تابع : لمسائل النقل:

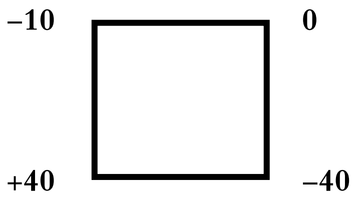
أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $C = I + J$ مع $I=0$

$$C_{11} = I_1 + J_1 \Rightarrow 2 = 0 + J_1 \Rightarrow \boldsymbol{J_1 = 2}$$
$$C_{12} = I_1 + J_2 \Rightarrow 5 = 0 + J_2 \Rightarrow \boldsymbol{J_2 = 5}$$
$$C_{22} = I_2 + J_2 \Rightarrow 1 = I_2 + 5 \Rightarrow \boldsymbol{I_2 = -4}$$
$$C_{23} = I_2 + J_3 \Rightarrow 2 = -4 + J_3 \Rightarrow \boldsymbol{J_3 = 6}$$
$$C_{33} = I_3 + J_3 \Rightarrow 1 = I_3 + 6 \Rightarrow \boldsymbol{I_3 = -5}$$
$$C_{14} = I_1 + J_4 \Rightarrow 1 = 0 + J_4 \Rightarrow \boldsymbol{J_4 = 1}$$

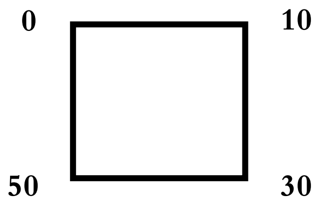
ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $E_{ij} = C - J_j - I$

$$E_{13} = C_{13} - J_3 - I_1 \Rightarrow E_{13} = 3 - 6 - 0 \Rightarrow \boldsymbol{E_{13} = -3}$$
$$E_{21} = C_{21} - J_1 - I_2 \Rightarrow E_{21} = 3 - 2 - (-4) \Rightarrow \boldsymbol{E_{21} = 5}$$
$$E_{24} = C_{24} - J_4 - I_2 \Rightarrow E_{24} = 4 - 1 - (-4) \Rightarrow \boldsymbol{E_{24} = 7}$$
$$E_{31} = C_{31} - J_1 - I_3 \Rightarrow E_{31} = 4 - 2 - (-5) \Rightarrow \boldsymbol{E_{31} = 7}$$
$$E_{32} = C_{32} - J_2 - I_3 \Rightarrow E_{32} = 2 - 5 - (-5) \Rightarrow \boldsymbol{E_{32} = 2}$$
$$E_{34} = C_{34} - J_4 - I_3 \Rightarrow E_{34} = 5 - 1 - (-5) \Rightarrow \boldsymbol{E_{34} = 9}$$

الحل المتوصل إليه ليس أمثلا، لذا نختار الخلية الأشد سالبية و هي الخلية $\boldsymbol{x_{13}}$ و التي تتم دراسة مسارها:



بما أن أقل قيمة هي 10=$(min : 10, 40)$، إذا ستأخذ الخلية الفارغة $\boldsymbol{x_{13}}$ هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:



و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

تحسين الحل باستخدام طريقة عوامل الضرب للمثال 02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 / 40	5 / ╱	3 / 10	1 / 40	90
O_2	3 / ╱	1 / 50	2 / 30	4 / ╱	80
O_3	4 / ╱	2 / ╱	1 / 70	5 / ╱	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\,(40) + 5\,(10) + 3\,(10) + 1\,(40) + 1\,(50) + 2\,(30) + 1\,(70) = 330$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 30 وحدة نقدية (360 – 330 = 30).

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $I=0$ مع $C = I + J$

$$C_{11} = I_1 + J_1 \Rightarrow 2 = 0 + J_1 \Rightarrow \boldsymbol{J_1 = 2}$$
$$C_{22} = I_2 + J_2 \Rightarrow 1 = -1 + J_2 \Rightarrow \boldsymbol{J_2 = 2}$$
$$C_{23} = I_2 + J_3 \Rightarrow 2 = I_2 + 3 \Rightarrow \boldsymbol{I_2 = -1}$$
$$C_{33} = I_3 + J_3 \Rightarrow 1 = I_3 + 3 \Rightarrow \boldsymbol{I_3 = -2}$$
$$C_{14} = I_1 + J_4 \Rightarrow 1 = 0 + J_4 \Rightarrow \boldsymbol{J_4 = 1}$$
$$C_{13} = I_1 + J_3 \Rightarrow 3 = 0 + J_3 \Rightarrow \boldsymbol{J_3 = 3}$$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $E_{ij} = C - J_j - I$

$$E_{12} = C_{12} - J_2 - I_1 \Rightarrow E_{12} = 5 - 2 - 0 \Rightarrow \boldsymbol{E_{12} = 3}$$
$$E_{21} = C_{21} - J_1 - I_2 \Rightarrow E_{21} = 3 - 2 - (-1) \Rightarrow \boldsymbol{E_{21} = 2}$$
$$E_{24} = C_{24} - J_4 - I_2 \Rightarrow E_{24} = 4 - 1 - (-1) \Rightarrow \boldsymbol{E_{24} = 4}$$
$$E_{31} = C_{31} - J_1 - I_3 \Rightarrow E_{31} = 4 - 2 - (-2) \Rightarrow \boldsymbol{E_{31} = 4}$$
$$E_{32} = C_{32} - J_2 - I_3 \Rightarrow E_{32} = 2 - 2 - (-2) \Rightarrow \boldsymbol{E_{32} = 2}$$
$$E_{34} = C_{34} - J_4 - I_3 \Rightarrow E_{34} = 5 - 1 - (-2) \Rightarrow \boldsymbol{E_{34} = 6}$$

نلاحظ أن جميع القيم الجبرية للخلايا الفارغة موجبة، مما يعني الوصول إلى الحل الأمثل، و عليه فإن تكلفة النقل المحصل عليها تساوي 330 و.ن.

و يتم تحسين الحل الابتدائي بطريقتين: طريقة **المسار المتعرج ، أو طريقة المؤشرين**

2-1- طريقة المسار المتعرج: يتم في هذه الطريقة اختبار الخلايا الفارغة الموجودة في مصفوفة الحل الابتدائي الذي تم التوصل إليه بإحدى الطرق السابقة، و المقصود بالخلايا الفارغة تلك المربعات الموجودة في المصفوفة والتي لم يتم النقل إليها، أي التي تحتوي على $x_{ij} = 0$، و يمكن تلخيص هذه الطريقة في الخطوات التالية:

- يتم تحديد و رسم مسارات الخلايا الفارغة؛
- يتم حساب القيم الجبرية للخلايا الفارغة؛
- يتم اختيار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية الأشد سلبية و تتم دراسة مسارها، و ذلك بأخذ مسار مغلق (إشارته بالتناوب +، −، + ...) و يتم اختيار أصغر قيمة من بين الزوايا التي تحمل الإشارة (−)؛
- تكرر هذه العمليات إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية للخلايا تكون موجبة أو مساوية للصفر و الذي يعني الوصول إلى الحل الأمثل.

ملاحظة: المسار ينطلق من الخلية الفارغة مرورا بالخلايا المملوءة و بخطوط مستقيمة مشكلة زوايا قائمة وصولا إلى نفس الخلية.

مثال 02: ليكن لدينا نموذج النقل التالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 x_{11}	5 x_{12}	3 x_{13}	1 x_{14}	90
O_2	3 x_{21}	1 x_{22}	2 x_{23}	4 x_{24}	80
O_3	4 x_{31}	2 x_{32}	1 x_{33}	5 x_{34}	70
b_i	40	50	110	40	240

أولا: سنقوم بحل هذا المثال باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية للحصول على الحل الابتدائي و من ثم تحسين الحل باستخدام المسار المتعرج.

حل مسألة النقل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية للمثال 02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 50	3 /	1 /	90 50 0
O_2	3 /	1 /	2 80	4 /	80 0
O_3	4 /	2 /	1 30	5 40	70 40 0
b_i	40 0	50 0	110 30 0	40 0	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\,(40)+5\,(50)+2\,(80)+1\,(30)+5\,(40) = 720$$

ثانيا: سنقوم بتحسين الحل الابتدائي، و لكن قبل ذلك ينبغي علينا التأكد من عدد الخلايا المملوءة.

عدد الخلايا المملوءة يساوي 5، و هذا لا يساوي 6=1−3+4= $(m+n-1)$، لهذا نضيف لخلية مملوءة كمية معدومة مساوية للصفر، كما يلي:

حل مسألة النقل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 50	3 /	1 /	90
O_2	3 /	1 0	2 80	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 30	5 40	70

b_i	40	50	110	40	240

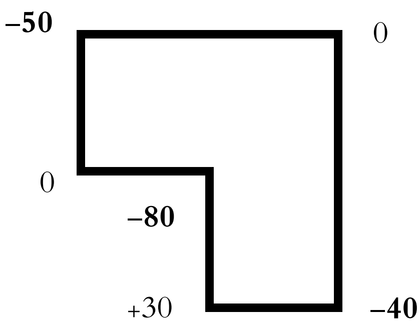
و بذلك نتحصل على خلايا 6 خلايا غير مملوءة يتم حساب قيمها الجبرية كما يلي:

حل مسألة النقل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 50	3 /	1 /	90
O_2	3 /	1 0	2 80	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 30	5 40	70
b_i	40	50	110	40	240

$$x_{13} = 3 - 5 + 1 - 2 = -3$$
$$x_{14} = 1 - 5 + 1 - 2 + 1 - 5 = -9$$
$$x_{21} = 3 - 2 + 5 - 1 = 5$$
$$x_{24} = 4 - 5 + 1 - 2 = -2$$
$$x_{31} = 4 - 2 + 5 - 1 + 2 - 1 = 7$$
$$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$$

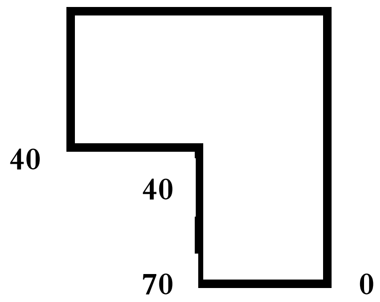
بالنظر إلى القيم الجبرية نلاحظ أن الخلية x_{14} هي الأشد سالبية حيث تمكّن من تخفيض التكاليف بمقدار 9 لكل وحدة منقولة عبرها، و بالتالي سندرس مسارها:



بما أن أقل كمية هي 40=$(min : 40, 80, 50)$، إذا ستأخذ الخلية x_{14} الفارغة هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:

10

40



و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

تحسين الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 — 40	5 — 10	3 — /	1 — /	90
O_2	3 — /	1 — 40	2 — 80	4 — /	80
O_3	4 — /	2 — /	1 — 70	5 — 0	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\ (40) + 5\ (10) + 1\ (40) + 1\ (80) + 1\ (70) + 5\ (0) = 360$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 360 وحدة نقدية (720 – 360 = 360).

يتم تكرار العملية السابقة لاختيار الخلايا الفارغة بعد التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة هي: $(m+n-1)$

$$x_{13} = 3 - 5 + 1 - 2 = -3$$

$$x_{21} = 3 - 2 + 5 - 1 = 5$$

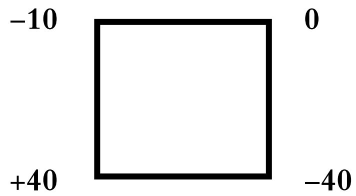
$$x_{24} = 4 - 1 + 5 - 1 = 7$$

$$x_{31} = 4 - 1 + 2 - 1 + 5 - 2 = 7$$

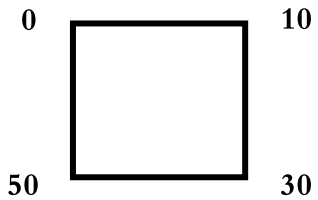
$$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$$

$$x_{34} = 5 - 1 + 5 - 1 + 2 - 1 = 9$$

نلاحظ أن الخلية x_{13} ستساهم في تخفيض التكاليف بمقدار (3-) لكل وحدة منقولة، و عليه يجب دراسة مسارها.



بما أن أقل قيمة هي 10=$(min : 40, 10)$، إذا ستأخذ الخلية الفارغة x_{13} هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:



و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

تحسين الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 /	3 10	1 40	90
O_2	3 /	1 50	2 30	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 70	5 /	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\ (40)+5\ (10)+3\ (10)+1\ (40)+1\ (50)\ +2\ (30)\ +1\ (70) = 330$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 30 وحدة نقدية (360 – 330 = 30).

يتم تكرار العملية السابقة لاختيار الخلايا الفارغة بعد التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة هي: $(m+n-1)$

$$x_{12} = 5 - 3 + 2 - 1 = 3$$
$$x_{21} = 3 - 2 + 3 - 2 = 2$$
$$x_{24} = 4 - 1 + 3 - 1 = 4$$
$$x_{31} = 4 - 1 + 3 - 2 = 4$$
$$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$$
$$x_{34} = 5 - 1 + 3 - 1 = 6$$

نلاحظ أن جميع القيم الجبرية موجبة، مما يعني أن الحل المتوصل إليه هو الحل الأمثل، و عليه فإن تكلفة النقل في هذه الحالة تساوي 330 و.ن.

2-2-

3- ملخص خوارزمية حل مسائل النقل: يمكن تلخيص خوارزمية حل مسائل النقل في الخطوات التالية:

3-1- بناء جدول الحل الأساسي الأول بحيث:

- تظهر فيه تكاليف النقل من كل منبع إلى كل مصب؛
- كميات عرض كل منبع، و كميات طلب كل مصب، بحيث يتساوى مجموع العرض مع مجموع الطلب؛

3-2- إيجاد الحل الأساسي الأول، بإحدى الطرق: الزاوية الشمالية الغربية، التكاليف الدنيا أو طريقة فوجل.

- يجب أن يكون عدد الخلايا الداخلة في الحل محققا للشرط $m+n-1$.

3-3- نختبر الحل إذا كان أمثلا أم لا، و ذلك إما بطريقة المسار المتعرج أو طريقة التوزيع المعدل؛

- نكون أمام الحل الأمثل إذا كان كل: $E_{ij} = C - J_j - I \geq 0$؛
- إذا كان الحل غير أمثل فنقوم بتحسينه، ثم نعود من جديد للخطوة السابقة، أما إن كان أمثلا فنقوم بشرحه.

4- مسائل النقل في حالة التعظيم:

لا تقتصر استخدامات مسائل النقل على حالة التدنية، و إنما يتعدى ذلك إلى حالة التعظيم أيضا و هي الحالة التي يتم فيها البحث عن أعظم ربح أو عائد في وجود نفس الشروط، فيتم استبدال تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالربح المحصل عليه من نقل الوحدة الواحدة. و تختلف هذه الحالة عن سابقتها في النقاط التالية:

- عند استخدام طريقة التكلفة كان يتم اختيار أقل تكلفة بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة الأرباح فيتم اختيار أكبر خلية في الجدول لنبدأ الحل بها، و تسمى هذه الطريقة بطريقة تعظيم الأرباح؛
- عند استخدام طريقة فوجل التقريبية كان يتم حساب الفرق بين أصغر تكلفتين لكل سطر و عمود و ذلك بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة التعظيم فيتم حساب الفرق بين أكبر رقمين لكل سطر و عمود و يلي ذلك اختيار أكبر فرق، ليتم بعدها تحديد الخلية الكبرى؛
- عند استخدام طرق تحسين الحل يتم تقييم و اختيار الخلية التي تحمل أكبر قيمة موجبة؛
- الحل الأمثل يكون عند الحصول على قيم جبرية سالبة أو معدومة للخلايا الفارغة.

مثال 03: لتكن لدينا المعطيات التالية عن مؤسسة إنتاجية، تحتوي على 3 مصانع و 3 مخازن:

المصانع	عدد الوحدات	تكلفة الإنتاج	تكلفة النقل		
			D_1	D_2	D_3
O_1	2000	200	60	80	50
O_2	2500	280	100	30	100
O_3	1800	300	80	120	70

إذا كان عدد الوحدات المطلوبة للمخازن هو على التوالي كالتالي: 1600، 2400 و 2000 وحدة، و إذا كان السعر الوحدوي في المخازن الثلاث هو على التوالي كالتالي: 450 و.ن، 240 و.ن، 400 و.ن.

المطلوب: تحديد عدد الوحدات الواجب نقلها من كل مصنع إلى كل مخزن بشرط تحقيق أعظم ربح.

4-1- تشكيل جدول النقل:

تشكيل جدول النقل للمثال 03

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	2000
O_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	2500
O_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	1800
b_i	1600	2400	2000	6300 / 6000

ما يلاحظ من الجدول أعلاه أن النموذج غير متوازن، ما يستوجب إضافة عمود آخر وهمي للطلب، فيصبح جدول النقل كالتالي:

تشكيل جدول النقل للمثال03

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	0	2000
O_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	0	2500
O_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	0	1800
b_i	1600	2400	2000	300	6300 / 6300

بما أننا في هذه الحالة بصدد تعظيم الأرباح فسنقوم بحساب الأرباح الوحدوية و التي نرمز لها بالرمز p_{ij} حيث:

الربح = سعر البيع الوحدوي – التكاليف الوحدوية الكلية (و في حالة وجود خسارة تُشطب الخلية)؛

التكاليف الوحدوية الكلية = تكاليف الإنتاج الوحدوية + تكاليف النقل الوحدوية.

التكاليف الوحدوية الكلية:

$$\begin{array}{c} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{array}\begin{pmatrix} (200+60) & (200+80) & (200+50) \\ (280+100) & (280+30) & (280+100) \\ (300+80) & (300+120) & (300+70) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 260 & 280 & 250 \\ 380 & 310 & 380 \\ 380 & 420 & 370 \end{pmatrix}$$

الربح الوحدوي:

$$\begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array}\begin{pmatrix} (450-260) & (420-280) & (400+250) \\ (450-380) & (420-310) & (400+380) \\ (450-380) & (420-420) & (400+370) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 190 & 140 & 150 \\ 70 & 110 & 20 \\ 70 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

تشكيل جدول النقل للمثال 03

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	190	140	150	0	2000
O_2	70	110	20	0	2500
O_3	70	0	30	0	1800
b_i	1600	2400	2000	300	6300 / 6300

4-2- إيجاد الحل الابتدائي الأساس باستخدام طريقة الربح الأعظم:

الحل الابتدائي الأساس باستخدام طريقة الربح الأعظم للمثال 03

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	190 1600	140 /	150 400	0 /	$\cancel{2000}$ $\cancel{400}$ 0
O_2	70 /	110 2400	20 /	0 100	$\cancel{2500}$ $\cancel{100}$ 0
O_3	70 /	0 /	30 1600	0 200	$\cancel{1800}$ $\cancel{200}$ 0
b_i	$\cancel{1600}$	$\cancel{2400}$	$\cancel{2000}$ $\cancel{1600}$ 0	$\cancel{300}$ $\cancel{100}$ 0	6300 / 6300

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 190\ (1600)+150\ (400)+110\ (2400)+0\ (100)+30\ (1600)+0\ (200) = 676000$$

عدد الخلايا المملوءة $6 = m+n-1$.

4–3– تحسين الحل الابتدائي (استخدام طريقة المسار الحرج):

تحديد الخلايا الفارغة: x_{12} , x_{14} , x_{21} , x_{23} , x_{31} , x_{32}

حساب القيم الفارغة للخلايا الفارغة:

$$x_{12} = 140 - 150 + 30 - 0 + 0 - 110 = -90$$
$$x_{14} = 0 - 0 + 30 - 150 = -120$$
$$x_{21} = 70 - 190 + 150 - 30 + 0 - 0 = 0$$
$$x_{23} = 20 - 30 + 0 - 0 = -10$$
$$x_{31} = 70 - 190 + 150 - 30 = 0$$
$$x_{32} = 0 - 110 + 0 - 0 = -110$$

نلاحظ أن جميع القيم الجبرية للخلايا الفارغة سالبة مما يعني الوصول إلى الحل الأمثل الذي يعظم الأرباح.