سلسلة التمارين رقم (4) محلولة حول تحليل قناة التوزيع: نماذج النقل والتوزيع

حل التمرين الأول:

1. النموذج الرياضي لمسألة النقل:

تحديد المتغيرات: x_{ij} الكمية المنقولة من المورد i من إلى الوحدة الإنتاجية j .

كميات العرض: $a_i= 40$؛ $a_2= 50$؛ $a_3= 70$؛ كميات الطلب: $b_1= 50$؛ $b= 60$؛ $b= 50$.

نلاحظ أن مجموع العرض= مجموع الطلب= 160 طن، إذن مسألة النقل متوازنة.

دالة الهدف: $Z= 5x_{11}+ 3x_{12}+ 4x_{13}+ 6x_{21}+ 2x_{22}+ 5x_{23}+ 4x_{31}+ 1x_{32}+ 3x_{33}$

قيود العرض (المتاحات):

$$\begin{cases} x_{11}+ x_{12}+ x_{13}= 50 \\ x_{21}+ x_{22}+ x_{23}= 60 \\ x_{31}+ x_{32}+ x_{33}= 50 \end{cases}$$

قيود الطلب (الاحتياجات):

$$\begin{cases} x_{11}+ x_{21}+ x_{31}= 40 \\ x_{12}+ x_{22}+ x_{32}= 50 \\ x_{13}+ x_{23}+ x_{33}= 70 \end{cases}$$

شرط عدم السالبية: $X_{ij}\geq 0$

جدول مسألة النقل:

S_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	5	3	4	50
S_2	6	2	5	60
S_3	4	1	3	50
b_j	40	50	70	160

2. إيجاد الحل الأولي

أ. الحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي

S_i \ D_j	D_1		D_2		D_3		a_i
S_1	**40**	5	**10**	3		4	50/10/0
S_2		6	**40**	2	**20**	5	60/20/0
S_3		4		1	**50**	3	50/0
b_j	40/0		50/40/0		70/50/0		160= 160

الحل الأساسي بطريقة الركن الشمالي الغربي: $x_{11}= 40$؛ $x_{12}= 10$؛ $x_{22}= 40$؛ $x_{23}= 20$؛ $x_{33}= 50$

ومنه التكلفة الكلية: $Z= 40(5)+ 10(3)+ 40(2)+ 20(5)+ 50(3)= 560$

التأكد من قبول الحل الأولي: عدد الخانات المملوءة= 5؛ نطبق شرط قبول الحل الأساسي: لدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 3، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5$

عدد الخانات المملوءة فعليا= عدد الخانات حسب القانون= 5، ومنه الشرط محقق، وبالتالي الحل الأساسي مقبول.

ب. الحل الأساسي بطريقة أقل تكلفة:

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	5	3	**50** 4	50/0
S_2	**40** 6	2	**20** 5	60/40/0
S_3	4	**50** 1	3	50/0
b_j	40/0	50/0	70/20/0	160

الحل الأساسي بطريقة أقل تكلفة: $x_{13}= 50$؛ $x_{21}= 40$؛ $x_{23}= 20$؛ $x_{32}= 50$

التكلفة الكلية: $Z= 50(4)+ 40(6)+ 20(5)+ 50(1)= 590$

التأكد من قبول الحل الأساسي: عدد الخانات المملوءة= 4، نطبق شرط قبول الحل الأساسي: لدينا: عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 3، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5$

عدد الخانات المملوءة ≠ عدد الخانات حسب القانون، ومنه الشرط غير محقق، وبالتالي الحل الأساسي غير مقبول.

2. ج. الحل الأساسي بطريقة الجزاء أو الغرامات (Vogel):

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	a_i	الندم (فرق التكلفتين)
S_1	**30** 5	3	**20** 4	50/30/0	1 1 1 1
S_2	**10** 6	**50** 2	5	60/10/0	3 1 1 1
S_3	4	1	**50** 3	50/0	2 1 × ×
b_j	40/10/0	50/0	70/20/0	160	
الندم فروق التكلفة	1 1 1 1	1 × × ×	1 1 1 1		

الحل الأساسي: $x_{11}= 30$؛ $x_{21}= 10$؛ $x_{13}= 20$؛ $x_{22}= 50$؛ $x_{33}= 50$.

التكلفة الكلية للنقل: $Z= 30(5)+ 20(4)+ 10(6)+ 50(2)+ 50(3)= 540$

التأكد من قبول الحل الأساسي: عدد الخانات المملوءة فعليا= 5، نطبق شرط قبول الحل الأساسي: لدينا: عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 3، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5$

عدد الخانات المملوءة فعليا= عدد الخانات حسب القانون، ومنه الشرط محقق، وبالتالي الحل الأساسي مقبول.

3. البحث عن الحل الأمثل:

ب. طريقة التوزيع المعدلة:

أ. اختبار أمثلية الحل الأساسي (المرحلة الأولى):

نطلق من الحل الأولي بطريقة **الركن الشمالي الغربي**، ونحاول اختبار أمثليته بهدف تحسينه إن أمكن، ويمر ذلك بخطوتين:

الخطوة الأولى: حساب قيم U_i و V_j بالنسبة للخانات المملوءة (المتغيرات الأساسية) فقط، حيث نستخدم العلاقة: $U_i+ V_j= C_{ij}$؛ مع افتراض: $U_1= 0$ من أجل تسهيل الحسابات:

الخانة x_{11}: $U_1 + V_1 = 5$، ولدينا: $U_1 = 0$ (تفرض دائما لتسهيل الحل)، ومنه: $V_1 = 5$.

الخانة x_{12}: $U_1 + V_2 = 3$، ولدينا: $U_1 = 0$، ومنه: $V_2 = 3$.

الخانة: x_{22}: $U_2 + V_2 = 2$، و $V_2 = 3$، منه: $U_2 = -1$

الخانة x_{23}: $U_2 + V_3 = 5$، ولدينا: $U_2 = -1$، ومنه: $V_3 = 6$

الخانة x_{33}: $U_3 + V_3 = 3$، ولدينا: $V_3 = 6$، ومنه: $U_3 = -3$

الخطة الثانية:حساب فروق التكاليف أو مؤشرات التحسين δ_{ij} بالنسبة للخانات الفارغة ا(لمتغيرات غير الأساسية) فقط، نطبق العلاقة: $\delta_{ij} = C_{ij} - U_i + V_j$

الخانة x_{13} : $\delta_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 4 - 0 - 6 = -2 < 0$ يمكن تحسن الحل الأول بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة x_{21} : $\delta_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 6 - (-1) - 5 = 2 \geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة x_{31} : $\delta_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 4 - (-3) - 5 = 2 \geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة x_{32} : $\delta_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 1 - (-3) - 3 = 1 \geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة

بعد حساب قيم الفروق في التكاليف δ_{ij}، نلاحظ وجود قيم سالبة لـ δ_{ij} ، وهذا يعني أن الحل الأساسي غير أمثل، ومنه يمكن تحسينه، وهذا باختيار أقل قيمة سالبة لفروق التكلفة δ_{ij} (هنا قيمة وحيدة سالبة – 2 للخلية x_{13})، ثم نكون مسارا مغلقا انطلاقا من الخلية السالبة x_{13}، بحيث تكون كل الخانات على رؤوس هذا المسار مملوءة، ما عدا الخلية x_{13} كما في الشكل.

D_j / S_i	D_1 $V_1 = 5$	D_2 $V_2 = 3$	D_3 $V_3 = 6$	a_i
S_1 $U_1 = 0$	**40** 5	**10** 3 -Δ	4 +Δ	50/10/0
S_2 $U_2 = -1$	6	**40** 2 +Δ	**20** 5 -Δ	60/20/0
S_3 $U_3 = -3$	4	1	**50** 3	50/0
b_j	40/0	50/40/0	70/50/0	160=160

نضع على خلايا رؤوس المسار إشارات (+) و(-) بشكل متتابع، على أن ننطلق من الخانة x_{13} بإشارة موجبة، ثم نظيف ونطرح للخانات في رؤوس المسار المقدار Δ ، حيث أن قيمة Δ هي أقل كمية في الخانات التي يوجد بها إشارة سالبة، وبالتالي فإن قيم Δ هي أقل كمية في الخانات التي يوجد بها Δ-، وهي 10، وبالتالي نحصل على جدول جديد:

D_j / S_i	D_1 $V_1 = 5$	D_2 $V_2 = 1$	D_3 $V_3 = 4$	a_i
S_1 $U_1 = 0$	**40** 5	× 3	**10** 4	50
S_2 $U_2 = 1$	6	**50** 2	**10** 5	60
S_3 $U_3 = -1$	4	1	**50** 3	50
b_j	40	50	70	160=160

اختبار أمثلية الحل المحسن (المرحلة الثانية):

الخطوة الأولى: حساب قيم U_i و V_j بالعلاقة: $U_i + V_j = C_{ij}$ بالنسبة للخانات المملوءة فقط، ونفترض أن $U_1 = 0$:

الخانة x_{11} : $U_1 + V_1 = 5 , U_1 = 0 \rightarrow V_1 = 5$

x_{13} الخانة: $U_1+V_3=4,\ U_1=0 \rightarrow V_3=4$
x_{23} الخانة: $U_2+V_3=5,\ V_3=4 \rightarrow U_2=1$
x_{22} الخانة: $U_2+V_2=2,\ U_2=1 \rightarrow V_2=1$
x_{33}: $U_3+V_3=3,\ V_3=4 \rightarrow U_3=-1$

الخطة الثانية: نقوم بحساب فروق التكاليف للخانات الفارغة فقط بالعلاقة: $\delta_{ij}=U_i+V_j-C_{ij}$

x_{12} الخانة: $\delta_{12}=C_{12}-U_1-V_2=3-0-1=2\geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة
x_{21} الخانة: $\delta_{21}=C_{21}-U_2-V_1=6-1-5=0\geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة
x_{31} الخانة: $\delta_{31}=C_{31}-U_3-V_1=4-(-1)-5=0\geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة
x_{32} الخانة: $\delta_{32}=C_{32}-U_3-V_2=1-(-1)-1=1\geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة

بعد إعادة حساب كل فروق التكاليف (مؤشرات التحسين)، نجد أنها كلها موجبة أو معدمة، وهو ما يعني أن الحل الأخير أمثل.

$Z=40(5)+10(4)+50(2)+10(5)+50(3)=540.$

المؤسسة تنقل من المورد الأول إلى المصنع الأول 40 طن، ومن المورد الأول إلى المصنع الثالث 10 طن، ومن المورد الثاني إلى المصنع الثاني 50 طن، ومن المرد الثاني إلى المصنع الثالث 10 طن، ومن المورد الثالث إلى المصنع الثالث 50 طن. وتحقق أدنى تكلفة نقل 540 ون.

حل التمرين الثاني:

1. تشكيل جدول النقل.

S_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	12	13	4	6	500
S_2	6	4	10	11	700
S_3	10	9	12	4	800
b_j	400	900	200	500	2000

2. صياغة نموذج النقل:

دالة الهدف: $Min\ Z=(12x_{11}+13x_{12}+4x_{13}+6x_{14}+6x_{21}+4x_{22}+10x_{23}+11x_{24}+10x_{31}+9x_{32}+12x_{33}+4x_{34}$

قيود العرض: $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=500\ ;\ \ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=700\ ;\ \ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=800$

قيود الطلب: $x_{11}+x_{21}+x_{31}=400\ ;\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=900\ ;\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=200\ ;\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=500$

قيد عدم السالبية: $x_{ij}\geq 0\ ;\ i=1\ \dots\ 4,\ \ j=1\ \dots\ 3$

3. البحث عن الحل الأولي

أ. الحل الأساسي بطريقة الركن الشمالي الغربي:

S_i \ D_j	D_1		D_2		D_3		D_4		a_i
S_1	400	12	100	13		4		6	500/100/0
S_2		6	700	4		10		11	700/0
S_3		10	100	9	200	12	500	4	800/700/500/0
b_j	400/0		900/800/100/0		200/0		500/0		2000

الحل الأساسي بطريقة الركن الشمالي الغربي:

$x_{11}= 400$ ؛$x_{12}= 100$ ؛$x_{22}= 700$ ؛$x_{32}= 100$ ؛$x_{33}= 200$ ؛$x_{34}= 500$

تكلفة النقل الكلية: $Min\ Z= 12(400)+ 13(100)+ 4(700)+ 9(100)+ 12(200)+ 4(500)= 14200$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية (الخانات المشغولة)= 6؛ ولدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 4، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 4- 1= 6$، ومنه الحل الأساسي مقبول.

ب. الحل الأساسي بطريقة أقل تكلفة:

S_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	**300** [12]	[13]	**200** [4]	[6]	500/300/0
S_2	[6]	**700** [4]	[10]	[11]	700/0
S_3	**100** [10]	**200** [9]	[12]	**500** [4]	800/300/100/0
b_j	400/300/0	900/200/0	200/0	500/0	2000

الحل الأساسي بطريقة أقل تكلفة:

$x_{11}= 300$ ؛$x_{13}= 200$ ؛$x_{22}= 700$ ؛$x_{31}= 100$ ؛$x_{32}= 200$ ؛$x_{34}= 500$

تكلفة النقل الكلية: $Min\ Z= 12(300)+ 4(200)+ 4(700)+ 10(100)+ 9(200)+ 4(500)= 12000$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية (الخانات المشغولة)= 6؛ ولدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 4، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 4- 1= 6$، ومنه الحل الأساسي مقبول.

ج. الحل الأساسي المقبول بطريقة فوجل التقريبية:

S_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	فروق التكاليف
S_1	[12]	[13]	**200** [4]	**300** [6]	500/300/0	2 6 × × ×
S_2	[6]	**700** [4]	[10]	[11]	700/0	2 2 2 2 ×
S_3	**400** [10]	**200** [9]	[12]	**200** [4]	800/600/400/0	5 5 1 1 1
b_j	400/0	900/200/0	200/0	500/200/0	2000=2000	
فروق التكاليف	4 4 4 4 2	5 5 5 5 -	6 × × × ×	2 2 7 × ×		

الحل الأساسي بطريقة الركن فوجل التقريبية:

$x_{13}= 200$ ؛$x_{14}= 300$ ؛$x_{22}= 700$ ؛$x_{31}= 400$ ؛$x_{32}= 200$ ؛$x_{34}= 200$

تكلفة النقل الكلية: $Min\ Z= 4(200)+ 6(300)+ 4(700)+ 10(400)+ 9(200)+ 4(200)= 12000$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية (الخانات المشغولة)= 6؛ ولدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 4، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 4- 1= 6$، ومنه الحل الأساسي مقبول.

2. البحث عن الحل الأمثل: طريقة الحجر المتنقل(التخطي)

أ. الانطلاق من الحل الأولي بطريقة فوجل:

ننطلق من الحل الأساسي بطريقة فوجل، ويتضح من الجدول أعلاه وجود أربعة خانات فارغة، وهي الخانات x_{11}، x_{12}، x_{21}، x_{23}، x_{24}، x_{33}، ويتم تقييم هذه الخانات من خلال حساب فروق التكاليف كما يلي:

الخانة x_{11}: $x_{11}\rightarrow x_{14} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{11}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{11}= 12- 6+ 4- 10= 0 \geq 0$، ومنه لا يوجد تحسين في التكلفة.

الخانة x_{12}: $x_{12}\rightarrow x_{14} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{32}\rightarrow x_{12}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{12}= 13- 6+ 4- 9= 2\geq 0$، ومنه لا يمكن تحسين التكلفة.

الخانة x_{21}: $x_{21} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{21}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{21}= 6- 4+ 9- 10= 1\geq 0$، ومنه لا يوجد تحسين في التكلفة.

الخانة x_{23}: $x_{23}\rightarrow x_{13}\rightarrow x_{14} \rightarrow x_{34}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{23}$؛ ومنه: $\Delta C_{23}= 10- 4+ 6- 4+ 9- 4= 13 \geq 0$، ومنه لا يمكن تحسين التكلفة.

الخانة x_{24}: $x_{24} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{24}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{24}= 11- 4+ 9- 4= 12\geq 0$، ومنه لا يمكن تحسين التكلفة.

الخانة x_{33}: $x_{33} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{14} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{33}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{33}= 12- 4+ 6- 4= 10 \geq 0$، ومنه لا يمكن تحسين التكلفة.

بما أن كل الفروق على المسارات موجبة، فإنه لا يمكن تحسين الحل الأساسي الذي وجدناه بطريقة فوجل، وبالتالي فهو حل أمثل.

ب. الانطلاق من الحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي:

اختبار أمثلية الحل الأولي (المرحلة الأولى):

بالنسبة للحل الأساسي بطريقة الركن الشمال الغربي وجدنا أن: $Z= 14200$، وهو ليس حل أمثل، مادام الحل الأولي بطريقة فوجل أحسن منه، ولتحسين الحل نتتبع المسارات المتعلقة لكل الخانات الفارغة وفق طريقة الحجر المتنقل:

الخانة x_{13} : $x_{13}\rightarrow x_{12} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{13}$: $\Delta C_{13}= 4- 12+ 9- 13= -12<0$ **يمكن تحسن الحل على هذا المسار**

الخانة x_{14}: $x_{14} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{14}$: $\Delta C_{14}= 6- 13+ 9- 4= -2<0$ **يمكن تحسن الحل على هذا المسار**

الخانة x_{21}: $x_{21} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{21}$: $\Delta C_{21}= 6- 4+ 13- 12= 3\geq 0$ **لا يمكن تحسن الحل على هذا المسار**

الخانة x_{23}: $x_{23}\rightarrow x_{22} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{23}$: $\Delta C_{23}= 10- 4+ 9- 12= 3\geq 0$ **لا يمكن تحسن الحل على هذا المسار**

الخانة x_{24}: $x_{24}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{34}\rightarrow x_{24}$: $\Delta C_{24}= 11- 4+ 9- 4= 12\geq 0$ **لا يمكن تحسن الحل على هذا المسار**

الخانة x_{31}: $x_{31}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{31}$: $\Delta C_{31}= 10- 9+ 13- 12= 2\geq 0$ **يمكن تحسن الحل على هذا المسار**

لدينا خانتان يمكن تحسين من خلالهما: x_{13} وx_{14}، لكن نختار المسار الأول (الخانة x_{13})، لأن التخفيض في التكلفة أكبر (12-)، وبما أن: $Min(100, 200)= 100$، حيث 100 و200 هي قيم الخانات الممتلئة ذات الإشارة السالبة على مسار الخلية x_{13}

الجدول التالي يوضح مسار تحسين التكلفة انطلاقا من الخانة x_{13} (ملونة الأصفر)

S_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	400 (12)	100 - (13)	+ (4)	(6)	500/100/0
S_2	(6)	700 (4)	(10)	(11)	700/0
S_3	(10)	100 - (9)	200 + (12)	500 (4)	800/700/500/0
b_j	400/0	900/800/100/0	200/0	500/0	2000

ومنه تخفيض التكلفة سيكون بـ: $(-12) \times 100= -1200$، وبالتالي تصبح التكلفة الكلية: $14200-1200= 13000$.

الحل المحسن يكون كما في الجدول التالي:

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	**400** 12	13	**100** 4	6	500/100/0
S_2	6	**700** 4	10	11	700/0
S_3	10	**200** 9	**100** 12	**500** 4	800/700/500/0
b_j	400/0	900/800/100/0	200/0	500/0	2000

ومنه الحل المحسن: $x_{11}= 400$ ؛ $x_{13}= 100$ ؛ $x_{22}= 700$ ؛ $x_{32}= 200$ ؛ $x_{33}= 100$ ؛ $x_{34}= 500$

التكلفة الكلية تصبح: $Z= 12(400)+ 4(100)+ 700(4)+ 200(9)+ 100(12)+ 500(4)= 13000$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية (الخانات المشغولة)= 6؛ ولدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 4، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 4- 1= 6$، ومنه الحل المحسن مقبول.

اختبار أمثلية الحل المحسن (المرحلة الثانية):

نقوم باختبار المسارات المغلقة التي تنطلق من كل خانة فارغة (متغير غير أساسي)، وباقي رؤوسها الأفقية والعمودية تتكون من خلايا مملوءة(متغيرات أساسية)

الخانة x_{12}: $x_{12} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{12}$: $\Delta C_{12}= 13- 4+ 12- 9= 12\geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة x_{14}: $x_{14}\rightarrow x_{13} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{14}$: $\Delta C_{14}= 6- 10 +12- 4= 4 \geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة x_{21}: $x_{21}\rightarrow x_{22} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{21}$: $\Delta C_{21}= 6- 4+ 9- 12+ 4- 12= -9<0$ **يمكن تحسين**

الخانة x_{23}: $x_{23}\rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{23}$: $\Delta C_{23}= 10- 4+ 9- 12= 3\geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة x_{24}: $x_{24} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{24}$: $\Delta C_{24}= 11- 4+ 9- 4= 12\geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

x_{31} : $x_{31} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{31}$: $\Delta C_{31}= 10- 12+ 4- 12= -10< 0$ يمكن تحسين الحل على هذا المسار

نختار مسار الخانة x_{31}، لأن التخفيض في التكلفة أكبر (- 10)، وبما أن: $Min(100, 400)= 100$، ومنه تخفيض التكلفة سيكون بـ: $(-10) \times 100= -1000$، وبالتالي تصبح التكلفة الكلية: $13000-1000= 12000$.

والمسار يوضحه الجدول التالي:

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	- 400 12	13	+ 100 4	6	500/100/0
S_2	6	700 4	10	11	700/0
S_3	+ 10	200 9	- 100 12	500 4	800/700/500/0
b_j	400/0	900/800/100/0	200/0	500/0	2000

جدول الحل بعد التحسين (المرحلة الثانية) يكون كما يلي:

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	300 12	13	200 4	6	500/100/0
S_2	6	700 4	10	11	700/0
S_3	100 10	200 9	12	500 4	800/700/500/0
b_j	400/0	900/800/100/0	200/0	500/0	2000

الحل المحسن يصبح:

$x_{13}= 200$ ؛$x_{14}= 300$ ؛$x_{22}= 700$ ؛$x_{31}= 400$ ؛$x_{32}= 200$ ؛$x_{34}= 200$

تكلفة النقل الكلية: $Min\ Z= 4(200)+ 6(300)+ 4(700)+ 10(400)+ 9(200)+ 4(200)= 12000$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية(الخانات المشغولة)= 6؛ ولدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 4، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 4- 1= 6$، ومنه الحل الأساسي مقبول.

اختبار أمثلية الحل المحسن (المرحلة الثالثة):

الخانة x_{12}: $x_{12} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{33} \to x_{12}$: $\Delta C_{12}= 13- 9+ 10- 12= 2\geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة x_{14}: $x_{14} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{34} \to x_{14}$: $\Delta C_{14}= 6- 12+ 10- 4= 0\geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة x_{21}: $x_{21} \to x_{22} \to x_{32} \to x_{31} \to x_{21}$: $\Delta C_{21}= 6- 4+ 9- 10= 1\geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة x_{23}: $x_{23} \to x_{13} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{32} \to x_{22} \to x_{23}$: $\Delta C_{23}= 12- 4+ 12- 10+ 9- 4=15\geq 0$ **لا يمكن تحسين**

الخانة x_{24}: $x_{24} \to x_{22} \to x_{32} \to x_{34} \to x_{24}$: $\Delta C_{24}= 11- 4+ 9- 4= 12\geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة x_{33}: $x_{33} \to x_{31} \to x_{11} \to x_{13} \to x_{33}$: $\Delta C_{33}= 12- 10+ 12- 4= 10\geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

نلاحظ أن فروق التكلفة كلها موجبة، وبالتالي لا يمكن تحسين الحل السابق، أي أنه حل أمثل، ومنه:

$x_{13}= 200$ ؛$x_{14}= 300$ ؛$x_{22}= 700$ ؛$x_{31}= 400$ ؛$x_{32}= 200$ ؛$x_{34}= 200$

تكلفة النقل الكلية: $Z= 4(200)+ 6(300)+ 4(700)+ 10(400)+ 9(200)+ 4(200)= 12000$

حل التمرين الثالث:

بإتباع أسلوب التوزيع المعدل، نبحث عن الحل الأمثل لمسألة النقل التالية، وذلك باختبار الحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي:

S_i \ D_j	D_1		D_2		D_3		متاح
S_1	100	21	100	11		31	200/100/0
S_2		10	300	10	200	20	500/200/0
S_3		13		9	300	6	300/0
احتياج	100/0		400/300/100/0		500/300/0		1000

الحل الأساسي بطريقة الركن الشمالي الغربي: $x_{11}= 100$ ؛$x_{12}= 100$ ؛$x_{22}= 300$ ؛$x_{23}= 200$ ؛$x_{33}= 300$.

تكلفة النقل الكلية: $Min\ Z= 21(100)+ 11(100)+ 10(300)+ 20(200)+ 6(300)= 12000$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية(الخانات المشغولة)= 5؛ ولدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 3، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5$، ومنه الحل الأساسي مقبول.

اختبار أمثلية الحل الأولي (المرحلة الأولى):

الخطوة الأولى: نقوم بحساب قيم U_i وV_j بالعلاقة: $U_i+ V_j= C_{ij}$ بالنسبة للخانات المملوءة فقط، ومن أجل تسهيل الحساب، نفترض أن: $U_1= 0$

الخانة x_{11}: $U_1+ V_1=21$, $U_1= 0 \to V_1= 21$

الخانة x_{12}: $U_1+ V_2= 11$, $U_1= 0 \to V_2= 11$

الخانة x_{22}: $U_2+ V_2= 10$, $V_2= 11 \to U_2= -1$

الخانة x_{23}: $U_2+ V_3= 20$, $U_2= -1 \to V_3= 21$

الخانة x_{33}: $U_3+ V_3= 6$, $V_3= 21 \to U_3= -15$

الخطة الثانية: نقوم بحساب فروق التكلفة(مؤشرات الحل) بتطبيق العلاقة: $\delta_{ij}= C_{ij} - U_i - V_j$، وهذا للخلايا الفارغة فقط:

الخانة x_{13}: $\delta_{13}= C_{13} - U_1 - V_3= 31- 0- 21= 10\geq 0$ لا يمكن تحسن الحل بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة x_{21}: $\delta_{21}= C_{21} - U_2 - V_1= 10- (-1)- 21= -10< 0$ يمكن تحسن الحل بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة x_{31}: $\delta_{31}= C_{31} - U_3 - V_1= 13- (-15)- 21= 7\geq 0$ لا يمكن تحسن الحل بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة x_{32}: $\delta_{32}= C_{32} - U_3 - V_2= 9- (-15)- 11= 13\geq 0$ لا يمكن تحسن الحل بنقل كمية إلى هذه الخانة

بما أن بعض فروق التكاليف δ_{ij} سالبة، فإن الحل الأساسي بطريقة الركن الشمالي الغربي غير أمثل، حيث أن المسار الذي ينطلق من الخانة x_{21} يسمح بتحسين الحل كما في الجدول التالي:

S_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	متاح
S_1	100 (-) | 21	100 (+) | 11	| 31	200/100/0
S_2	(+) | 10	300 (-) | 10	200 | 20	500/200/0
S_3	| 13	| 9	300 | 6	300/0
احتياج	100/0	400/300/100/0	500/300/0	1000

إذن: ملء الخلية x_{21} بـ: $Min(100 , 300)= 100$، سيؤدي إلى تخفيض التكاليف بـ: $10(100)= 1000$، وبالتالي تحسين الحل. وهو ما يوضحه جدول الحل التالي بعد التحسين:

S_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	متاح
S_1	| 21	200 | 11	| 31	200
S_2	100 | 10	200 | 10	200 | 20	500
S_3	| 13	| 9	300 | 6	300
احتياج	100	400	500	1000

$x_{12}= 200$ ؛$x_{21}= 100$ ؛$x_{22}= 200$ ؛$x_{23}= 200$ ؛$x_{33}= 300$.

تكلفة النقل الكلية: $Z= 11(200)+ 10(100)+ 10(200)+ 20(200)+ 6(300)= 11000$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية(الخانات المشغولة)= 5؛ ولدينا عدد الأسطر = 3؛ عدد الأعمدة= 3، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5$، ومنه الحل مقبول.

اختبار أمثلية الحل(المرحلة الثانية):

الخطوة الأولى: نقوم بحساب قيم U_i و V_j للخانات المملوءة فقط، بالعلاقة: $U_i+ V_j= C_{ij}$؛ ونفترض أن $U_1= 0$:

الخانة x_{12}: $U_1+ V_2=11 , U_1= 0 \rightarrow V_1= 11$

الخانة x_{21}: $U_2+ V_1= 10, V_1= 11 \rightarrow U_2= -1$

الخانة x_{22}: $U_2+ V_2= 10, U_2= -1\rightarrow V_2= 11$

الخانة x_{23}: $U_2+ V_3= 20, U_2= -1 \rightarrow V_3= 21$

الخانة x_{33}: $U_3+ V_3= 6, V_3= 21 \rightarrow U_3= -15$

الخطة الثانية: نقوم بحساب فروق التكلفة(مؤشرات التحسين) للخلايا الفارغة فقط، بالعلاقة: $\delta_{ij}= C_{ij} - U_i - V_j$:

الخانة x_{11}: $\delta_{11}= C_{11} - U_1 - V_1= 21- 0- 11= 10\geq 0$

الخانة x_{13}: $\delta_{13}= C_{13} - U_1 - V_3= 31- (0)- 21= 10\geq 0$

الخانة x_{31}: $\delta_{31}= C_{31} - U_3 - V_1= 13- (-15)- 11= 17\geq 0$

الخانة x_{32}: $\delta_{32}= C_{32} - U_3 - V_2= 9- (-15)- 11= 13\geq 0$

بما أن كل قيم δ_{ij} كلها غير سالبة، فإن الحل الأخير هو الحل الأمثل:

$x_{12}= 200$ ؛$x_{21}= 100$ ؛$x_{22}= 200$ ؛$x_{23}= 200$ ؛$x_{33}= 300$.

وتكلفة النقل الكلية:

$Z= 11(200)+ 10(100)+ 10(200)+ 20(200)+ 6(300)= 11000$

حل التمرين الرابع:

مسألة النقل غير متوازنة، لأن مجموع العرض (المتاح)= 50+ 30+ 20= 100؛ ومجموع الطلب(الاحتياج)= 10+40+25= 75؛ وبما أن مجموع العرض أكبر من مجموع الطلب، لذا يجب إضافة مصنع جديد يغطي الفرق بين العرض والطلب 25، وهمنا أمام المؤسسة بديلان A وB، وعليه يكون جدول النقل المتوازن بعد إضافة كل بديل كما يلي:

إعداد جدول النقل مع إضافة البديل الأول (مصنع A):

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	8	10	2	3	50
S_2	3	7	9	8	30
S_3	6	4	5	1	20
b_j	10	40	25	25	100

إعداد جدول النقل مع إضافة البديل الثاني (مصنع B):

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	8	10	2	4	50
S_2	3	7	9	6	30
S_3	6	4	5	5	20
b_j	10	40	25	25	100

نلاحظ أن مسألة النقل صارت متوازنة، لأن مجموع العرض= مجموع الطلب= 100، لذا نبدأ بحل المسألة بطريقة التكلفة الأقل:

البديل الأول (إضافة المصنع الجديد A):

D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	8	10	**25** 2	**25** 3	50/25/0
S_2	**10** 3	**20** 7	9	8	30/20/0
S_3	6	**20** 4	5	10	20/0
b_j	10/0	40/20/0	25/0	25/0	100=100

إذن تكلفة النقل الكلية عند إضافة البديل الأول (المصنع A):

$Z= 25(2)+ 25(3)+ 10(3)+ 20(7)+ 20(4)= 375$

البديل الثاني (إضافة المصنع B):

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	8	10	**25** 2	**25** 4	50/25/0
S_2	**10** 3	**20** 7	9	6	30/20/0
S_3	6	**20** 4	5	5	20/0
b_j	10/0	40/20/0	25/0	25/0	100=100

إذن تكلفة النقل الكلية عند إضافة البديل الثاني (المصنع B):

$$Z= 25(2)+ 25(4)+ 10(3)+ 20(7)+ 20(4)= 400$$

مجموع التكاليف للبديل الأول A= تكلفة النقل + تكاليف التشغيل= 375+ 2500= 2875

مجموع التكاليف للبديل الثاني B= تكاليف النقل+ تكاليف التشغيل= 400+ 2200= 2600

يتضح مما تقدم، أنه رغم أن تكاليف النقل والتوزيع للبديل الأول A كانت أقل(375 <400)، إلا أن أخذ تكاليف التشغيل في الحسبان، يجعل البديل الأول B هو الأفضل، لأن التكاليف الإجمالية للنقل والتشغيل هي الأقل.

حل التمرين الخامس:

1. الصيغة الرياضية:

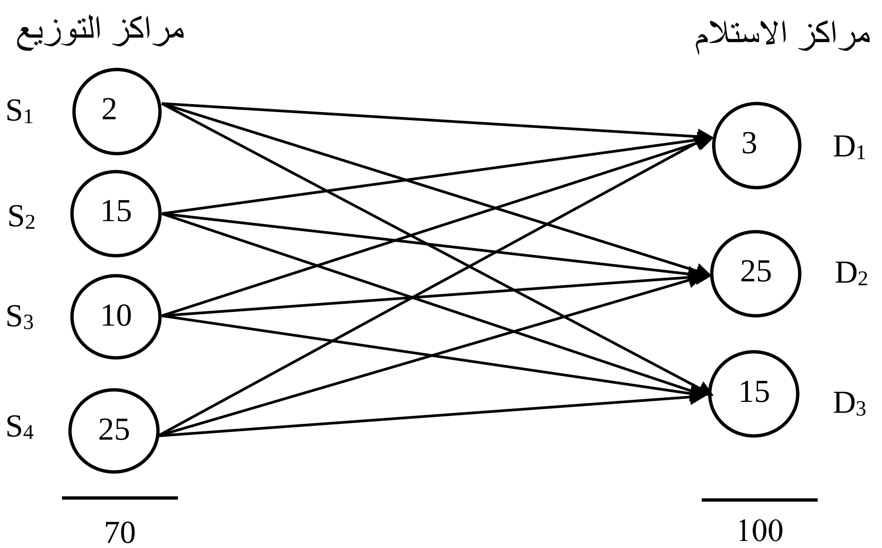
$Z= Min(8x_{11}+ 12x_{12}+ 3x_{13}+ 10x_{21}+ 6x_{22}+ 11x_{23}+ 1x_{31}+ 4x_{32}+ 8x_{33}+ 7x_{41}+ 11x_{42}+ 5x_{43})$ دالة الهدف

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+ x_{12}+ x_{13}= 20 \\ x_{21}+ x_{22}+ x_{23}= 15 \\ x_{31}+ x_{32}+ x_{33}= 10 \\ x_{41}+ x_{42}+ x_{43}= 20 \end{array}\right\}$$ شروط مراكز العرض

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+ x_{21}+ x_{31}+ x_{41}= 30 \\ x_{12}+ x_{22}+ x_{32}+ x_{42}= 30 \\ x_{13}+ x_{23}+ x_{33}+ x_{43}= 30 \end{array}\right\}$$ شروط مراكز الطلب

$x_{ij} \geq 0$ قيد عدم السالبية

2. رسم مسارات النقل والتوزيع:



3.البحث عن الحل الأول بمختلف الطرق:

أ. طريقة الركن الشمالي الغربي:

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	8 **20**	12	3	20/0
S_2	10 **10**	6 **5**	11	15/5/0
S_3	1	4 **10**	8	10/0
S_4	7	11 **10**	5 **15**	25/0
b_j	30/10/0	25/20/10/0	15/0	**70=70**

عدد الأسطر: $m= 4$، وعدد الأعمدة: $n= 3$، ومنه: $m+ n- 1= 4+ 3- 1= 6$؛ عدد الخلايا المشغولة= 6، ومنه الحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي مقبول

تكلفة النقل الكلية: $CT= 20(8)+ 10(5)+ 5(6)+ 10(4)+ 10(11)+ 15(5)= 515$

ب. طريقة أقل تكلفة:

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	8	12 **5**	3 **15**	20/5/0
S_2	10	6 **15**	11	15/0
S_3	1 **10**	4	8	10/0
S_4	7 **20**	11 **5**	5	25/5/0
b_j	30/20/0	25/10/5/0	15/0	70=70

عدد الأسطر: $m= 4$، وعدد الأعمدة: $n= 3$، ومنه: $m+ n- 1= 4+ 3- 1= 6$؛ وعدد الخلايا المشغولة= 6، ومنه الحل الأولي بطريقة أقل تكلفة مقبول.

التكلفة الكلية للنقل: $CT= 5(12)+ 15(3)+ 15(6)+ 10(1)+ 20(7)+ 5(11)= 400$

3.البحث عن الحل الأمثل بطريقة الحجر المتنقل:

ننطلق من الحل الأول بطريقة أقل تكلفة، ونحاول اختباره أمثليته بطريقة الحجر المتنقل، وتحسينه إذا كان قابل للتحسين حتى الوصول للحل الأمثل:

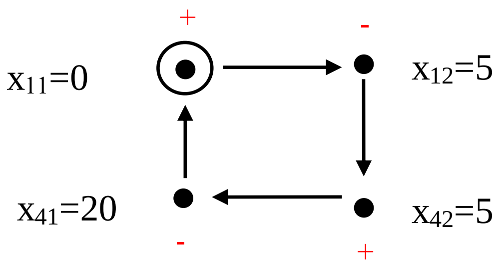
اختبار أمثلية الحل الأولي (المرحلة الأولى):

المتغيرات غير الأساسية: $x_{11}=0$ ؛$x_{21}=0$ ؛$x_{23}=0$ ؛$x_{32}=0$ ؛$x_{33}=0$ ؛$x_{43}=0$

المتغير غير الأساسي x_{11}: الخانة (1 , 1)

المسار المغلق: $x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{42}\rightarrow x_{41}\rightarrow x_{11}$

التغير في التكلفة على هذا المسار: $\delta_{11}= 8-12+ 11- 7= 0\geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).

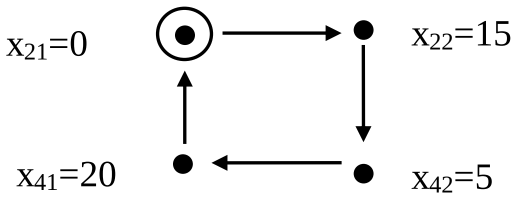


$\Delta C_{11}= 8- 12+ 11- 7= 0$ ⟶ لا يوجد تحسين في التكلفة

المتغير غير الأساسي: x_{21} الخانة (2 , 1)

المسار المغلق: $x_{21}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{42}\rightarrow x_{41}\rightarrow x_{21}$

التغير في التكلفة على هذا المسار: $\delta_{21}= 10- 6+ 11- 7= 8\geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).

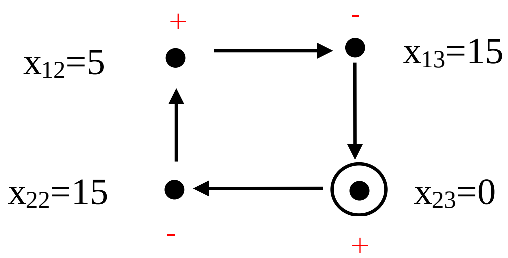


$\Delta C_{21}= 10- 6+ 11- 7= 8$ ⟶ لا يوجد تحسين في التكلفة

المتغير غير الأساسي: x_{23} الخانة (2 , 3)

المسار المغلق: $x_{23}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{13}\rightarrow x_{23}$

التغير في التكلفة على هذا المسار: $\delta_{23}= 11- 3+ 12- 6= 15\geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار)

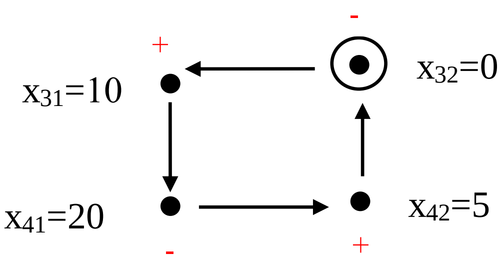


$\Delta C_{23}= 11- 3+ 12- 6= 15$ ⟶ لا يوجد تحسين في التكلفة

المتغير غير الأساسي: x_{32} الخانة (3 , 2)

المسار المغلق: $x_{32}\rightarrow x_{42}\rightarrow x_{41}\rightarrow x_{31}\rightarrow x_{32}$

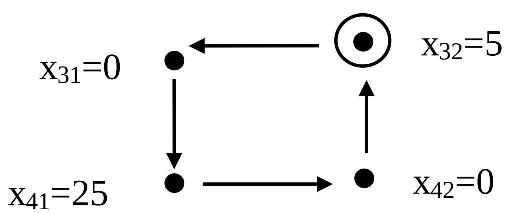
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\delta_{32}= 4- 11+ 7- 1= -1< 0$ (يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار)



$\Delta C_{32}= 4- 1+ 7- 11= -1< 0$ ⟶

يوجد تحسين في التكلفة

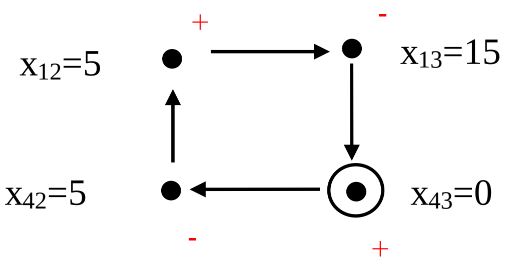
Min(5, 20, 5)= 5



المتغير غير الأساسي : x_{43} الخانة (4 , 3)

المسار المغلق: $x_{43}\rightarrow x_{42}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{13}\rightarrow x_{43}$

التغير في التكلفة على هذا المسار: $\delta_{43}= 5- 11+ 12- 3= 3\geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).

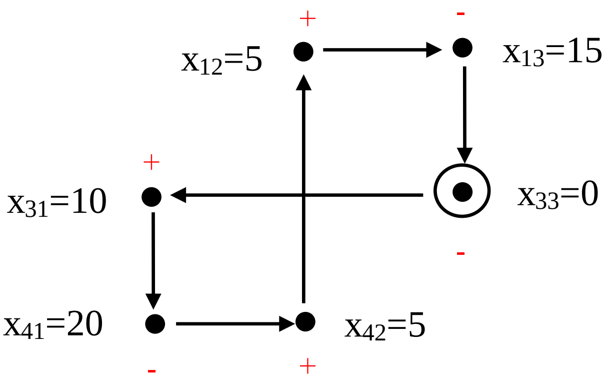


$\Delta C_{43}= 5- 11+ 12- 3= 3> 0$ ⟶ لا يوجد تحسين في التكلفة

المتغير غير الأساسي x_{33}: الخانة (3 , 3)

المسار المغلق: $x_{33} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{41} \rightarrow x_{42} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{33}$

التغير في التكلفة على هذا المسار: $\delta_{33}= 8- 1+ 7- 11+ 12- 3= 12\geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).



$\Delta C_{33}= 8- 1+ 7- 11+ 12- 3= 12 > 0$ ⟶ لا يوجد تحسين في التكلفة

نلاحظ أن التغير في التكلفة على المسار المغلق بالنسبة للخانة x_{32} سالب (1-)، ومنه يمكن تخفيض التكلفة، من خلال نقل أكبر كمية ممكنة: $Min(5 , 10)= 5$، والتكلفة الكلية تنخفض بـ: $5(-1)= -5$، وهو ما يوضحه الجدول التالي:

S_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	8	12 **5**	3 **15**	20/5/0
S_2	10	6 **15**	11	15/0
S_3	1 - **10**	4 +	8	10/0
S_4	7 + **20**	11 - **5**	5	25/5/0
b_j	30/20/0	25/10/5/0	15/0	70=70

لتحسين الحل: نضيف للخانة x_{32} كمية 5؛ نطرح من الخانة x_{42} كمية 5، نضيف للخانة x_{41} كمية 5، ونطرح من الخانة x_{31} كمية 5، وبالتالي يصبح **الحل المحسن** كما في الجدول التالي:

S_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	8	12 **5**	3 **15**	20
S_2	10	6 **15**	11	15
S_3	1 **5**	4 **5**	8	10
S_4	7 **25**	11	5	25
b_j	30	25	15	70=70

تكلفة النقل الكلية: $CT= 5(12)+ 15(3) + 15(6) + 5(1) + 5(4) + 25(7) = 395$

نلاحظ أن الحل الأولي بطريقة أقل تكلفة تحسن من تكلفة نقل كلية 400 إلى 395، أي بتحسن يساوي 5.

مقبولية الحل المحسن: $m+ n- 1= 4+3-1= 6$؛ وهو يساوي عدد الخانات المملوءة 6، ومنه الحل المحسن مقبول.

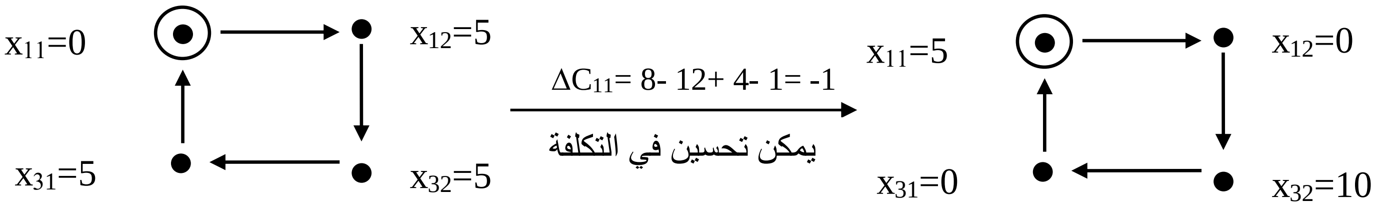
اختبار أمثلية الحل المحسن: المرحلة الثانية

الخانات الفارغة (المتغيرات غير الأساسية): $x_{11}=0$؛ $x_{21}=0$؛ $x_{23}=0$؛ $x_{33}=0$؛ $x_{42}=0$؛ $x_{43}=0$.

المتغير غير الأساسي x_{11}: الخانة (1 , 1)

المسار المغلق: $x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{31}\rightarrow x_{11}$

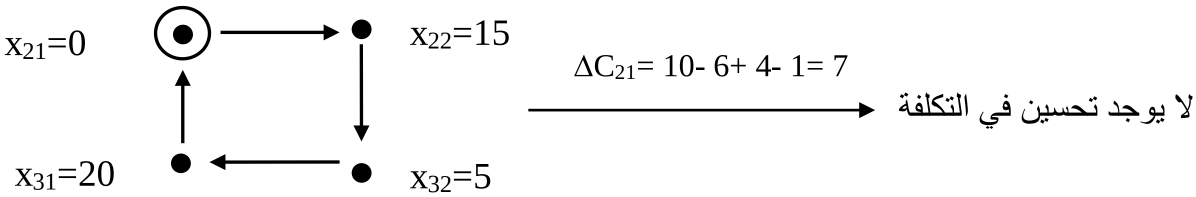
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\delta_{11}= 8-12+ 4- 1= -1< 0$ (يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).



المتغير غير الأساسي x_{21}: الخانة (1 , 2)

المسار المغلق: $x_{21}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{31}\rightarrow x_{21}$

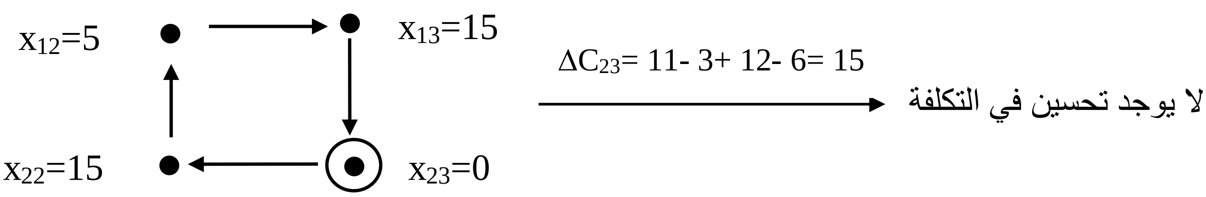
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\delta_{21}= 10-6+ 4- 1= 7\geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).



المتغير غير الأساسي x_{23}: الخانة (3 , 2)

المسار المغلق: $x_{23}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{13}\rightarrow x_{23}$

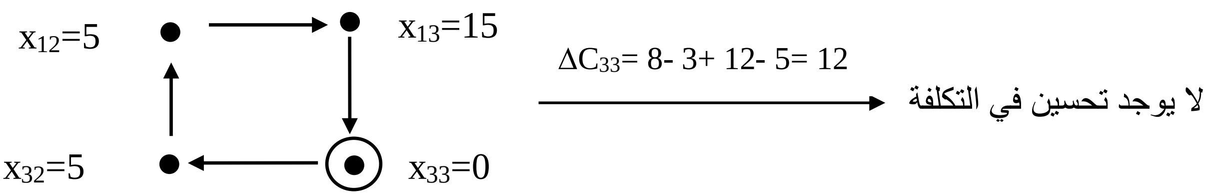
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\delta_{23}= 11-3+ 12- 6= 15\geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).



المتغير غير الأساسي x_{33}: الخانة (3 , 3)

المسار المغلق: $x_{33}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{13}\rightarrow x_{33}$

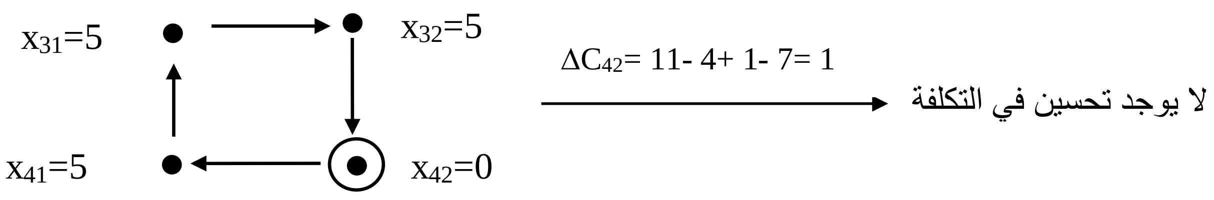
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\delta_{33}= 8-3+ 12- 5= 12\geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).



المتغير غير الأساسي x_{42}: الخانة (4 , 2)

المسار المغلق: $x_{42} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{41} \rightarrow x_{42}$

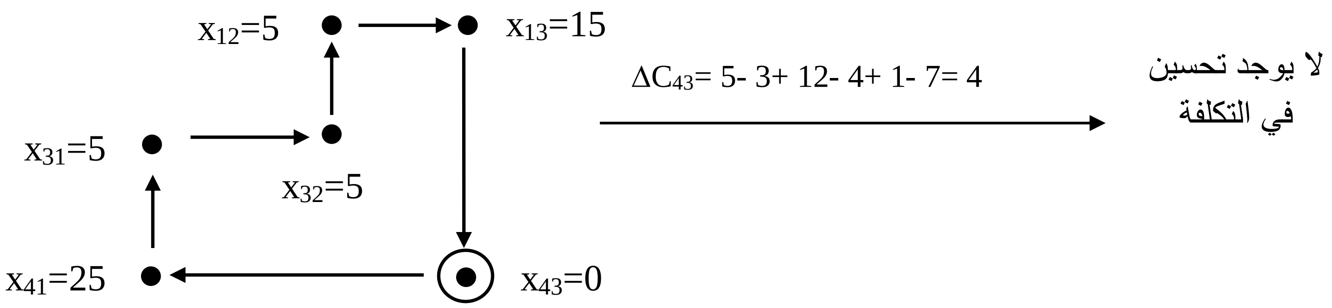
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\delta_{42}= 11-4+ 1- 7= 1\geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).



المتغير غير الأساسي x_{43}: الخانة (4 , 3)

المسار المغلق: $x_{43} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{41} \rightarrow x_{43}$

التغير في التكلفة على هذا المسار: $\delta_{43}= 5- 3+ 12- 4+ 1- 7= 4\geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).



بالنسبة للخانة x_{11} بما أن التغير في التكلفة سالب (1-) على المسار فيمكن تحسين الحل بتخفيض التكلفة، من خلال نقل أكبر كمية ممكنة: $Min(5 , 10)= 5$، والتكلفة الكلية تنخفض بـ: $5(1)= 5$. والجدول التالي يوضح مسار التحسين انطلاقا من الخانة x_{11}:

S_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	8 ; +	12 ; - 5	3 ; 15	20
S_2	10 ; -	6 ; + 15	11	15
S_3	1 ; 5	4 ; 5	8	10
S_4	7 ; 25	11	5	25
b_j	30	25	15	70=70

من خلال الجدول السابق، يمكن تحسين الحل من خلال : إضافة للخانة x_{32} كمية 5؛ طرح من الخانة x_{42} كمية 5، نضيف للخانة x_{41} كمية 5، ونطرح من الخانة x_{31} كمية 5، وبالتالي يصبح **الحل المحسن** كما في الجدول التالي:

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	(8) **5**	(12)	(3) **15**	20
S_2	(10)	(6) **15**	(11)	15
S_3	(1)	(4) **10**	(8)	10
S_4	(7) **25**	(11)	(5)	25
b_j	30	25	15	70=70

ومنه التكلفة الكلية: $CT= 5(8)+ 15(3) + 15(6) + 10(4) + 25(7) = 390$

اختبار أمثلية الحل المحسن (المرحلة الثالثة):

نلاحظ أنه يوجد 5 خانات مملوءة (متغيرات أساسية)؛ هذا الأخير يختلف عن: $n+ m- 1= 4+ 3- 1= 6$، لذا هذه الحالة غير طبيعية (تسمى حالة انحلال أو حالة حل ناقص)، حيث يصعب إيجاد مسارات مغلقة لبعض المتغيرات غير الأساسية، خاصة بالنسبة للمتغير غير الأساسي x_{12}، ولهذا نفترض أن أحد المتغيرات غير الأساسية يساوي 0، وهو ما يعني تحويله إلى متغير أساسي عن طريق إعطائه كمية 0، وليكن x_{31} (لأنه أقل الخانات الفارغة تكلفة)، وعليه يكون الجدول كما يلي:

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	(8) **5**	(12)	(3) **15**	20
S_2	(10)	(6) **15**	(11)	15
S_3	(1) **0**	(4) **10**	(8)	10
S_4	(7) **25**	(11)	(5)	25
b_j	30	25	15	70=70

نقوم بتكوين مسارات مغلقة للخانات الفارغة: x_{12}؛ x_{21}؛ x_{23}؛ x_{33}؛ x_{42}؛ x_{43}، ونحسب التغير في التكلفة ΔC_{ij} لكل منها (مؤشرات التحسين) كما يلي:

الخانة x_{12}: $x_{12} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{12}$: $\Delta C_{12}= 12- 8+ 1- 4= 1 \geq 0$ لا يمكن تخفيض التكلفة

الخانة x_{21}: $x_{21} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{21}$: $\Delta C_{21}= 10- 6+ 4- 1= 7 \geq 0$ لا يمكن تخفيض التكلفة

الخانة x_{23} : $x_{23} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23}$: $\Delta C_{23}= 11- 3+ 8- 1+ 4- 6= 13 \geq 0$ لا يمكن تخفيض التكلفة

الخانة x_{33}: $x_{33} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{33}$: $\Delta C_{33}= 8- 3+ 8- 1= 12 \geq 0$ لا يمكن تخفيض التكلفة

الخانة x_{42}: $x_{42} \rightarrow x_{41} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{42}$: $\Delta C_{42}= 11- 4+ 1- 7= 1 \geq 0$ لا يمكن تخفيض التكلفة

الخانة x_{43}: $x_{43} \rightarrow x_{41} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{43}$: $\Delta C_{43}= 5- 3+ 8- 7= 3 \geq 0$ لا يمكن تخفيض التكلفة

نلاحظ أن كل التغيرات في التكلفة على كل المسارات تأخذ قيم موجبة، وبالتالي لا يمكن تحسين الحل على أي من هذه المسارات، ولذلك فالحل المحسن الأخير هو الحل الأمثل.

إذن الحل الأمثل: $x_{11}= 5$ ؛ $x_{13}= 15$ ؛ $x_{22}= 15$ ؛ $x_{32}= 10$ ؛ $x_{41}= 25$

والتكلفة الكلية المثلى للنقل: $CT= 5(8)+ 15(3) + 15(6) + 10(4) + 25(7) = 390$