 \implies \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.\\
&\Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in D, \forall n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.
\end{aligned}$$

■

Exemple 2.6 *Soit $f_n(x) = x^n, \forall x \in [0,1]$.*

La suite de fonction (f_n) converge simplement sur $[0,1]$, puisque on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Mais

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} |x^n| = 1,$$

donc la convergence n'est pas uniforme.

Si on restreint à l'intervalle $[0,a]$ *où* $0<a<1$ *on aura :*

$$\forall n\in\mathbb{N} : \text{(n fixé)} \sup_{x\in[0,a]} |x^n| = a^n,$$

et comme

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,a]} x^n = \lim_{n\to+\infty} a^n = 0.$$

donc $f_n \rightrightarrows 0$ *sur* $[0,a]\,, \forall a\in\,]0,1[$.

On sait qu'une suite numérique de nombres réels ou complexes converge ssi est une suite de cauchy, ce qui conduit au résultat suivant :

Théorème 2.1 (Critère de Cauchy uniforme) *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions (où* $f_n\in\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$*) et soit* $D\subseteq E$*. Alors pour que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* f *sur* D *il faut et il suffit que :*

$$\forall\epsilon>0, \exists n_0=n_0(\epsilon) : \forall x\in D, \forall m>n>n_0 \implies |f_m(x)-f_n(x)|<\epsilon.$$

Démonstration.

1. Supposons que $f_n \rightrightarrows f$ sur J alors

   $$\forall\epsilon>0, \exists n_0=n_0(\epsilon) : \forall x\in D, \forall n>n_0 \implies |f_n(x)-f(x)|<\epsilon/2.$$

   Par suite $\forall x\in D, \forall m>n>n_0$ on a

   $$\begin{aligned}|f_m(x)-f_n(x)| &\le |f_m(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)| \\ &< \epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon\end{aligned}$$

2. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition de Cauchy :

   $$\forall\epsilon>0, \exists n_0=n_0(\epsilon) : \forall x\in D, \forall m>n>n_0 \implies |f_m(x)-f_n(x)|<\epsilon,$$

alors pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ce qui implique qu'elle est convergente c-à-d $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Comme

$$\forall m > n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

Si

$$m \to +\infty, \forall n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Mais $x \in D$ est arbitraire et n_0 ne dépent pas de x, donc

$$\forall n > n_0 \implies \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

i.e $f_n \rightrightarrows f$ sur D. ■

Proposition 2.4 *Soient $f_n, g_n \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$, si les deux suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $D \subseteq E$ vers f et g (resp) alors la suite $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $D \subseteq E$ vers la fonction $\alpha f + \beta g$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})$.*

Démonstration. C'est évident car on a :

$$\|(\alpha f_m + \beta g_m) - (\alpha f_n + \beta g_n)\|_\infty \leq |\alpha| \, \|f_m - f_n\|_\infty + |\beta| \, \|g_m - g_n\|_\infty$$ ■

Remarque 2.3 *La suite du produit $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement uniformément convergente.*

Exemple 2.7 *Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que*

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x + \frac{1}{n} = x = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors $f_n \to f$ *sur* $\mathbb{R}$*. En plus, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| \leq \left|\frac{1}{n}\right| \implies f_n \rightrightarrows f \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Mais la suite (f_n^2) *ne converge pas uniformément vers* f^2 *sur* $\mathbb{R}$ *puisque*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n^2(x) - f^2(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{2xn+1}{n^2}\right| = +\infty$$

2.1.3 Théorèmes fondamentaux sur la convergence uniforme des suites de fonctions

Théorème 2.2 (de continuité) *Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle (ouvert, fermé ou semi ouvert) non réduit à un point et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues sur* I*, convergente uniformément vers une fonction* f *sur* I *alors* f *est une fonction continue sur* I*.*
De plus

$$\forall a \in \overline{I} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right). \tag{2.1}$$

Démonstration. Si $f_n \rightrightarrows f$ sur I alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in I, \forall n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3. \tag{2.2}$$

De plus si f_n est continue en $x_0 \in I$ alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon), \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/3. \tag{2.3}$$

De (2.2) et (2.3) on déduit $\forall x \in I : |x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

d'où la continuité de f en tout $x_0 \in I$.

Montrons l'égalité (2.1).

1. Si $a \in I$ alors d'après la continuité des fonctions f_n et f en a, on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to a} f_n(x) = f_n(a),$$

donc

$$\lim_{x \to a}\left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) = f(a) = \lim_{n \to +\infty} f_n(a) = \lim_{n \to +\infty}\left(\lim_{x \to a} f_n(x)\right).$$

2. Si $a \notin I$ on pose

$$\widetilde{f_n}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f_n(x) & \text{Si } x = a \\ f_n(x) & \text{Si } x \in I \end{cases}$$

c-à-d $\widetilde{f_n}$ est le prolongement par continuité de f_n sur $\overline{I}$, donc la fonction $\widetilde{f_n}$ est continue. Montrons sa convergence uniforme sur $\overline{I}$. On a

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in I, \forall m > n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \tag{2.4}$$

par passage à la limite quand $x \to a$ on aura

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall m > n > n_0 \implies \left|\widetilde{f_m}(a) - \widetilde{f_n}(a)\right| < \epsilon, \tag{2.5}$$

on déduit que $\left(\widetilde{f_n}(a)\right)$ est une suite de Cauchy.

De (2.4) et (2.5) on peut écrire

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in \overline{I}, \forall m > n > n_0 \implies \left|\widetilde{f_m}(x) - \widetilde{f_n}(x)\right| < \epsilon$$

ce qui veut dire que $\widetilde{f_n}$ converge uniformément vers $\widetilde{f}$ sur $\overline{I}$, donc

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\lim_{x \to a} f_n(x)\right) = \lim_{x \to a}\left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x)\right). \qquad \blacksquare$$

Remarque 2.4 *:*

1. *Si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction discontinue alors la convergence n'est pas uniforme. Voir l'exemple 2.6*
2. *Il peut arriver que les fonctions f_n étant continues et f soit continue, sans que la convergence soit uniforme. Voir l'exemple 2.5*

Théorème 2.3 (de Dini) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues et simplement convergente vers une fonction f continue sur $[a,b]$.*
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors sa convergence est uniforme sur $[a,b]$.

Démonstration. On pose por tout $x \in [a,b]$:

$$R_n(x) = f(x) - f_n(x) \geq 0,$$

alors

$$R_{n+1}(x) = f(x) - f_{n+1}(x),$$

et comme

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x),$$

on aura $(R_n(x))$ est une suite décroissante et minorée par 0 i.e

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall n > n_0 \implies R_n(x) = |f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a,b]. \qquad \blacksquare$$

Exemple 2.8 *Soit la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par*

$$f_n(x) = 1 - \frac{x}{n^3}$$

- *Les fonctions f_n sont des fonctions polynomiales donc continue sur $[0,1]$.*

- *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante*

$$n^3 \leq (n+1)^3 \implies \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3} \implies 1-\frac{x}{n^3} \leq 1-\frac{x}{(n+1)^3} \implies f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

- *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers une fonction continue sur* $[0,1]$ *:*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{x}{n^3} = 1$$

Alors d'après le théorème de Dini la convergence est uniforme.

Théorème 2.4 (d'intégration) *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle* $[a,b] \subset \mathbb{R}$*, convergente uniformément vers une fonction* f *sur* $[a,b]$*. Alors :*

1. f *est une fonction intégrable sur* $[a,b]$*.*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$

Démonstration. D'après la convergence uniforme on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in [a,b], \forall n > n_0 \implies f_n(x) - \frac{\epsilon}{2(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

La fonction f_n étant intégrable, il existe une subdivision $\sigma = \{x_0 = a, x_1, ..., x_p = b\}$ de $[a,b]$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{p} (M_{n_i} - m_{n_i})(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\text{où } M_{n_i} = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f_n \quad , \quad m_{n_i} = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f_n.$$

En notant :

$$M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \quad , \quad m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$$

par suite pour $1 \leq i \leq p$:

$$m_{n_i} - \frac{\epsilon}{2(b-a)} \leq m_i \leq M_i \leq M_{n_i} + \frac{\epsilon}{2(b-a)},$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{p}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{p}(M_{n_i} - m_{n_i})(x_i - x_{i-1}) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

ainsi f est intégrable sur $[a, b]$. De plus

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \|f_n - f\|_\infty (b-a) \to 0,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

■

Exemple 2.9 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies et continues sur* $[0, \pi]$ *par :* $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{n}$, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin x}{n} = 0 = f(x).$$

De plus

$$\sup_{x\in[0,2\pi[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\pi]} \left| \frac{\sin x}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Ce qui donne la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* $[0, \pi]$ *vers la fonction nulle, cependant*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin x}{n} dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0 = \int_0^\pi 0 dx.$$

Remarque 2.5 *La condition de la convergence unifome est suffisante mais pas nécessaire pour que*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemple 2.10 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies et continues (intégrables) sur* $[0, 1]$ *par :* $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} nx\left(1 - x^2\right)^n = 0 = f(x).$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx\left(1-x^2\right)^n dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2},$$

alors que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0dx = 0$$

Donc d'après le théorème d'intégration la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas convergente uniformément sur* $[0,1]$.

Corollaire 2.1 *Sous les hypothèses du théorème précédent, on pose*

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt \quad , \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \quad x\in[a,b].$$

Alors la suite des primitives $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* F *sur* $[a,b]$.

Démonstration. Pour $x\in[a,b]$ on a

$$\begin{aligned}
|F_n(x)-F(x)| &\leq \int_a^x |f_n(t)-f(t)|\,dt \\
&\leq \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,dt \\
&\leq \|f_n-f\|_\infty (b-a) \to 0
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.5 (de dérivation) *Soient* $I\subset\mathbb{R}$ *un intervalle non réduit à un point et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* K. *On suppose que :*

1. *Pour tout* n, *la fonctions* f_n *est dérivable (resp.* $\mathcal{C}^1$*) sur* I.
2. $\exists x_0\in I$, *tel que la suite numérique* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
3. *La suite des dérivées* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* g *sur tout intervalle fermé, borné* $[a,b]\subset I$.

Alors : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout intervalle fermé, borné* $[a,b]\subset I$ *vers une fonction* f *dérivable (resp.* $\mathcal{C}^1$*) sur* I *et l'on a* $f'=g$.

Autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} f'_n = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'$$

Démonstration. Comme il existe $x_0 \in I$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0)$ existe (noté $f(x_0)$), on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x_0) - f(x_0)| = 0$$

D'autre part on sait que

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \quad \text{(convergence simple)}$$

puisque

$$\int_{x_0}^{x} f'_n(t)\, dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \text{ sur } [a,b] \quad \text{(convergence uniforme)}$$

c-à-d ona

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$ définie par

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

et par dérivation on obtient

$$f'(x) = g(x) = \int_{x_0}^{x} g'(t)\, dt \quad \text{car } g \text{ est continue sur } [a,b].$$

■

Remarque 2.6 :

1. *La convergence uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dérivables, n'implique pas que la suite des dérivées $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.*
2. *La limite uniforme d'une suite de fonctions dérivables peut être non dérivable.*

Exemple 2.11 *Soit la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers* $f = 0$ *sur* $\mathbb{R}$.

Mais la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *diverge pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *puisque* $f'_n(x) = \sqrt{n}\cos nx$ *n'a pas de limite à l'infinie.*

Exemple 2.12 *Soit la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = |x| = f(x)$$

et

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \leq |x| + \frac{1}{n} \implies \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers* f *sur* $\mathbb{R}$.

Mais la fonction $|x|$ *est non dérivable au point* 0.

2.2 Séries de fonctions

Dans ce qui suit, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un ensemble non vide $E \subset \mathbb{K}$ et à valeurs réelles. Associons à cette suite, la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \quad \forall x \in E.$$

Définition 2.4 *:*

- *Le couple* (f_n, S_n) *constitué des deux suites* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *s'appelle série de fonctions sur* E *et se désigne par* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *ou* $\sum f_n$.
- *Le terme* f_n *s'appelle le terme général de la série* $\sum f_n$ *et la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'appelle la suite de la somme partielle d'ordre* n *de cette série.*

2.2.1 Convergence simple d'une série de fonctions

Définition 2.5 (Convergence simple) *:*

- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *est dite convergente en* $x_0 \in E$, *lorsque la série numérique* $\sum f_n(x_0)$ *est convergente, c-à-d la suite numérique* $(S_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *est dite simplement convergente sur une partie* $D \subseteq E$ *si la série numérique* $\sum f_n(x)$ *est convergente en tout point* $x \in D$, *ce qui est équivaut à la convergence simple se la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* D. *et dans ce cas* D *s'appelle le domaine de convergence simple.*
- *Si* D *est non vide, on définit une fonction*

$$\begin{array}{cccl} S: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n(x) \end{array}$$

qu'on appellera somme simple des série de fonctions $\sum f_n$. *On écrit :*

$$\begin{aligned} \left\{\sum f_n \to S\right\} &\iff \{\forall\epsilon > 0, \forall x \in D, \exists n_0 = n_0(\epsilon, x) : \forall n \geq n_0 \implies |S_n(x) - S(x)| < \epsilon\} \\ &\iff \left\{\forall\epsilon > 0, \forall x \in D, \exists n_0 = n_0(\epsilon, x) : \forall n \geq n_0 \implies \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| < \epsilon\right\} \\ &\iff \{\forall\epsilon > 0, \forall x \in D, \exists n_0 = n_0(\epsilon, x) : \forall n \geq n_0 \implies |R_n(x)| < \epsilon\}. \end{aligned}$$

Où (R_n) *s'appelle le reste d'e la série de fonctions* $\sum f_n$.

Remarque 2.7 *Pour étudier la convergence simple des séries de fonctions, on peut utiliser tous les critères établis sur la convergence des séries numériques.*

Exemple 2.13 *Etudions la convergence simple de la série de fonctions*

$$\sum \frac{x^{2n}}{n^3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{x^{2n}} = x^2,$$

alors d'après D'Alembert la série $\sum \frac{x^{2n}}{n^3}$ *converge simplement si* $|x| < 1$ *et diverge si* $|x| > 1$*.*
Pour $|x| = 1$*, la série devient* $\sum \frac{1}{n^3}$ *converge d'après Riemann.*
Donc le domaine de convergence simple est $[-1, 1]$*.*

Théorème 2.6 (Condition nécessaire de convergence simple) *Si la série de fonctions* $\sum f_n$ *est simplement convergente vers une fonction* S *sur* $D \subseteq E$*, alors la suite de fonction* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* D *vers la fonction nulle. C-à-d*

$$\sum f_n \to S \text{ sur } D \;\Rightarrow\; f_n \to 0 \text{ sur } D.$$

Définition 2.6 (Convergence absolue) *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ *est absolument convergente sur* D *si la série de fonctions* $\sum |f_n|$ *est simplement convergente sur* D*.*

Remarque 2.8 *Il est immédiat que toute série de fonctions absolument convergente sur* D *est simplement convergente sur* D*.*

2.2.2 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 2.7 *La série de fonctions* $\sum f_n$ *est dite uniformément convergente sur une partie* $D \subseteq E$*, lorsque la suite de fonctions* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément convergente vers la fonction* S *sur* D*, et on écrit* $\{\sum f_n \rightrightarrows S\}$ *sur* D*. Dans ce cas* D *s'appelle le domaine de convergence uniforme et* S *s'appelle la somme uniforme de la série* $\sum f_n$*. i.e :*

$$\{\sum f_n \rightrightarrows S\} \text{ sur } D \iff S_n \rightrightarrows S \text{ sur } D$$

Formellement, la convergence uniforme s'exprime par :

$$\begin{aligned}\left\{\sum f_n \rightrightarrows S\right\} \text{ sur } D \quad &\Longleftrightarrow \left\{\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon), \forall x \in D : \forall n \geq n_0 \Longrightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon\right\} \\ &\Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in D} |S_n(x) - S(x)| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \|S_n - S\|_\infty = 0.\end{aligned}$$

Remarque 2.9 *La convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum f_n$ sur D nécessite sa convergence simple sur D.*

Exemple 2.14 *Considérons la série de fonctions $\left(\sum x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est série géométrique de raison $x \in \mathbb{R}$, alors sa suite de sommes partielles est donnée par*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & si\ x \neq 1 \\ n + 1 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Alors la série $\left(\sum x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $D =]-1, 1[$ vers la fonction S où $S(x) = \dfrac{1}{1 - x}$.
Cependant la convergence n'est pas uniforme sur $]-1, 1[$ car

$$\|S_n - S\|_\infty = \sup_{x \in]-1,1[} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in]-1,1[} \left| \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \right| = \sup_{x \in]-1,1[} \left| \frac{x^{n+1}}{1 - x} \right| = +\infty.$$

Par contre, pour tout $a \in]0, 1[$, on a

$$\forall x \in [-a, a] : |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{1 - a} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui implique la convergence uniforme de $\left(\sum x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[-a, a]$.

Proposition 2.5 *Si les séries de fonctions $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent uniformément vers les fonctions f et g sur D, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la série $\sum (\alpha f_n + \beta g_n)$ converge uniformément vers $\alpha f + \beta g$ sur D.*

Théorème 2.7 (Critère de Cauchy pour la convergence uniforme des séries de fonctions) *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions (où $f_n \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$) et soit $D \subseteq E$. Alors pour que série* *de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément vers une fonction* S *sur* D *il faut et il suffit que :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in D, \forall m > n > n_0 \implies \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \epsilon.$$

Ou bien :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall m > n > n_0 \implies \sup_{x \in D} \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \epsilon.$$

Proposition 2.6 (Condition nécessaire de convergence uniforme) *Si la série de fonctions* $\sum f_n$ *est uniformément convergente vers une fonction* S *sur* $D \subseteq E$*, alors le terme général* f_n *converge uniformément sur* D *vers la fonction nulle. C-à-d :*

$$\sum f_n \rightrightarrows S \text{ sur } D \ \Rightarrow \ f_n \rightrightarrows 0 \text{ sur } D.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy pour la convergence uniforme sur la suite des sommes partielles (S_n).

On a

$$\sup_{x \in D} |f_n(x)| = \sup_{x \in D} |S_n(x) - S_{n-1}(x)|,$$

et d'après le critère de Cauchy pour la convergence uniforme, ona

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in D} |S_n(x) - S_{n-1}(x)| = 0,$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x)| = 0,$$

ce qui prouve la convergence uniforme de le suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers zéro sur D. ■

Remarque 2.10 *:*

1. *On peut trouver des séries de fonctions qui ne converge pas uniformément sur* D *et son terme général converge uniformément vers la fonction nulle sur* D*.*
2. *Si une suite de fonction* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément vers* 0 *sur l'ensemble* D*, alors la série* $\sum f_n$ *ne converge pas uniformément sur* D*.*

Proposition 2.7 *Si les séries de fonctions $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent uniformément vers les fonctions f et g sur D, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la série $\sum (\alpha f_n + \beta g_n)$ converge uniformément vers $\alpha f + \beta g$ sur D.*

Théorème 2.8 (Critère d'Abel pour la convergence uniforme) *La série de fonctions $\left(\sum f_n g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'ensemble D, si*

1. $\exists M > 0 / \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D : \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq M.$
2. *La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et converge uniformément vers 0 sur D.*

Théorème 2.9 (Critère de Leibniz pour la convergence uniforme) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs positives sur E (c-à-d $\forall x \in E : f_n(x) \geq 0$). La série alternée de fonctions $\left(\sum (-1)^n f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'ensemble $D \subseteq E$, si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge uniformément vers la fonction nulle sur D.*

2.2.3 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 2.8 *La série de fonctions $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite normalement convergente sur une partie $D \subseteq E$, si la série numérique $\left(\sum \sup_{x\in D} |f_n(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.*

Exemple 2.15 *Etudions la convergence normale de la série de fonctions*

$$\sum \frac{x^{2n}}{n^3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{x^{2n}}{n^3}\right| = \frac{1}{n^3},$$

et $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, donc $\sum \frac{x^{2n}}{n^3}$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

Exemple 2.16 *Etudions la convergence normale de la série de fonctions*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n^2 x}}{n}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\frac{e^{-n^2x}}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ *diverge alors* $\left.\sum_{n=1}^{+\infty}f_n\right)$ *converge ne converge pas normalement sur* $\mathbb{R}_+$.

Remarque 2.11 *La convergence normale nécessite la convergence absolue.*

Proposition 2.8 (de Weierstrass) *Soit* $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une série de fonctions sur* E.

- *S'il existe une série numérique à termes positifs et convergente* $\sum u_n$ *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D : |f_n(x)| \leq u_n,$$

  alors la série $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge normalement sur* D.

- *S'il existe une série numérique à termes positifs et divergente* $\sum v_n$ *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D : v_n \leq |f_n(x)|,$$

  alors la série $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas normalement sur* D.

Proposition 2.9 *Si la série de fonctions* $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge normalement sur l'ensemble* D*, alors elle converge uniformément sur* D.

Démonstration. Supposons que la série de fonctions $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur l'ensemble D, alors la série $\sum \sup_{x\in D}|f_n(x)|$ converge, donc vérifie la condition de Cauchy c-à-d

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq n_0 \implies \sum_{k=m+1}^{n}\sup_{x\in D}|f_k(x)| < \epsilon.$$

Et comme

$$\sup_{x\in D}\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n}\sup_{x\in D}|f_k(x)|,$$

donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq n_0 \implies \sup_{x\in D}\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \epsilon.$$

Ce qui signifie que la série $\sum f_n$ vérifie le critique de Cauchy d'où la convergence uniforme.

$\blacksquare$

Remarque 2.12 *On peut trouver des séries de fonctions qui converge uniformément sans être normalement convergente.*

Exemple 2.17 *Soit la suite de fonctions constantes donnée par :*

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

La séries de fonctions $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas normalement convergente car

$$\textstyle\sum_{n\geq 1} \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sum_{n\geq 1} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n} = \textstyle\sum_{n\geq 1} \displaystyle\frac{1}{n}$$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

2.2.4 Propriétés des sommes des séries de fonctions

Les théorèmes fondamentaux sur la convergence uniforme des suites de fonctions vus au précédement peuvent être appliqués aux suites des sommes partielles de séries de fonctions et conduisent aux résultats suivants :

Théorème 2.10 (de continuité) *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (ouvert, fermé ou semi ouvert) non réduit à un point et $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une série de fonctions continues sur I, convergeant uniformément sur I alors sa somme est une fonction continue sur I. i.e*

$$\forall x_0 \in \overline{I}; \quad \textstyle\sum_{n\geq 0} \displaystyle\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0} \left(\textstyle\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right).$$

Théorème 2.11 (d'intégration) *Soit $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une série de fonctions convergente uniformément sur l'intervalle $[a, b]$. Si les fonctions f_n $(\forall n \in \mathbb{N})$ sont intégrables sur $[a, b]$, alors*

1. *La somme S de la série est intégrable sur $[a,b]$. De plus*

$$\sum_{n\geq 0}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)=\int_a^b\left(\sum_{n\geq 0}f_n(x)\right)dx.$$

2. *La série des primitives $\sum_{n\geq 0}\int\limits_a^x f_n(t)\,dt$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $\int\limits_a^x S(t)\,dt$.*

Exemple 2.18 *Comme dans le cas de la série géométrique, on a les séries :*

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n \qquad et \qquad \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n},$$

convergent uniformément sur chaque intervalle $[a,b]\subset\left]-1,1\right[$. Alors pour $|x|<1$, on peut donc les intégrer terme à terme de 0 à x comme suit

$$\ln(1+x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$
$$arctgx=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Théorème 2.12 (de dérivation) *Soit $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une série de fonctions continument dérivable sur l'intervalle $[a,b]$, si*

1. *$\exists x_0\in[a,b]$, tel que la série numérique $\sum f_n(x_0)$ converge.*
2. *La série des dérivées de fonctions $\left(\sum f_n'\right)$ est uniformément convergente vers une fonction T sur $[a,b]$.*

Alors : la série $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continument dérivable S sur $[a,b]$ et l'on a

$$S'=\left.\sum_{n\geq 0}f_n\right)'=\sum f_n'=T.$$

Corollaire 2.2 *Soit $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une série de fonctions où $f_n\in\mathcal{C}^m([a,b])\,,m\geq 1$. Si*

1. *Pour tout $k\in[0,m-1]$, Les séries de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ sont simplement converge sur $[a,b]$.*
2. *La série de fonctions $\left(\sum f_n^{(m)}\right)$ est uniformément convergente sur $[a,b]$.*

Alors :

- *Toutes les séries de fonctions* $\sum f_n^{(k)}$ $(0 \leq k \leq m-1)$ *sont uniformément convergente.*
- *La somme* S *de la série* $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de classe* $\mathcal{C}^m\left([a,b]\right)$ *et l'on a*

$$S^{(k)} = \sum f_n^{(k)}, \qquad 0 \leq k \leq m.$$

Exemple 2.19 *Considérons la série de fonctions suivante :*

$$\sum_{n\geq 1} ne^{-nx}, \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

On a

$$\forall x \geq 1 : ne^{-nx} \leq ne^{-n}$$

et $\sum_{n\geq 1} ne^{-n}$ *converge (car* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 ne^{-n} = 0$*), donc* $\sum_{n\geq 1} ne^{-nx}$ *converge normalement sur* $[1, +\infty[$.

D'autre part les fonction $f_n\left(x\right) = e^{-nx}$ *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[1, +\infty[$.

Alors d'après le théorème de dérivation, la série $\sum_{n\geq 1} e^{-nx}$ *converge et*

$$\sum_{n\geq 1} \left(e^{-nx}\right)' = \left. \sum_{n\geq 1} e^{-nx} \right)',$$

d'où

$$-\sum_{n\geq 1} ne^{-nx} = \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)'.$$

Par conséquent

$$\sum_{n\geq 1} ne^{-nx} = \frac{e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2}.$$