جامعة محمد خيضر (بسكرة)
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية والتسيير
قسم العلوم التجارية

السنة الجامعية: 2024/2023
المستوى: أولى ماستر تسويق
مقياس: الأساليب الكمية في التسويق 1

المحاضرة الخامسة: تحليل قناة التوزيع - نماذج النقل والتوزيع-

1. تمهيد:

لقد أدى نمو حجم المؤسسات، وانتشار فروعها محليا ودوليا في مناطق عديدة وبعيدة، إلى تحملها تكاليف باهظة لنقل المواد واللوازم من مواقع التوريد إلى مواقع الإنتاج، ونقل المنتجات من مواقع الإنتاج إلى مراكز التخزين، البيع أو الاستهلاك، ونظرا لأهمية ترشيد نفقات النقل وتخفيضها إلى أدنى حد ممكن، خصوصا في ظل المنافسة الحادة بين المؤسسات، الأمر الذي عجل بظهور مشكلة النقل والتوزيع، وقد ظهر نموذج النقل كأداة كمية تهتم بتحديد الحجم الأمثل من الكميات التي يتم نقلها من المصادر إلى مواقع الإنتاج أو البيع، وبالشكل الذي يجعل تكلفة النقل في حدودها الدنيا.

2. مفاهيم أساسية حول التوزيع وقنواته:

أ. تعريف التوزيع:

توجد عدة تعاريف للتوزيع في التسويق من أبرزها:

- التوزيع هو:" مجموعة الوسائل والعمليات التي تسمح بوضع المنتجات والخدمات في متناول المستعملين والمستهلكين النهائيين".
- حسب فليب كوتلر، التوزيع هو:" مجموعة الأنشطة التي يتم تنفيذها من لحظة خروج المنتج فمن جهاز الإنتاج، وحتى لحظة وضعه في متناول المستهلك أو المستعمل ".
- حسب Mc Carthy، التوزيع هو العملية التي يتم من خلالها جعل السلعة أو الخدمة متوفرة في المكان المناسب، بالكمية المناسبة، في الوقت الذي يرغب بها المستهلك".
- حسب Landrevie, Levy, Lindon، التوزيع هو كافة الأنشطة اللوجستية، المالية، الإدارية والتجارية، التي تتم منذ لحظة انتهاء إنتاج المنتجات، وحتى حصول المستهلك النهائي عليها".

من خلال هذه التعاريف، يظهر أن التوزيع له جانبان هما:

- **التوزيع التجاري:** نقل ملكية المنتجات والخدمات إلى المستهلكين من خلال الموزعين، سواء كانوا أفرادا (قوى البيع في المؤسسة) أو مؤسسات (تجار الحملة والتجزئة).
- **التوزيع المادي:** عملية انتقال المنتجات بصورتها المادية إلى من المنتجين إلى المستهلكين، ويشمل عدة وظائف مادية أهمها: استلام وتحضير الطلبيات، التعبئة والتغليف،المناولة، التخزين والنقل.

إذن يتكون نظام التوزيع من ركنين أساسيين هما التوزيع المادي وقنوات التوزيع، وبتكاملهما يتحقق التدفق الفعال للسلع والخدمات.

ب.تعريف قناة التوزيع:

تعتبر قنوات التوزيع ركن أساسي في نظام التوزيع، لدرجة أنهما يعبران شيئا واحد، وتوجد لقنوات التوزيع عدة تعاريف من أهمها:

- قناة توزيع هي:" المسار الذي يتبعه المنتج أو الخدمة للانتقال من مكان الإنتاج إلى مكان الاستهلاك، وهذا المسار يتكون من مجموع من الأفراد والمؤسسات التي تسمى الوسطاء.
- قناة التوزيع هي:" مجموعة المنظمات المستقلة (الوسيطة) و/ أو الأفراد الذين يشاركون في جعل المنتج أو الخدمة متاحة للاستهلاك من قبل المستهلك النهائي أو الاستخدام من قبل المستخدم الصناعي".

- قناة التوزيع هي:" المسار الذي يسلكه المنتج للوصول إلى المستهلك النهائي، هذا المسار يشير إلى الوسطاء الذين يقومون بوظائف التوزيع المختلفة".

ج. أهمية التوزيع وقنوات التوزيع:

تعتبر وظيفة التوزيع مكملة لباقي وظائف المزيج التسويقي، وتكمن أهميتها في خلق المنفعة المكانية من خلال المنتج في أماكن قريبة من المستهلك وسهلة الوصول، وخلق المنفعة الزمانية من خلال توفير المنتج في الوقت المناسب الذي يحتاجه فيه المستهلك، وخلق المنفعة الكمية من خلال التوفير المنتج بالكميات المناسبة للمستهلك.

د. مواصفات ترتيب قنوات التوزيع:

- **طول القناة:** يمثل عدد الوسطاء ما بين المنتج والمستهلك، إلا أنه من الأفضل تحديد طول القناة بعدد العمليات المحقّقة، و ليس بعدد الهيئات ولو كان ذلك صعبا نوعا ما.
- **تنظيم القناة:** قد تكون القناة مدارة: يوجد طرف يتمتع بنوع من السلطة لتوجيه قرارات الأعضاء الآخرين، وقد تكون القناة تعاقدية: يوجد عقد يبين التزامات كل الأطراف الفاعلة بها، وقد تكون القناة مندمجة: يوجد طرف يتحكم ويراقب كل مراحل التوزيع.

هـ. العوامل المؤثرة في اختيار قنوات التوزيع:

هناك عدة عوامل تؤثر في اختيار نوع قناة التوزيع المناسبة للمؤسسة من أهمها:
- اعتبارات متعلقة بالسوق، مثل نوع وحجم السوق المستهدف، التركيز الجغرافي للسوق، حجم الطلب وعادات الشراء؛
- اعتبارات متعلقة بالمنتج، مثل سعر المنتج، قابلية التلف، الحجم والوزن والخصائص الفنية للمنتج؛
- اعتبارات متعلقة بالمؤسسة، مثل القدرات المادية، الحجم، الشهرة والخبرة، القدرة الإدارية والرقابة على قناة التوزيع؛
- اعتبارات متعلقة بالوسطاء، مثل مدى توافر الوسطاء، المبيعات المتوقعة، التكلفة ومستوى خدمات الوسطاء؛
- اعتبارات متعلقة بالبيئة، مثل خصائص المنافسين، الظروف الاقتصادية، والتشريعات والقوانين... الخ.

3. تعريف مسألة النقل:

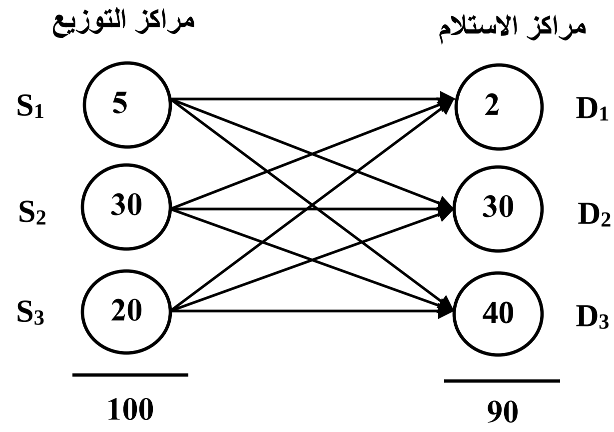
تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة، حيث أنها تهتم بتوزيع ونقل المواد أو المنتجات من عدة مصادر للعرض (موردين، مصانع، موانئ ...) إلى عدة مواقع للطلب (مصانع، متاجر، أسواق) بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت، فالبرمجة الخطية تستعمل للتوزيع الأمثل للموارد بالمؤسسة، أما طريقة النقل لها نفس هذه الخواص مضافا إليها شرط تساوي العرض مع الطلب.

4. أنواع مسائل التوزيع والنقل:

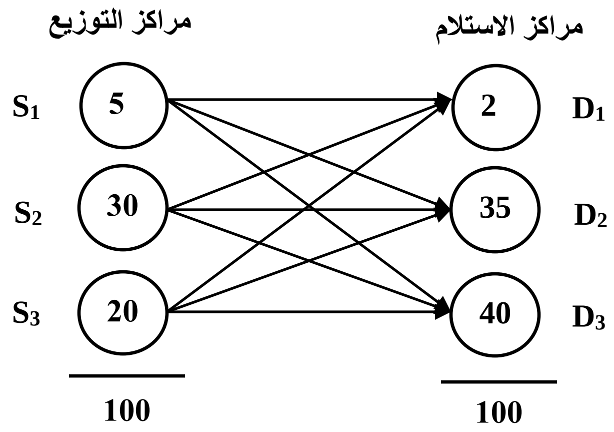
يمكن تقسم مسائل النقل حسب التوازن الكمي أو عدد الوسطاء كما يلي:

أ. التقسيم على أساس العرض والطلب:

- **مسائل التوزيع المغلق:** يتساوى إجمالي كمية العرض وإجمالي كمية الطلب: $\sum_i a_i = \sum_j b_j$، حيث: a_i كمية البضاعة المعروضة في مركز التوزيع i ($i= 1…m$)؛ b_j كمية البضاعة المطلوبة في مركز الاستلام j ($j= 1 … n$).
- **مسائل التوزيع المفتوح:** يكون مجموع الكميات المعروضة أقل أو أكبر من مجموع الكميات المطلوبة، ويعبر عنها بـ: $\sum_i a_i \neq \sum_j b_j$



حالة عدم توازن العرض والطلب

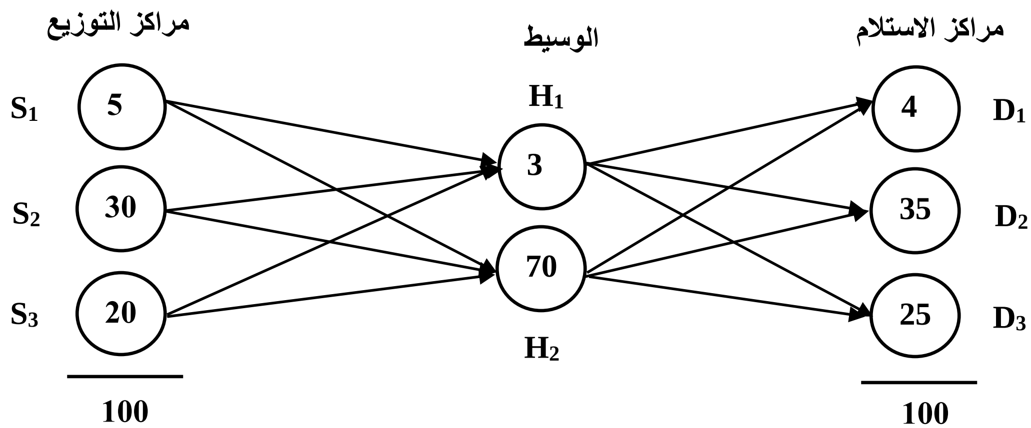


حالة توازن العرض والطلب

ب. التقسيم على أساس وجود الوسطاء:

- **مسائل التوزيع المباشر:** تتم عملية توزيع ونقل البضائع بين مراكز الإنتاج(العرض) ومراكز الاستهلاك(الطلب) بدون تدخل الوسطاء، سواء تجار الجملة أو التجزئة.

- **مسائل التوزيع غير المباشر:** تتم عملية التوزيع بوجود وسيط واحد (تاجر جملة أو وكيل معتمد) أو أكثر(تاجر جملة وتاجر تجزئة)، وهناك يصبح الوسيط بمثابة مركز استلام البضاعة ومركز توزيع في نفس الوقت.



حالة توزيع غير مباشر (وسيط واحد)

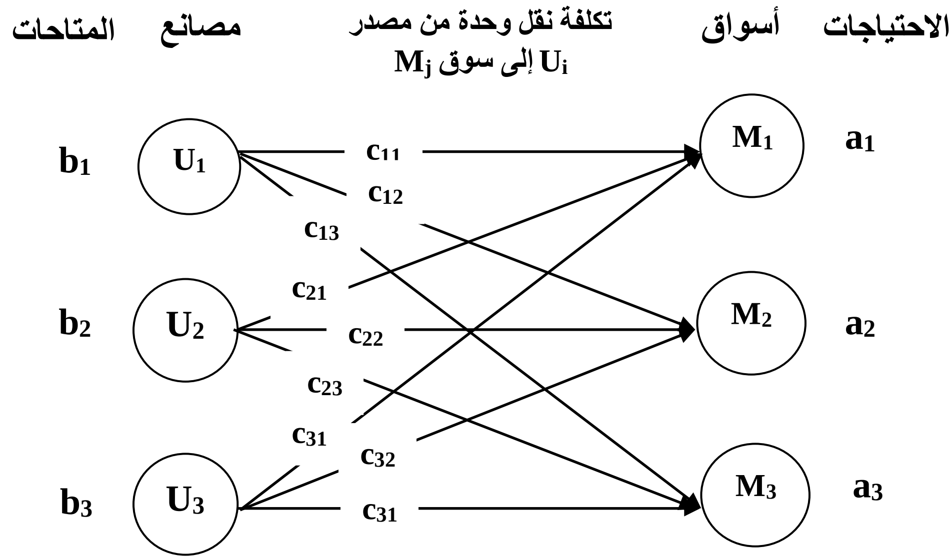
5. شروط استخدام مسائل النقل:

إن استخدام مسائل النقل وحل أي مسالة على أنها مسالة نقل، يتطلب توفر مجموعة من الشروط، التي قد يمكن علاج بعضها في حالة عدم توفرها، مع وجود بعض الشروط لابد أن تكون متوفرة، وإلا لا يمكن استخدام مسائل النقل، وتتمثل هذه الشروط يف ما يلي:

- أن تكون سعة المنابع(المصادر) معلومة، ويعني ذلك أن يكون لدينا علم بالكميات المتوفرة في كل مصدر يمكن نقل المواد أو المنتجات منه.
- أن تكون سعة المصبات معلومة، وذلك يعني أن تتوفر لدينا معلومات حول الكميات المطلوبة من طرف كل مصب يمكن نقل المواد أو المنتجات له.
- أن تكون تكلفة نقل كل وحدة من المواد أو المنتجات من المنابع إلى المصبات معلومة.
- أن تكون كمية المواد أو المنتجات المعروضة في المنابع تساوي الكمية المطلوبة في المصبات.

6. شجرة القرار لمسألة النقل:

تسمح شجرة القرار بتوضيح البدائل المتاحة والقيود المفروضة أمام كل مصنع وكل سوق، ومختلف مسارات النقل الممكنة، مما يساعد على النمذجة الرياضية لمسألة النقل، وهو ما يوضحه الشكل التالي:



7. النمذجة الرياضية لمسالة النقل:

تعرض مشاكل النقل في حالة التعظيم وحالة التدنية، لكن هذه الأخيرة أكثر شيوعا، لذا سنبدأ بعرضها أولا، على أن يتم عرض الحالة الثانية لاحقا.

وتتضمن مشكلة النقل عدد من المصادر m لكل منها عدد متاح من الوحدات لمنتج متجانس $a_i(i= 1 \ldots m)$، وعدد من المصبات n لكل منها عدد مطلوب من الوحدات لنفس المنتج $b_j\ (j= 1 \ldots n)$، مع الأعداد a_i وb_j صحيحة موجبة، وتعطى التكلفة c_{ij} لنقل وحدة من المصدر i إلى مكان الوصول j.

والهدف هو إنشاء جدول انتقال كميات صحيحة موجبة x_{ij} من المنتج ليواجه كل متطلبات المخازن الحالية، في ظل تكلفة نقل كلية أقل ما يمكن، مع افتراض أن العرض الكلي والطلب الكلي متساويان.

وعليه تكون الصياغة الرياضية لمسألة النقل وفق منهج البرمجة الخطية كما يلي:

أ. دالة الهدف (تدنية التكلفة الإجمالية للنقل بين المصادر(المخازن أو المصانع) والمصبات(الأسواق أو المتاجر)

$$Z= \min \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij}\ ;\ i= 1 \ldots m,\ \ j= 1 \ldots n$$

ب.قيود العرض: (تجميع أفقي)

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n}= a_1$$
$$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n}= a_2$$
....
$$x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn}= a_m$$

يعبر عنها باختصار: $\sum_j x_{ij}= a_i\ ;\ i= 1 \ldots m$

ج.قيود الطلب: (تجميع عمودي)

$$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1}= b_1$$
$$x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2}= b_2$$
....
$$X_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn}= b_m$$

يعبر عنها باختصار: $\sum_i x_{ij}= b_j\ ;\ j= 1 \ldots n$

د.قيود عدم سلبية المتغيرات:

$x_{ij} \geq 0$; $i= 1\dots m$, $j= 1\dots n$

8. مراحل حل مسائل النقل:

- **المرحلة الأول:** جمع البيانات الضرورية لبناء نموج النقل، حيث يتطلب معرفة الكميات المعروضة من المصادر (العرض)، والكميات المطلوب من المصبات(الطلب)، وتكلفة النقل الوحدوية بين كل مصدر ومصب.
- **المرحلة الثانية:** تصميم نظام البرمجة الخطية وجدول النقل للمسألة بشكل صحيح، ومعالجة عدم توازن العرض والطلب في حالة وجوده.
- **المرحلة الثالثة:** إيجاد الحل الأولي أو الأساسي، ويتم ذلك بعدة طرق منها: طريقة الركن الشمالي الغربي؛ طريقة أقل تكلفة؛ طريقة الندم (تسمى طريقة فوجل voogel أو Balas-Hammer).
- **المرحلة الرابعة:** اختبار الحل الأولي(هل هو حل أمثل أم لا)، ثم خطوات تحسينه، ويتم ذلك بإحدى طريقتين: طريقة التخطي(الحجر المتنقل أو القفز على الصخور)؛ وطريقة التوزيع المعدلة.

مثال تطبيقي:

لتكن لدينا مشكلة تسويق منتج من نقاط الإنتاج P_1، P_2، P_3 إلى مراكز البيع V_1، V_2، V_3 المدونة في الجدول التالي:

	مركز V_1	مركز V_2	مركز V_3	العرض a_i
مصنع P_1	8	5	6	120
مصنع P_2	15	10	12	80
مصنع P_3	3	9	10	80
الطلب b_j	150	70	60	280=280

نلاحظ من جدول النقل أن مجموع العرض= 120+ 80+ 80= 280؛ ومجموع الطلب= 150+ 70+ 60= 280، ومنه: مجموع العرض= مجموع الطلب= 280 (حالة توازن).

9. طرق إيجاد الحل الأساسي:

تعمل هذه الطرق على إيجاد حل مبدئي(كميات مبدئية)، يتم الاستناد إليها للوصول إلى حلول متتابعة، حتى الوصول في النهاية إلى الحل الأمثل الذي يعطي أدنى تكلفة توزيع ممكنة، وتتمثل هذه الطرق في ما يلي:

أ. طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

تعتبر من أبسط الطرق لإيجاد الحل الأولي:، وتتمثل خطوات هذه الطريقة في ما يلي:

- ملء الخلية (1، 1) بأكبر كمية من الوحدات، هذه الكمية تكون مقيدة بأصغر قيمة بين عرض المصدر (1) وطلب المركز (1).
  - إذا كانت الكمية المتبقية في العرض تساوي 0، بعد ملء الخلية (1، 1)، يتم الانتقال عموديا إلى الأسفل.
  - إذا كانت الكمية المتبقية في الطلب تساوي 0، بعد مل الخلية (1، 1)، يتم الانتقال أفقيا في نفس السطر.
  - إذا كانت المتبقية في العرض والطلب تساوي 0، بعد ملء الخلية (1، 1)، يتم الانتقال قطريا إلى الخلية (2، 2).
  - يتم تكرار الخطوات السابقة حتى تنتهي عملية النقل.

حل المثال:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض
مصنع 1	(8) 120	(5)	(6)	120/0
مصنع 2	(15) 30	(10) 50	(12)	80/50/0
مصنع 3	(3)	(9) 20	(10) 60	80/60/0
الطلب	150/30/0	70/ 20/ 0	60/ 0	280

من الجدول أعلاه نجد أن عدد الأسطر $m= 3$، وعدد الأعمدة $n= 3$، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5$، والنتيجة تساوي 5، وهو نفسه عدد الخلايا الممتلئة(عدد المتغيرات الأساسية)، ومنه الحل الأولي مقبول.

الحل الأولي: $x_{11}= 120$؛ $x_{21}= 30$؛ $x_{22}= 50$؛ $x_{32}= 20$؛ $x_{33}= 60$

تحسب التكلفة الكلية بطريقة الركن الشمالي الغربي كما يلي:

$$Z= 8(120)+ 15(30)+ 10(50)+ 9(20)+ 10(60)= 2690.$$

ملاحظة: إن طرقة الزاوية الشمالية الغربية لا تعتمد على التكاليف في ملء الخلايا بالكميات، وإنما على أساس موقع الخلايا في الجدول، ولذا لا تؤدي في معظم الأحيان إلى تحقيق أقل تكلفة ممكنة مباشرة دون اللجوء إلى إجراء تحسينات.

ب. طريقة أقل تكلفة:

تبدأ هذه الطريقة في ملء الخلايا ذات التكلفة الوحدوية الأقل، ثم التكلفة المساوية أو الموالية... وهذا، حتى يتم استيفاء العرض والطلب، **و**تتمثل خطوات هذه الطريقة في ما يلي:

- تحديد الخلية الأقل تكلفة من بين جميع الخلايا، ملء هذه الخلية بالكمية الأقل من بين العرض والطلب المقابل لها؛
- خصم أقل كمية في الصف أو العمود للخلية المحددة في (1) من عدد الوحدات المراد نقلها؛
- الانتقال إلى خلية تحتوي ثاني أقل تكلفة، وتطبيق عليها نفس ما جاء في (2)، وإذا تساوت خليتان أو أكثر في التكلفة، يفضل الخلية التي يمكن نقل أكبر كمية؛
- تكرار العمليات السابقة، لغاية الانتهاء من خصم جميع الوحدات في الصفوف والأعمدة.

حل المثال:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض
مصنع 1	(8)	(5) 70	(6) 50	120/50/0
مصنع 2	(15) 70	(10)	(12) 10	80/70/0
مصنع 3	(3) 80	(9)	(10)	80/0
الطلب	150/70/0	70/0	60/10/0	280

نلاحظ أن أصغر تكلفة هي 3، وعليه نقوم بملء الخانة (1، 3)، مع المحافظة على الطلب أو العرض الهامشيين، وبعدها الخانة التي تليها في التكلفة وهي 5، أي الخانة (1، 2)، ثم التكلفة التي تليها وهي 6، أي الخانة (1، 3)، وبما أن خانة التكلفة 8 تشبع العرض عندها، وخانة التكلفة 9 تشبع الطلب عندها، وخانة التكلفة 10 تشبع الطلب عندها، فننتقل إلى التكلفة 12، أي الخانة (2، 3) ليتشبع العرض الموافق لها، وأخيرا تبقى التكلفة 15، أي الخانة (2، 1) ليتبع العرض والطلب المقابلان لها.

من الجدول أعلاه نجد أن عدد الأسطر $m= 3$، وعدد الأعمدة $n= 3$، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5$، والنتيجة تساوي 5، وهو نفسه عدد الخلايا الممتلئة(عدد المتغيرات الأساسية الداخلة في الحل)، ومنه الحل الأولي بطريقة أقل تكلفة مقبول.

إذن الحل هو: $x_{12}= 70$؛ $x_{13}= 50$؛ $x_{21}= 70$؛ $x_{23}= 10$؛ $x_{31}= 80$

تحسب التكلفة الكلية بطريقة أقل تكلفة كما يلي: $Z= 3(80)+ 5(70)+ 6(50)+ 12(10)+ 17(70)= 2200.$

نلاحظ أن تكلفة النقل الكلية أقل في هذه الطريقة عن الطريقة السابقة، بسبب أنها تأخذ التكاليف في الاعتبار، حيث تبدأ في ملء الخانات ذات التكلفة الأقل، وتؤخر الخانات ذات التكلفة المرتفعة، مما يجعلها تسمح بالوصول إلى الحل الأمثل بسرعة.

ج. طريقة الندم (Vogel) التقريبية:

ويتم فيها تحديد الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر وعمود، ثم تحديد السطر أو العمود صاحب أكبر فرق، ثم تشغيل الخانة صاحبة أقل تكلفة فيه، ثم نقوم بحذف هذا السطر أو العمود من الجدول. ثم تكرار ما سبق حتى نهاية كل الطلب العرض وهذه الطريقة هي أقل الطرق تكلفة من الطريقتين السابقتين.

تمر طريقة فوجل التقريبية بالمراحل التالية:

- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وكل عمود.
- اختيار أكبر فرق تكلفة في الصفوف والأعمدة، وإذا تساوى فرقان يكون الاختيار عشوائي.
- اختيار أقل تكلفة في الصف أو العمود الذي تم تحديده في الخطوة (2)، ثم ملء خلية تلك التكلفة بأقل كمية من بين العرض والطلب المقابل لها.
- حذف الصف الذي تم تصفير عرضه أو العمود الذي تم تصفير طلبه أثناء الخطوة (3).
- إعادة الخطوات من (1) حتى (5) بشكل مستمر حتى يتم تصفير كل العرض في الصفوف والطلب في الأعمدة.

حل المثال:

الخطوة الأولى:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض	فرق أقل تكلفتين
مصنع 1	8	5	6	120	6-5= 1
مصنع 2	15	10	12 10	80	12-10= 2
مصنع 3	3 80	9	10	80/0	9-3= 6
الطلب	150/70	70	60	280	
فرق أقل تكلفتين	8-3= 5	9-5= 4	10-6= 4		

الخطوة الثانية:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض	فرق أقل تكلفتين
مصنع 1	8 70	5	6	120/50	6-5= 1
مصنع 2	15	10	12 10	80	12-10= 2
الطلب	150/70/0	70	60	280	
فرق أقل تكلفتين	15-7= 8	10-5= 5	12-6= 6		

الخطوة الثالثة:

	مركز 2	مركز 3	العرض	فرق أقل تكلفتين
مصنع 1	5	6 50	120/50/0	6-5= 1
مصنع 2	10	12 10	80	12-10= 2
الطلب	70	60/10	280	
فرق أقل تكلفتين	10-5= 5	12-6= 6		

الخطوة الرابعة:

	مركز 2	مركز 3	العرض	فرق أقل تكلفتين
مصنع 2	10 70	12 10	80/10/0	12-10= 2
الطلب	70/0	60/10/0	280	
فرق أقل تكلفتين	-	-		

ومنه يمكن الحصول على حل أولي الذي هو في معظم الحالات حل أمثل، ويصبح جدول الحل كما يلي:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض
مصنع 1	8 70	5	6 50	120/50/0
مصنع 2	15	10 70	12 10	80/70/0
مصنع 3	3 80	9	10	80/0
الطلب	150/70/0	70/0	60/10/0	280

إذن الحل بطريقة فوجل: $x_{11}= 70$ ؛ $x_{13}= 50$ ؛ $x_{22}= 70$ ؛ $x_{23}= 10$ ؛ $x_{31}= 80$

التكلفة الكلية للحل الأول بطريقة فوجل كما يلي: . $Z= 8(70)+ 50(6)+ 10(70)+ 12(10)+ 3(80)= 1920$

من الجدول نجد أن عدد الأسطر $m=3$، وعدد الأعمدة $n= 3$، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3+ -1= 5$، وهو ما يساوي عدد الخانات المشغولة (المتغيرات الأساسية) 5، ومنه هذا الحل الأولي مقبول.

نلاحظ أن التكلفة الكلية باستخدام طريقة فوجل التقريبية هي 1920 وهي أقل من التكلفة الكلية بالنسبة للطريقتين السابقتين، ومن ثم فإن هذه الطريقة أفضل من الطريقتين السابقتين.

10.اختبار أمثلية الحل وتحسينه:

إن الحل المتوصل إليه هو حل أساسي أولي، لكن لا نعلم إذا كان حلا أمثلا أم لا، ولمعرفة ذلك، هناك طريقتين مستعملتين: طريقة التخطي(الحجر المتنقل)، وطريقة التوزيع المعدل.

أ. طريقة الحجر المتنقل:

فكرة هذه الطريقة هي البحث عن الخانات الفارغة غير الداخلة في الحل، والتي من شأنها أن تقوم بتدنية التكلفة الكلية للحل الأولي، في حالة ما تم إدخالها إلى الحل الأساسي. حيث يجب اختبار الخانات الفارغة غير الداخلة في الحل، والتي تؤدي إلى خفض التكاليف، أي ينبغي إيجاد ما يصطلح عليه بالتكاليف الحدية (تكاليف الوحدة الواحدة) لكل خانة غير داخلة في الحل، فإذا انتهينا من الخانات الفارغة يكون تعديل الخانات الممتلئة بالزيادة أو النقصان بحسب المسار .

يتم اعتماد طريقة القفز على الصخور في اختبار أمثلية الحل الأولي من خلال رسم مسارات مكون من خطوط أفقية وعمودية في جدول الحل الأولي، حيث تمثل الخانات المشغولة أركان هذا الخط، وينتهي بالخانة غير المشغولة المراد تقييمها، ويستلزم الأمر مراعاة الشروط التالية عند تحديد المسار، وهي :

- تقسيم المتغيرات إلى متغيرات أساسية $(x_{ij} > 0)$، ومتغيرات غير أساسية $(x_{ij} = 0)$. مع التركيز على المتغيرات غير الأساسية، لأنه هي التي يتم إدخال واحد منها في كل مرحلة إلى الأساس.

- رسم مسارات مغلقة لكل المتغيرات غير الأساسية (الخانات الفارغة)، بحث تبدأ بمتغير غير أساسي، وتمر على متغيرات أساسية،(خانات ممتلئة) وتنتهي بالمتغير غير الأساسي، على أن يكون المسار مكون من خطوط أفقية وعمودية متصلة في نفس الاتجاه، وليس خطوط متقطعة (الخطوط القطرية غير مسموح بها).

- نضع إشارة موجبة في الخانة الفارغة، والتي نريد تقييمها، ثم نضع إشارات متبادلة (- و +) لكل ركن في المسار المغلق، حيث تمثل هذه الإشارات السالبة والموجبة إضافة وطرح وحدة واحدة من الخانة.

- تنظيم مسارات مناظرة للمسارات السابقة، تعبر عن مقدار التغير في الكلفة ، وتعرف بالمسارات الكلفوية، وذلك بالنسبة لكل متغير غير أساسي.

- تحديد المسار ذو التغير في التكلفة السالب، وإذا وجد أكثر من تغير في الكلفة سالب، نختار المسار ذو التغير في الكلفة الأصغر، ثم إدخال المتغير غير أساسي لهذا المسار إلى الأساس، وذلك من خلال تحديد أصغر قيمة للمتغيرات الأساسية على ذلك المسار، ثم إضافة أو طرح هذه القيمة في كل أركان المسار وفقا للإشارات (+) و(-) التي تم وضعها سابقا.

- تعاد نفس الخطوات السابقة، مع التحقق من أن كل قيم التغير في الكلفة تكون موجبة أم أن هناك قيم سالبة، فإذا كانت كل قيم التغير موجبة فإننا نكون وصلنا للحل الأمثل، وإذا كان أحد أو بعضها سالبة، فيعاد تكرار الخطوات السابقة.

مثال تطبيقي:

يعطى جدول النقل التالي والحل الأساسي بطريقة الركن الشمالي الغربي:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض
مصنع 1	1 40	4 15	5	55/15/0
مصنع 2	5	7 15	3 30	45/30/0
مصنع 3	10	8	9 20	20/0
الطلب	40/0	30/15/0	50/20/0	120=120

الحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي: $x_{11}= 40$؛ $x_{12}= 15$؛ $x_{22}= 15$؛ $x_{23}= 30$؛ $x_{33}= 20$

التحقق من مقبولية الحل الأولي: عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 3، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5$، يساوي عدد الخانات المشغولة (متغيرات أساسية): 5، ومنه الحل الأولي مقبول.

التكلفة الكلية بطريقة الركن الشمالي الغربي: $Z= 40(1)+15(4)+15(7)+30(3)+20(9)= 475$

اختبار أمثلية الحل الأولي (المرحلة الأولى):

يتضح من الجدول أعلاه وجود أربعة خانات فارغة، وهي الخانات (1 ، 3)، (2 ، 1)، (3 ، 1) (3 ، 2)، وهي تمثل متغيرات غير داخلة في الحل، ويتم تقييم هذه الخانات كما يلي:

الخانة (1 ، 3) x_{13}:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض
مصنع 1	1 40	- 4 15	+ 5	55
مصنع 2	5	+ 7 15	- 3 30	45
مصنع 3	10	8	9 20	20
الطلب	40	30	50	120

التغير في التكلفة عند نقل وحدة واحدة من المصنع (1) إلى المركز (3): $\delta_{13}= 5(1)+ 4(-1)+7(1)+ 3(-1)= 5$

وهذا يعني أن نقل وحدة واحدة إلى الخانة (1 ، 3) يؤدي إلى ارتفاع التكاليف بـ 5، فمثلا لو تم نقل 20 وحدة من المصنع 1 إلى المركز 3، فإن ذلك سيؤدي إلى ارتفاع التكاليف الكلية بمقدار: 5 × 20= 100، وعليه فهذه الخانة يجب تجنبها.

الخانة (2 ، 1) x_{21}:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض
مصنع 1	- 1 40	+ 4 15	5	55
مصنع 2	+ 5	- 7 15	3 30	45
مصنع 3	10	8	9 20	20
الطلب	40	30	50	120

تكلفة نقل وحدة واحدة من المصنع (2) إلى المركز (1): $\delta_{13}= 5(1)+ 1(-1)+4(1)+ 7(-1)= 1$

وهذا يعني أن نقل وحدة إلى الخانة (3 ، 1) يؤدي إلى ارتفاع التكاليف بـ 1 ون.

الخانة (3 ، 1) x_{31}:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض
مصنع 1	- 1 40	+ 4 15	5	55
مصنع 2	5	- 7 15	+ 3 30	45
مصنع 3	+ 10	8	- 9 20	20
الطلب	40	30	50	120

تكلفة نقل وحدة واحدة من المصنع (3) إلى المركز (1): $\delta_{31}= 10(1)+ 1(-1)+4(1)+ 7(-1)+ 3(1)- 9(-1)= 0$

هذا يعني أن هذه الخانة لا تؤثر على التكلفة في حالة إدخالها إلى الأساس، فهي لا تنقص ولا تزيد في التكاليف.

الخانة (3 ، 2) x_{32}:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض
مصنع 1	1 40	4 15	5	55
مصنع 2	5	- 7 15	+ 3 30	45
مصنع 3	10	+ 8	- 9 20	20
الطلب	40	30	50	120

تكلفة نقل وحدة واحدة من المصنع (3) إلى المركز (2): $\delta_{32}= 8(1)+ 9(-1)+3(1)+ 7(-1)= -5$

نجد أن الخانة (3 ، 2) تسمح بتخفيض التكلفة الإجمالية، ومنه الحل الأساسي ليس أمثل، نقول أن الحل الأساسي غير أمثل إذا كانت إحدى التكاليف الحدية على الأقل سالبة، والخانة المرشحة للدخول هي المقابلة لأكبر تكلفة حدية سالبة بالقيمة المطلقة.

وعليه فالحل الأولي يمكن تحسينه بإدخال الخانة إلى الأساس، ويتم ذلك من خلال إحداث تغييرات على طول قيم المتغيرات المتواجدة على خانات أركان المسار، بإضافة وطرح أصغر قيمة متواجدة على الزوايا السالبة (الزوايا التي تم طرح القيمة 1 منها (وهذا لتجنب إحداث قيم سالبة لبعض المتغيرات). هذه القيمة هي: $Min(15 , 30, 20)= 15$

تحسين الحل:

يتم إضافة 15 للخانة (3 ، 2)، طرح 15 من الخانة(3 ، 3)، إضافة 15 للخانة (2 ، 3)، وطرح 15 من الخانة (2 ، 2)، ومنه جدول النقل يتحول إلى:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض
مصنع 1	1 40	4 15	5	55
مصنع 2	5	7 ×	3 45	45
مصنع 3	10	8 15	9 5	20
الطلب	40	30	50	120

إذن الحل المحسن الأول هو: $x_{11}= 40$ ؛ $x_{12}= 15$ ؛ $x_{23}= 45$ ؛ $x_{32}= 15$ ؛ $x_{33}= 5$

وهو حل مقبول لأن: عدد الأعمدة + عدد الأسطر= 3+ 3- 1= 5= عدد الخانات المملوءة(المتغيرات الأساسية).

والتكلفة الكلية تصبح كما يلي:

$Z= 40(1)+ 15(4)+ 45(3)+ 15(8) +5(9) = 400.$

نلاحظ أن هذا الحل أفضل من الحل الأولي، حيث كانت التكلفة الكلية كانت تساوي 475 في الحل الأولي، وصارت تساوي 400 فقط في الحل (المحسن).

اختبار أمثلية الحل المحسن (المرحلة الثانية):

يتضح من الجدول أعلاه وجود أربعة خانات فارغة، وهي الخانات (1 ، 3)، (2 ، 1)، (2 ، 2) (3 ، 1)، ويتم تقييم هذه الخانات كما يلي:

الخانة (1 ، 3) x_{13}:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض
مصنع 1	1 40	- 4 15	+ 5	55
مصنع 2	5	7	3 45	45
مصنع 3	10	+ 8 15	- 9 5	20
الطلب	40	30	50	120

تكلفة نقل وحدة واحدة من المصنع (1) إلى المركز (3): $\delta_{13}= 5(1)+ 4(-1)+8(1)+ 9(-1)= 0\geq 0$

لا يوجد تحسين في التكلفة، لأن زيادة وطرح وحدة من المنتج على المسار لا تؤدي لأي تغير في التكلفة الكلية.

الخانة(2 ، 1) x_{12}:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض
مصنع 1	- 1 40	+ 4 15	5	55
مصنع 2	+ 5	7	- 3 45	45
مصنع 3	10	- 8 15	+ 9 5	20
الطلب	40	30	50	120

تكلفة نقل وحدة واحدة من المصنع (2) إلى المركز (1): $\delta_{21}= 5(1)+ 1(-1)+4(1)+ 8(-1)+9(1)-3(1)= 6\geq 0$

لا يوجد تحسين في التكلفة، فإضافة وطرح وحدة من المنتج على هذا المسار يؤدي إلى ارتفاع التكلفة الكلية بـ 6.

الخانة (2 ، 2) : x_{22}

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض
مصنع 1	1 40	4 15	5	55
مصنع 2	5	+ 7	- 3 45	45
مصنع 3	10	- 8 15	+ 9 5	20
الطلب	40	30	50	120

تكلفة نقل وحدة واحدة من المصنع (2) إلى المركز (2): $\delta_{22}= 7(1)+ 3(-1)+9(1)+ 8(-1) = 5\geq 0$
لا يوجد تحسين في التكلفة، فإضافة وطرح وحدة من المنتج على هذا المسار يؤدي إلى ارتفاع التكلفة الكلية بـ 5.

الخانة (3 ، 1) x_{22}:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	العرض
مصنع 1	- 1 40	+ 4 15	5	55
مصنع 2	5	7	3 45	45
مصنع 3	+ 10	- 8 15	9 5	20
الطلب	40	30	50	120

تكلفة نقل وحدة واحدة من المصنع (3) إلى المركز (1): $\delta_{31}= 10(1)+ 8(-1)+4(1)+ 1(-1)= 5\geq 0$
إذن لا يوجد تحسين في الحل.

بما أن كل التغيرات في التكلفة للمتغيرات غير الأساسية (الخانات الفارغة) موجبة، هذا يعني أنه لا يمكن تحسين الحل، لذا فهو يعتبر الحل الأمثل: $x_{11}= 40$ ؛ $x_{12}= 15$ ، $x_{23}= 45$ ، $x_{32}= 15$ ، $x_{33}= 5$؛ والتكلفة الكلية الدنيا 400.

ب. طريقة التوزيع المعدل:

تستخدم هذه الطريقة لاختبار أمثلية الحل وتحسينه، وهي أكفأ من طريقة التخطي (الحجر المتنقل)، حيث أنها قادرة على تحديد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل مباشرة، من دون تجريب واختبار كل المتغيرات غير الأساسية، وتتلخص هذه الطريقة فيما يلي:

- نرمز لكل سطر (الوحدة الإنتاجية) بالرمز U_i، ونرمز لكل عمود (مركز التوزيع) بالرمز V_j؛
- كل متغير أساسي (الخلايا المملوءة) في جدول النقل يكتب بصيغة المعادلة التالية: $U_i + V_i= C_{ij}$، نحسب قيم U_i و V_j، مع الانطلاق من: $U_i= 0$ لتسهيل الحساب؛
- كل متغير غير أساسي (الخلايا الفارغة) في جدول النقل يكتب بصيغة المعادلة التالية: $\delta_{ij} = C_{ij} – V_j – U_i$، بحساب التغيرات في التكلفة δ_{ij} لكل المتغيرات غير الأساسية؛
- نختار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية δ_{ij} الأشد سالبية، ويتم دراسة مسارها وفقا للقاعدة المعروفة في طريقة الحجر المتنقل؛
- يتم تكرار هذه العملية إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية δ_{ij} كلها موجبة أو معدومة.

حل المثال:

اختبار أمثلية الحل الأولي (المرحلة الأولى)

الخطوة الأولى: الخلايا المملوءة (المتغيرات الأساسية):

من خلال المعادلة: $U_i+ V_j = C_{ij}$، نجد المجاهيل U_i و V_j، لكل خلية مملوءة (i , j)، حيث i رقم السطر و j رقم العمود، مع فرض أن: $U_i= 0$ لأول معادلة، وهذا لتسهيل الحل:

نلاحظ من جدول الحل الأولي أن المتغيرات الأساسية الداخلة في الحل (الخانات المملوءة) هي: x_{11}؛ x_{12}؛ x_{22}؛ x_{23}؛ x_{33} ، لذا نحسب قيم U_i وV_j الموافقة لها كما يلي:

المتغير أو الخلية الأساسية	استنتاج القيم المتبقية بدلالة القيم المعلومة	$U_i + V_j = C_{ij}$
x_{11} أو (1 ، 1)	$U_1 = 0 \rightarrow V_1 = 1$	$U_1 + V_1 = 1$
x_{12} أو (1 ، 2)	$0 + V_2 = 4 \rightarrow V_2 = 4$	$U_1 + V_2 = 4$
x_{22} أو (2 ، 2)	$U_2 + 4 = 7 \rightarrow U_2 = 3$	$U_2 + V_2 = 7$
x_{23} أو (2 ، 3)	$3 + V_3 = 3 \rightarrow V_3 = 0$	$U_2 + V_3 = 3$
x_{33} أو (3 ، 3)	$U_2 + 0 = 9 \rightarrow U_2 = 9$	$U_2 + V_3 = 9$

الخطوة الثانية: الخلايا غير الداخلة في الحل (المتغيرات غير الأساسية):

يتم تقييم هذه الخلايا من خلال إيجاد التغير في التكاليف (التكاليف الحدية) بطريقة مختلفة عن طريقة التخطي، وذلك من خلال المعادلة التالية: $\delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$، حيث نحصل على الجدول التالي:

نلاحظ من جدول الحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي أن المتغيرات غير الأساسية (الخانات الفارغة) هي: x_{13}؛ x_{21}؛ x_{31}؛ x_{32} ، لذا نحسب التغيرات في التكلفة الموافقة لها δ_{ij} كما يلي:

متغيرات/ خلايا غير أساسية	**التغير في التكلفة: $\delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$**
x_{13} أو (1 ، 3)	$\delta_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 5 - 0 - 0 = 5 \geq 0$
x_{21} أو (2 ، 1)	$\delta_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 5 - 3 - 1 = 1 \geq 0$
x_{31} أو (3 ، 1)	$\delta_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 10 - 9 - 1 = 0 \geq 0$
x_{32} أو (3 ، 2)	$\delta_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 8 - 9 - 4 \geq -5 < 0$

يظهر من نتائج الجدول أنها مطابقة لنتائج تقييم جدول النقل الأولي بطريقة الحجر المتحرك (التخطي).

نقوم بإعداد جدول نقل جديد بإشغال الخلية (2 , 3) باعتبارها صاحبة أصغر تغير في التكلفة سالب (في هذا المثال توجد قيمة سالبة واحدة فقط وهي 5-)، حيث أن ملئها ينتج عنه تخفيض التكاليف، ويتم ملء الخلية (2 , 3) بنفس طريقة التخطي بالكمية: Min(20 , 15)= 15، حيث 15 و20 قيم الخانات المملوءة ذات إشارة (-)، وبعدها يتم اختبار الأمثلية للجدول الجديد بطريقة التوزيع المعدلة، وبنفس الخطوات السابقة كما يلي:

	مركز 1	**مركز 2**	**مركز 3**	**العرض**
مصنع 1	**1** / **40**	**4** / **15**	**5**	**55**
مصنع 2	**5**	- **7** / **15**	+ **3** / **30**	**45**
مصنع 3	**10**	+ **8**	- **9** / **20**	**20**
الطلب	**40**	**30**	**50**	**120**

توزيع معدل $\longrightarrow$

	مركز 1	**مركز 2**	**مركز 3**	**العرض**
مصنع 1	**1** / **40**	**4** / **15**	**5**	**55**
مصنع 2	**5**	**7** / **0**	**3** / **45**	**45**
مصنع 3	**10**	**8** / **15**	**9** / **5**	**20**
الطلب	**40**	**30**	**50**	**120**

اختبار أمثلية الحل المحسن (المرحلة الثانية):

الخطوة الأولى: الخلايا المملوءة (المتغيرات الأساسية):

من خلال المعادلة: $U_i+ V_j = C_{ij}$، نجد المجاهيل U_i و V_j، لكل خلية مملوءة (i , j)، حيث i رقم السطر و j رقم العمود، مع فرض أن: $U_i= 0$ لأول معادلة، وهذا لتسهيل الحل:

نلاحظ من جدول الحل المحسن أن المتغيرات الأساسية الداخلة في الحل (الخانات المملوءة) هي: x_{11}؛ x_{12}؛ x_{33}؛ x_{23}؛ x_{32} ، لذا نحسب قيم U_i و V_j الموافقة لها كما يلي:

متغير / خلية أساسية	استنتاج القيم المتبقية بدلالة القيم المعلومة	$U_i + V_j= C_{ij}$
x_{11} أو (1 ، 1)	$U_1= 0 \rightarrow V_1= 1$	$U_1 + V_1= 1$
x_{12} أو (1 ، 2)	$0 + V_2= 4\rightarrow V_2= 4$	$U_1 + V_2= 4$
x_{33} أو (3 ، 3)	$4+ V_3= 9\rightarrow V_3= 5$	$U_3 + V_3= 9$
x_{32} أو (2 ، 3)	$U_2 + 5= 3\rightarrow U_2= -2$	$U_2 + V_3= 3$
x_{32} أو (3 ، 2)	$U_3 + 4= 8\rightarrow U_3= 4$	$U_3 + V_2= 8$

الخطوة الثانية: الخلايا غير الداخلة في الحل (المتغيرات غير الأساسية):

نلاحظ من جدول الحل المحسن أن المتغيرات غير الأساسية (الخانات الفارغة) هي: x_{13}؛ x_{21}؛ x_{22}؛ x_{31} ، لذا نحسب التغيرات في التكلفة الموافقة لها δ_{ij} كما يلي:

المتغير/ الخلية غير الأساسية	**التغير في التكلفة: $\delta_{ij}= C_{ij} – U_i – V_j$**
x_{13} أو (1 ، 3)	$\delta_{13}= C_{13} – U_1 – V_3= 5 – 0 – 5= 0\geq 0$
x_{12} أو (2 ، 1)	$\delta_{21}= C_{21} – U_2 – V_1=5 – (-2) – 1 = 6\geq 0$
x_{22} أو (2 ،2)	$\delta_{22}= C_{22} – U_2 – V_2= 7 – (-2) – 4= 5 \geq 0$
x_{31} أو (3 ، 1)	$\delta_{31}= C_{31} – U_3 – V_1= 10 – 4 – 1 = 5\geq 0$

نلاحظ من النتائج أعلاه أن جميع التغيرات في التكلفة موجبة (أي أن: $\delta_{ij}\geq 0$) ، وهذا يدل على عدم إمكانية تخفيض تكاليف النقل من خلال تحويل كميات إلى الخلايا الفارغة، لذلك فإن جدول النقل الأخير يعتبر التوزيع الأفضل للكميات المنقولة، ونقوم بحساب التكلفة الإجمالية:

$$Z= x_{11}+ 4x_{12}+ 3x_{23}+ 8x_{32}+ 9x_{33}= 1(40) + 4(15)+ 3(45)+ 8(15)+ 9(5)= 400$$

يمكن ملاحظة أن تكلفة النقل الكلية (400 ون)، والتي تم التوصل إليها وفق طريقة التوزيع المعدل تعتبر الحل الأمثل، وهي نفس الحل المتوصل إليه بطريقة الحجر المتنقل (التخطي).

11. حالات خاصة في مسائل النقل:

قد تحصل بعض الحالات، عند حل مشكلة النقل، التي تحتاج إلى اتخاذ إجراء معين لمواصلة الحل، وهي حالات ترتبط بالواقع الفعلي لمؤسسة الأعمال وطبيعة الأسواق، ولعل أهم هذه الحالات الآتي:

أ. عدم تساوي العرض والطلب :

في الحياة العملية كثيرا ما يحصل عدم توازن بين الطاقة الإنتاجية المتاحة لدى المصانع واحتياجات الأسواق، لذا لا بد من موازنة العرض مع الطلب لحل المسألة، هنا نلجأ إلى:

- إضافة عمود وهمي عندما يكون العرض أكبر من الطلب، أي إيجاد سوق وهمية، والكمية في العمود الوهمي تساوي الفرق بين مجموع العرض ومجموع الطلب، وتكون كلفة النقل من المصانع إلى هذا السوق الوهمي تساوي (0).

- إضافة صف وهمي عندما يكون الطلب أكبر من العرض، أي إيجاد مصنع وهمي، والكمية في الصف الوهمي تساوي الفرق بين مجموع العرض ومجموع الطلب، تكون كلفة النقل من المصنع الوهمية إلى الأسواق تساوي (0).

ب. وجود أكثر من حل أمثل:

قد توجد بعض مشاكل النقل تقبل عدة حلول بديلة مثلى، وليس حلاً واحدا يمكن اكتشافه عندما تكون نتائج اختبار الخلايا الفارغة، فيها واحد أو أكثر من مؤشرات التحسين δ_{ij} ذات قيمة معدومة، هذا يعني أنه يمكن أن تغير اتجاهات بعض الشحنات إلى اتجاهات أخرى بنفس الكلفة الكلية، ومنه توجد حلول بديلة بعدد الأصفار الموجودة في الخانات الفارغة، ويتم الحصول على كل حل بديل بتكوين مسار مغلق انطلاقا من كل خلية تحتوي على $\delta_{ij}= 0$، لكن هذا المسار المغلق لا يعني التغيير في التكلفة، وإنما تكون نفسها. وعموما فإن وجود حلول مثلى متعددة يعطي الإدارة مرونة أكبر في اختيار وتوزيع المواد.

ج. حالة الانحلال(الحل الناقص):

تحصل هذه الحالة عندما يكون عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا المملوءة) أقل من مجموع عدد الصفوف وعدد الأعمدة ناقص واحد $(m+ n- 1)$، وقد تظهر هذه الحالة في الحل الأولي (قبل الاختبار)، أو في مراحل تحسين الحل الأولي، ولمعالجة هذه الحالة فإنه يتم إشغال إحدى الخلايا (يجب أن يتم اختيارها بدقة والتي تحتوي على أقل كلفة) بقيمة صفرية، ومعاملتها وكأنها خلية مشغولة والاستمرار بالحل.

د. حالة الطرق الممنوعة:

تتمثل في وجود قيد أو شرط يؤدي إلى تقييد التعامل بين مصدر(مورد) ومصب (زبون)، فمثلا إذا كان مورد معين لا يمكنه تزويد زبون معين، نظرا لأن نوعية المنتج أو المادة غير مطابقة للمواصفات، أو العكس لأن الزبون لم يدفع المستحقات التي عليه، فإن المورد لا يزوده، في هذه الحالة توضع تكلفة كبيرة جدا ($+\infty$) في الخلية التي يتوفر فيها الشرط، ولا تؤخذ في الاعتبار عند عملية النقل.

هـ. حالة مسائل النقل بمراحل متعددة(الوسطاء):

يتم النقل على مرحلتين أو أكثر، مثلا في المرحلة الأولى من وحدات الإنتاج إلى المخازن، ثم يتم النقل في مرحلة ثانية من المخازن إلى الزبائن، ولكن تعتمد المرحلة الثانية على المرحلة الأولى، بحيث يتم أخذ في الاعتبار ماهو موجود فعلا في المخازن.

و. حالة تعظيم الأرباح:

في بعض الأحيان تكون الشركة متخصصة بالنقل لصالح الغير ولديها وسطاء نقل تستخدمها في نقل منتجات من أماكن مختلفة بهدف تحقيق أكبر ربح ممكن، لذا فهي تركز على الخطوط أو المسارات ذات الربح الأكبر، وهنا يتم إتباع المراحل التالية:

- اختيار أكبر قيمة في مصفوفة الأرباح؛
- تخفيض كل القيم من هذه القيمة، وبالتالي تتحول مصفوفة الأرباح إلى مصفوفة الخسائر النسبة Min(P)؛
- عند تحويل مصفوفة الأرباح إلى مصفوفة خسائر، تصبح مسألة تخفيض، وبالتالي يتم الحل بالطرق السابقة؛
- بعد الحصول على التوزيع الأمثل، يتم حساب Max(Z) من المصفوفة الأصلية(مصفوفة الأرباح).

مثال حالة عدم توازن العرض والطلب:

ليكن المثال التالي، أوجد الحل بطريقة أقل تكلفة:

إلى / من	مصنع 1	مصنع 2	مصنع وهمي	$\sum_j$
مورد 1	50 (2)	50 (1)	(0)	100/50/0
مورد 2	50 (4)	(3)	50 (0)	100/50/0
$\sum_i$	100/50/0	50/0	50/0	200

مسألة النقل غير متوازنة لأن: مجموع العرض= 100+ 100= 200؛ ومجموع الطلب= 100+ 50= 150.
وبما أن مجموع العرض أكبر من مجموع الطلب، نضيف عمود وهمي الكمية فيه تساوي الفرق العرض والطلب وهي 50، والتكاليف أصفار.

نبحث عن الحل الأولي بأقل تكلفة: $Z= 2(50)+ 1(50)+ 4(50)+ 0(50)= 350$

مقبولية الحل الأولي: $m+ n- 1= 2+ 3- 1= 4$ يساوي عدد الخلايا المشغولة(متغيرات أساسية): 4، ومنه الحل مقبول.

اختبار أمثلية الحل الأولي: طريقة التوزيع المعدل:

حساب معاملات U_i و V_j للمتغيرات الأساسية (الخانات المشغولة): $U_i+ V_j= C_{ij}$، مع $U_1= 0$

$U_1 + V_1= 2, U_1= 0 \rightarrow V_1= 2$

$U_1+ V_2= 1, U_1= 0 \rightarrow V_2= 1$

$U_2+ V_1= 4, V_1= 2 \rightarrow U_2= 2$

$U_2+ V_3= 0, U_2= 2 \rightarrow V_3= -2$

حساب فروق التكلفة δ_{ij} للمتغيرات غير الأساسية (الخانات الفارغة): $\delta_{ij}= C_{ij}- U_i- V_j$

$x_{13} : \delta_{13}= C_{13}- U_1- V_3= 0- 0- (-3)= 3 \geq 0$

$x_{22} : \delta_{22}= C_{22}- U_2- V_2= 3- 2- 1= 0\geq 0$

نلاحظ أن كل قيم فروق التكلفة δ_{ij} موجبة أو معدومة، ومعناه أنه لا يمكن تحسين الحل الأول، وبالتالي فهو حل أمثل.

إذن الحل هو: $x_{11}= 50$؛ $x_{12}= 50$؛ $x_{21}= 50$، ولا نأخذ الكمية $x_{23}= 50$ في الاعتبار لأن المصنع وهمي والتكلفة صفر.