المحاضرة الثالثة: توزيعات المعاينة (يتبع)

2-3 . توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين مستقلتين

3-2-1. حالة المعاينة من مجتمعين طبيعيين ذو تباينين معلومين

نظرية (4):

إذا كان $\bar{X}_1$ ، $\bar{X}_2$ هما متوسطا عينتين عشوائيتين مستقلتين حجمها على التوالي n_1, n_2 تم سحبهما من مجتمعين طبيعيين ذو متوسطين μ_1, μ_2 وتباينين σ_1^2 ، σ_2^2 معلومين على الترتيب، فإن الفرق $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يكون له توزيع طبيعي متوسطه وتباينه يأخذان الشكل التالي:

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{......} \ (16)$$

$$V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \quad \text{......} \qquad (17)$$

وبالتالي فإن الانحراف المعياري للفرق $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ هو:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ومن ثم يكون المتغير Z الذي يساوي:

$$Z = [(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)] / \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad \text{.........}(18)$$

له توزيع طبيعي معياري $N(0,1)$ وذلك مهما كان حجم العينتين.

ملاحظة: قد يكون من المفيد أحيانا الحديث عن توزيع المعاينة لمجموع إحصائتين مثلا $(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)$ فإن الوسط الحسابي والتباين لهذا النوع من التوزيع يعطى بالصيغتين التاليتين:

$$\mu_{\overline{X}_1+\overline{X}_2}=\mu_{\overline{X}_1}+\mu_{\overline{X}_2}=\mu_1+\mu_2 \text{.................} \quad (19)$$

$$\sigma^2_{\overline{X}_1+\overline{X}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2} \text{...............} \quad (20)$$

مثال (5): إذا كانت رواتب المعلمين في وزارة التربية والتعليم تخضع لتوزيع طبيعي وسطه 33000 دج، وانحرافه المعياري 5165 دج، ورواتب المعلمين في المدارس الخاصة تخضع لتوزيع طبيعي وسطه 25740 دج، وانحرافه المعياري 5663 دج.

أخذت عينة عشوائية من المعلمين في الوزارة حجمها 16 معلما وعبرنا عن وسطها الحسابي بالرمز $\bar{X}_1$، وأخذت عينة عشوائية من معلمي المدارس الخاصة حجمها 10 معلمين وعبرنا عن وسطها الحسابي بالرمز $\bar{X}_2$.

المطلوب: أوجد احتمال أن يزيد $\bar{X}_1$ عن $\bar{X}_2$ بمقدار 8000 دج.

الحل:

نريد إيجاد الاحتمال التالي:

$$P\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\geq 8000\right)$$

بتطبيق النظرية (4) نجد :

$$Z=[(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)]/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$Z=[(8000)-(33000-25740)]/\sqrt{\frac{5165^2}{16}+\frac{5663^2}{10}}$$

$$Z=0.33$$

ومنه نجد:

$$P\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\geq 8000\right)=P(Z\geq 0.33)=0.5-0.1293=0.3707$$

2-2-3. حالة المعاينة من مجتمعين غير طبيعيين وذو تباينين معلومين

نظرية (5): إذا كان $\overline{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة حجمها n_1 أخذت من مجتمع وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 معلوم، وكان $\overline{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة حجمها n_2 أخذت من مجتمع آخر مستقل عن الأول وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 معلوم أيضا، وكان حجم العينتين كبير بدرجة كافية، فان توزيع المعاينة لـ$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ يخضع تقريبا للتوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين تم تحديدهما في المعادلتين (16) و (17)على الترتيب، وعليه فإن توزيع المتغير **Z** حيث:

$$Z = [(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)] / \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

هو التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال(6): إذا كان الإنفاق الاستهلاكي العائلي اليومي في ولاية باتنة وسطه الحسابي 1500دج وتباينه 600 دج، وكان الإنفاق الاستهلاكي العائلي اليومي في ولاية بسكرة وسطه الحسابي 1000دج وتباينه 450 دج، فإذا سحبنا من ولاية باتنة عينة عشوائية حجمها 150 عائلة، ومن ولاية بسكرة عينة عشوائية حجمها 100 عائلة، وكانت العينتان مستقلتان والمجتمعين غير خاضعين للتوزيع الطبيعي.

المطلوب: أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أكثر من 510 دج.

الحل:

بما أن تبايني المجتمعين معلومين، وحجم العينتين كبير بدرجة كافية، فإن المتغير $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ سيتوزع توزيعا قريبا من التوزيع الطبيعي بالرغم من أن توزيع المجتمعين غير طبيعي.

ومنه المطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي:

$$\boldsymbol{P}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 > 510)$$

بتطبيق النظرية (5) نجد:

$$Z = [(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)] / \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$Z = [\,(510) - (1500 - 1000)] \,/ \sqrt{\frac{600}{150} + \frac{450}{100}}$$

$$Z = 3.43$$

$$P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 510\right) = P(Z > 3.43) = 0.5 - 0.4997$$

$$= 0.0003$$