أزمة الرياضيات وتداعياتها على المنطق

إنّ الصّلة بين المنطق والرياضيات في ضوء جبر المنطق صلة جزء بكلّ؛ فالمنطق جزء من أجزاء الرّياضة ومجرّد نظريّة من نظريّاتها. وما حدث أنّ الرّياضيات تقدّمت بينما توقّف المنطق بفعل الضربات التي تلقّاها من قبل ديكارت، حيث وصفه بالعقم، ويمتدّ هذا الوصف حتى مع هنري بوانكاري الذي رفض ردّ المفارقات الرّياضية لأسباب منطقية، فالرّياضيون ليسوا بحاجة للمنطق.

إلا أنّ تقدّم الرّياضيات لم يصحبه تقدّم على مستوى لغتها؛ التي أصبحت عاجزة عن تلبية حاجيات الرّياضيات المعاصرة، ويمكن اعتبارها عائقا ابستمولوجيا بالمفهوم الباشلاري فالمعرفة القائمة أصبحت عاجزة عن مواجهة المستجدّات. فهي مشابهة تماما لوضعية المهندس، الذي لا يمكنه الاستمرار في بناء طوابق أخرى على أسس غير قادرة على حمل هذه الطوابق، لذلك ينبغي عليه الانتقال إلى أرضيّة أخرى ويؤسس، حيث ينتقل إلى نمط بنائي آخر مبنيا على أسس أخرى أكثر جاهزية لحمل هذه الطوابق. إنّ هذا النمط أو هذه اللّغة نجدها في المنطق، وهي الفكرة الأساسية التي دافع عنها كلّ من فريجه بيانو وراسل. "فأزمة الأسس التي أثارتها نقائض المجموعات ألزمت الرّياضيين بأن يعودوا هم أيضا إلى مبادئ علمهم، وهذا العمل التّوضيحي هو الذي قام به خاصّة جوتلوب فريغة في ألمانيا، وبرتراند راسل في إنجلترا".

لذلك فالعلاقة بين الرياضيات والمنطق كما عَرَفها جورج بول ستنقلب تحت تأثير مجموعة من الأسباب. فبعد أن سادت الوثوقية العلمانية لحقبة ليست بالقصيرة، ظهرت إلى الوجود حركة مُضادة، تتمثّل في إعادة النظر بشكل جذري في بعض مبادئ ما سيُسمّى بعد ذلك العلم التقليدي. وقد اتّسعت هذه الحركة التي سُمِّيت نقد العلوم، حيث انصبّ هذا النقد في بدايته على طبيعة النّظريات الفيزيائية لِيَمتَدّ فيما بعد إلى مجالات أخرى. "وَكَحَال علم الطبيعة، فإنّ علم الرّياضيات قد انتهى هو الآخر إلى أزمة في نهاية القرن التاسع عشر، (...) وقد ظهرت اكتشافات عديدة في علم الرياضيات في خلال القرن التّاسع عشر، ولكنّ

أكثرها تأثيرا من النّاحية الفلسفية كانت الاكتشافات الخاصّة بالهندسة غير الاقليدية، ونظريّة المجموعات التي قام بها جورج كانتور فقد أظهر هذان الاكتشافان أنّ ما كان يُعدّ من قبل، وبغير تردّد، مجرّد افتراضات مسبقة لا يقوم علم الرّياضيات إلاّ عليها، ما هو في الواقع إلاّ قضايا ليست يقينيّة على الاطلاق". إنّ هذه الاكتشافات قد فرضت على الرّياضيين إعادة النّظر في ما كان يبدو من المفاهيم واضحا أو بديهيا– بالمفهوم التّقليدي للبديهية– وقد ازداد الأمر تعقيدا بظهور المتناقضات "وفيما يخصّ نظريّة المجموعات فقد اكتشف الرّياضيون عند انتهاء القرن التاسع عشر ما يُسمّى بالمتناقضات* (*Antinomie*) أي استنتاجات متناقضة ابتداء من مسلّمات بسيطة وواضحة في الظاهر، رغم كون البراهين المستخدمة صحيحة. وهكذا انتهى الحال إلى تهافت أسس علم الرّياضيات ذاته". وبذلك يمكن القول أنّ العوامل السابقة دفعت بالمنطق للنّهوض من جديد، ولكن بشكل مغاير لما تصوّره بول ومدرسته.

إنّ محاولات جورج بول المتعلّقة بجبر المنطق، أي تبعيّة المنطق للرّياضيات بترجمته للقضايا القياسية إلى معادلات جبرية، لم يعد لها صدى عند الجميع. إذ تَبَيَّن أنّ العمليّة معكوسة؛ فالرّياضيات هي التي ينبغي أن تُبنى على المنطق، وهو ما استوجب إعادة بناء المنطق من جديد حتى يكون قادرا على صورنة الرّياضيات وذلك بخلق مفاهيم جديدة كالاتّساق، الدّالة. إلخ، وهي مفاهيم أدّت إلى تطوّره. "فالبحث عن أصول الرّياضيات هو الذي ساق الباحثين إلى اكتشاف قوانينها المنطقية، ومن ثمّ إلى إماطة اللّثام عن الطابع الاختياري الحر، الذي يتمّ به بناء الأنساق الاستنتاجية الجديدة في الرّياضيات وفي المنطق نفسه، ومن هنا استبانت طبيعة المعرفة الاستنتاجية التي تتمثّل حقيقتها في الوضع الحُرّ لمفاهيم مُعيّنة وفي تحديد قواعد استعمالها بشرط مراعاة عدم تناقضها".

إنّ نظريّة المجموعات قد فرضت على الجميع إعادة النّظر في ما يسمى بمبادئ العقل، إذ أصبح من الممكن البرهنة على قضية وعلى نقيضها في آن واحد، وهذا يتعارض مع مبدأ عدم التناقض ويوقعنا في ما يُعرف بالمتناقضات. ممّا فتح المجال لظهور

اللوجيستيقا* التي رأت بضرورة البحث عن مصدر المشكلة في مستوى أعمق بالصعود القهري حتى إلى المنطق. وكان الشّك يتناول منذئذ كلّ ما كان من قبل يُعتبر مجال البداهة المنطقية. لقد حاول علماء الرّياضيات تجاوز النّقائض عندما اصطدموا بها. "ولكنّ المنطق أية كانت الوسيلة، كان يجد نفسه فيها، وقد أسيئت معاملته إلى حد كبير أو صغير. وقد وجب على نظريّة الأنماط التي قال بها راسل اعتماد أوّليّتين خاليتين من كلّ ضرورة داخلية، الأمر الذي يعني الرّجوع إلى وضع مبادئ غير تحليلية في أصل المنطق بصورة غريبة".

وقد لوحِظ أنّ دقّة الرّياضيات تأخذ منحى تصاعديا كلّما كانت أكثر ارتباطا بالمنطق، فقواعد المنطق بالنسبة للرّياضيات هي تماما نفس قواعد البناء للمعمار. وهو ما دفع راسل إلى القول "إنّ المنطق من وجهة النّظر الواسعة يتميّز بحقيقة أنّ مقدماته يمكن وضعها في أي صورة تنطبق على أي شيء مهما كان، وكلّ الرّياضيات البحتة مبنيّة وفقا للأفكار البدائيّة للمنطق، وكلّ مقدّماتها تُستنتج من البديهيات العامّة للمنطق مثل القياس وغيره من قواعد الاستنباط، ولم يعد ذلك حُلما أو إلهاما. على العكس لقد تمّ إنجازه عبر الجزء الأغلب والأصعب من الرّياضيات". وقد مرّت عملية ردّ الرّياضيات إلى أصول منطقية بمرحلتين يمكن أن نطلق على الأولى اسم تحسيب الرّياضيات، وعلى الثانية اسم منطَقَة الرّياضيات، وهي ردّ نظرية الأعداد الطبيعية ومن ثمّ الرّياضيات إلى أصول المنطق البحت.

لقد قام بيانو بأوّل محاولة منظّمة لردّ الرّياضيات إلى نظرية في الأعداد الطّبيعية، أي الأعداد الصحيحة الموجبة، فالأعداد الطبيعية في نظره يمكن اشتقاقها من أفكار أو ثوابت أوّلية ثلاث، ومن بديهيات خمس. وعلى الرّغم من نجاح بيانو في ردّ الرّياضيات إلى نظريّة في الأعداد الطّبيعية فإنّ نظريّته لم تكن وافية بالغرض، لأنّ ثوابته الأوّلية تحتمل عددا غير محدود من التأويلات التي تستوفيها بديهياته.

أمّا عمليّة ردّ الأعداد الطّبيعية إلى المنطق فقد دشّنها فريجه، فهو أوّل من عرّف العدد تعريفا منطقيا سنة 1894م، ولكنّ تعريفه ظلّ مطمورا حتى أعاد اكتشافه راسل سنة 1901م، ويقوم تعريف فريجه وراسل للعدد على فكرة تشابه الفئات؛ حيث تكون فئتان أ، ب متشابهتان

إذا كانتا مرتبطتين بعلاقة واحد بواحد، أي إذا أمكن إقامة تقابل بين الفئتين بحيث يرتبط كلّ عضو في أ بعضو واحد وواحد فقط في الفئة ب، وكل عضو في الفئة ب يرتبط بعضو واحد وواحد في الفئة أ. ويمكن التّمثيل لذلك بالنسبة للعلاقة الزّوجية في نظام اجتماعي قائم على نظام الزّواج المُوحّد، فيكون عدد الزوجات مساويا لعدد الأزواج.

وفي ضوء التساوي العددي للفئات المتشابهة، يمكن أن ننظر إلى العدد باعتباره فئة الفئات (*Class of classes*) أو باعتباره خاصّية الفئات، فالصفر هو فئة الفئة الخالية، وبتعبير آخر الصفر هو العدد الأصلي للفئة الخالية، والعدد 1 هو فئة كلّ الفئات الأُحادية العضو، والعدد 2 هو فِئة كلّ الأزواج، والعدد 3 هو فئة كلّ الثلاث...إلخ، وبذلك يمكن تعريف العدد كما يلي: عدد أية فئة هو فئة كلّ الفئات المشابهة لها[1]. وتجدر الإشارة إلى أنّ موضوع أسس الرّياضيات تتنازعه ثلاثة اتجاهات في مقدّمتها المذهب اللوجستيقي لأنّه أسبق تاريخيا في ظهوره، ثمّ لأنّ الخلاف حوله، هو الذي حدّد ظهور المذهبين الآخرين كردود فعل عليه من قبل الرّياضيين، وهما المذهب الأكسيوماتيكي بزعامة ديفيد هلبرت (*David Hilbert*) [1862م-1943م] والمذهب الحدسي بزعامة بروير (*Brouwer*) [1881م-1966م].

إلا أنّ الحضور المنطقي لمشكلة أساس الرّياضيات دفعت بالكثير ممّن كان يُدير ظهره للمنطق، وخاصّة الرّياضيين، إلى إعادة النّظر في أفكارهم، "والأمر يصدق على هلبرت، الذي كان في أوّل الأمر غريبا تماما عن اللوجيستيقا، ليتحوّل إلى مساهم في كتابين رئيسيين في المنطق الرياضي حتى ذلك العصر، وكذلك هو حال هيتينغ (*Arnold Heyting*) [1898م-1980م]، لقد كان من أكبر المعارضين لتجاوزات المنطق بحقوق الحدس العليا، قد انجرّ تدريجيا إلى صياغة أحد الأنساق المنطقية الأصلية على هامش المنطق الرّياضي التّقليدي"[2].

---

[1]– متى(كريم):

[2]– *Blanché* (*Robert*)*: la logique et son histoire, op cit, p:* 304.

ومن الضروري التّمييز أثناء استعمال كلمة لوجستيقا بين ما يمكن تسميته اللوجيستيقا كمنهج؛ وهي التي تكون في المجال العلمي وهي خاصّية جميع المنطقيين، واللوجستيكا كمذهب وهي تشير إلى فلسفة معينة في المنطق خاصّة بمدرسة من المنطقيين[3]. وإذا كان هذا المصطلح مقبولا إلى حدٍّ بعيد في بداية القرن العشرين، فإنّ ظهور المنطق الجديد أدى إلى نوع من التردّد في استعماله، ويرى بلانشي بضرورة الرّجوع إلى التسمية القديمة وهي المنطق الصوري، وهذا تجنّبا للخلط المستعمل في التّمييز بين المنطق الأرسطي–الذي يُوصف بالصوري– بينما تُطلق صفة الرّمزية على المنطق المعاصر بالرغم من أحقّيته بالصورية.

[3]- *Ibid. p:* 307.