Table des matières

Table des figures

Intégrales impropres

Dans la définition et l'étude de l'intégration aux sens de Riemann, on a toujours considéré des fonctions réelles définies sur des intervalle $[a, b]$ compacts (fermés et bornés). Le but de ce chapitre est de généraliser dans certains cas, la notion d'intégration à des fonctions définies sur un intervalle qui n'est pas un intervalle fermé borné, c'est à dire un intervalle d'un des types suivants :

- $[a, b[$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$.
- $]a, b]$ où $-\infty \leq a < b < +\infty$.
- $]a, b[$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Ainsi nous allons rencontrer ici le calcul d'intégrale de domaines non bornés, soit parce que l'intervalle d'intégration est infini, soit parce que la fonction à intégrer tend vers l'infini aux bornes de l'intervalle.

0.1 Notions de base

On considère un intervalle quelconque $I \subset \mathbb{R}$ qui est ni vide, ni réduit à un point (l'un des types cités plus haut).

Définition 0.1 *Les points incertains sont les points au voisinage desquels la fonction n'est pas bornée d'une part, d'autre part soit* $(+\infty)$, *soit* $(-\infty)$.

Définition 0.2 *Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle I. On dit que f est localement intégrable sur I, si la restriction de f sur chaque intervalle fermé et borné $[\alpha, \beta]$ inclus dans I est intégrable aux sens de Riemann, c-à-d :* $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \in \mathbb{R}$.

Exemple 0.1 *La fonction* $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ *est localement intégrable sur l'intervalle* $]1, +\infty[$, *puisque :*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|_{\alpha}^{\beta} = \ln(\beta - 1) - \ln(\alpha - 1) \in \mathbb{R}, \quad \forall [\alpha, \beta] \subset]1, +\infty[.$$

Remarque 0.1 *:*

1. *Toute fonction continue sur un intervalle* I *est localement intégrable sur cet intervalle.*
2. *Toute fonction numérique monotone sur un intervalle* I *est localement intégrable sur cet intervalle.*

0.2 Intégration d'une fonction localement intégrable

0.2.1 Nature d'une intégrale impropre

Définition 0.3 *On considère une fonction* f *localement intégrable sur l'intervalle* $[a, b[$, *avec* $b \in \mathbb{R}$ *ou* $b = +\infty$ *(*b *est le seul point incertain).*

1. *On dit que l'intégrale de* f *sur* $[a, b[$ *est convergente (ou existe) si la fonction*

$$F : x \to \int_a^x f(t)\, dt$$

a une limite finie lorsque x *tend vers* b, *et on pose alors*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\, dt.$$

2. *Cette limite s'appelle intégrale impropre (où généralisée) de* f *sur* $[a, b[$.
3. *Si la fonction* $F : x \to \int_a^x f(t)\, dt$ *n'a pas de limite finie (ou la limite n'existe pas) lorsque* x *tend vers* b, *on dit que l'intégrale de* f *sur* $[a, b[$ *est divergente.*

Définition 0.4 *On considère une fonction* f *localement intégrable sur l'intervalle* $]a, b]$, *avec* $a \in \mathbb{R}$ *ou* $a = -\infty$ *(*a *est le seul point incertain).*

1. *On dit que l'intégrale de* f *sur* $]a,b]$ *est convergente (ou existe) si la fonction*

$$F : x \to \int_x^b f(t)\,dt$$

a une limite finie lorsque x *tend vers* a*, et on pose alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,dt.$$

2. *On appelle cette limite intégrale impropre (où généralisée) de* f *sur* $]a,b]$.

3. *Si la fonction* $F : x \to \int_x^b f(t)\,dt$ *n'a pas de limite finie (ou la limite n'existe pas) lorsque* x *tend vers* a*, on dit que l'intégrale de* f *sur* $]a,b]$ *est divergente.*

Exemple 0.2 *La fonction* $f : t \mapsto e^{-t}$ *est localement intégrable sur l'intervalle* $[0,+\infty[$*, alors le seul point incertain est* $+\infty$*. De plus*

$$\int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x} \quad \forall x > 0,$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - e^{-x}\right) = 1,$$

alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ *converge et sa valeur est* 1*.*

Exemple 0.3 *La fonction* $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ *est localement intégrable sur l'intervalle* $]0,1]$*, alors le seul point incertain est* 0*. De plus*

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2\left(1 - \sqrt{x}\right) \quad \forall x > 0,$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim_{x\to 0} 2\left(1 - \sqrt{x}\right) = 2,$$

alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ *converge et sa valeur est* 2.

Exemple 0.4 *La fonction* $f : t \mapsto \sin t$ *est localement intégrable sur l'intervalle* $[0, +\infty[$, *alors le seul point incertain est* $+\infty$. *De plus*

$$\int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x \quad \forall x > 0,$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \sin t dt = \lim_{x \to +\infty} (1 - \cos x).$$

Cette limite n'existe pas, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin t dt$ *diverge.*

Définition 0.5 *On considère une fonction* f *localement intégrable sur l'intervalle* $]a, b[$, *avec* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *(*a *et* b *sont deux points incertains).*

1. *On dit que l'intégrale de* f *sur* $]a, b[$ *est convergente, si les deux intégrales* $\int_a^c f(t) dt$ *et* $\int_c^b f(t) dt$ *convergent pour tout point quelconque* c *de l'intervalle* $]a, b[$.
2. *On appelle intégrale généralisée de* f *sur* $]a, b[$, *le réel noté* $\int_a^b f(t) dt$ *défini par :*

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Remarque 0.2 *:*

1. *La définition 0.5 est équivalente à*

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \to a} \int_x^c f(t) dt + \lim_{x \to b} \int_c^x f(t) dt.$$

2. *L'égalité* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} f(t) dt$ *n'est pas toujour vrais.*

Exemple 0.5 *L'intégrale* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin t dt$ *diverge, puisque l'intégrale* $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin t dt$ *diverge (voir l'exemple 0.4). Par contre*

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_{-x}^{x} \sin t dt = \lim_{x\to+\infty} (\cos(-x) - \cos x) = 0.$$

Propriété 0.1 *Soit* f *une fonction localement intégrable sur l'intervalle* $]-a, a[$, *avec avec* $a \in \mathbb{R}$ *ou* $a = +\infty$. *Si* f *est paire ou impaire, alors l'intégrale* $\int\limits_{0}^{a} f(t)\, dt$ *converge ssi l'intégrale* $\int\limits_{-a}^{0} f(t)\, dt)$ *converge. De plus :*

1. *Si* f *est paire et dans le cas de convergence, on a*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2\int\limits_{0}^{a} f(t)\, dt = 2\int\limits_{-a}^{0} f(t)\, dt.$$

2. *Si* f *est impaire et dans le cas de convergence, on a*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0$$

Conclusion 1 *Pour étudier l'intégrale de la fonction* f *sur un intervalle quelconque* I, *il faut suivre les étapes suivantes :*

1. *Identifier les points incertains.*
2. *Découper l'intervalle d'intégration en des intervalles tel que chaque intervalle ne contienne qu'un seul point incertain, placé à l'une des deux bornes.*
3. *L'intégrale de* f *sur l'intervalle* I *converge, ssi toutes les intégrales sur les intervalles du découpage convergent (les choix des points de découpage sont arbitraires).*

0.2.2 Calcul des intégrales impropres

1.2.2.1 Utilisation d'une primitive

Pour étudier la nature de l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle I ou pour calculer sa valeur quand elle converge, on utilise fréquemment une primitive de f. Ce procédé a été utilisé au début du chapitre (voir les exemples précédents).

Si la fonction à intégrer f est continue sur $]a, b[$, elle admet donc une primitive F sur $]a, b[$. La convergence de l'intégrale de f sur $]a, b[$ équivaut à l'existence des deux limites

$$F\left(a^{+}\right) = \lim_{x \to a^{+}} F(x) \quad , \quad F\left(b^{-}\right) = \lim_{x \to b^{-}} F(x),$$

et si ces limites existent on a :

$$\int_{a}^{b} f(t)\, dt = F\left(b^{-}\right) - F\left(a^{+}\right).$$

1.2.2.2 Formule du changement de variables

Théor■me 0.1 *Soient f une fonction continue sur $[a, b[$ et ϕ une bijection continument dérivable sur l'intervalle $[\alpha, \beta[$, à valeurs dans $[a, b[$. Alors les intégrales*

$$\int_{a}^{b} f(t)\, dt \quad et \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(s))\, \phi'(s)\, ds,$$

sont de même nature, et si elles convergent elles sont égales.

Démonstration. La fonction composée $f \circ \phi$ est bien définie sur $[\alpha, \beta[$, alors on a

$$\forall x \in]\alpha, \beta[: \int_{\alpha}^{x} f(\phi(s))\, \phi'(s)\, ds = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(x)} f(t)\, dt.$$

Passant à la limite quand x tend vers β, on obtient :

$$\lim_{x\to\beta}\int_{\alpha}^{x} f(\phi(s))\,\phi'(s)\,ds = \lim_{x\to\beta}\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(x)} f(t)\,dt.$$

Si l'un des membres de cette égalité admet une limite quand x tend vers β, il en sera de même de l'autre et on aura

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(s))\,\phi'(s)\,ds = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

■

Exemple 0.6 *La fonction* $f : t \mapsto \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}$ *est localement intégrable sur l'intervalle* $]0,1]$, *alors le seul point incertain est* 0. *L'intégrale* $\int_0^1 \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ *converge puisque, on utilisant le changement de variable* $\phi : t \to \phi(t) = s = \sqrt{t}$ *on obtient l'intégrale simple* $\int_0^1 2\cos(s)^2\,dt$.

1.2.2.3. Intégration par partie

Théor■me 0.2 *Soient* f *et* g *deux fonctions de classe* C^1 *sur l'intervalle* $[a,b[$, *telles que la fonction produit* (fg) *admet une limite en* b, *alors les intégrales*

$$\int_{a}^{b} f'(t)\,g(t)\,dt \quad et \quad \int_{a}^{b} f(t)\,g'(t)\,dt,$$

sont de même nature, et si elles convergent on a

$$\int_{a}^{b} f'(t)\,g(t)\,dt = \lim_{x\to b}[f(x)\,g(x)] - f(a)\,g(a) - \int_{a}^{b} f(t)\,g'(t)\,dt.$$

Démonstration. On a

$$\int_{a}^{b} f'(t)\,g(t)\,dt = \lim_{x\to b}\int_{a}^{x} f'(t)\,g(t)\,dt.$$

Pour tout x dans $]a,b[$, on peut écrire

$$\int_a^x f'(t)\,g(t)\,dt = [f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a)] - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$$

Si chacun des deux termes du second membre de cette égalité admet une limite lorsque x tend vers b, il en sera de même du premier membre. On aura alors

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f'(t)\,g(t)\,dt = \lim_{x\to b}[f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a)] - \lim_{x\to b}\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$$

■

Exemple 0.7 *La fonction $f : t \to \ln t$ est localement intégrable sur l'intervalle $]0,1]$, alors le seul point incertain est 0. Etudions la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln t dt$.*
Si on intégre par partie dans $[x,1]$, pour tout $x \in]0,1[$, on obtient

$$\int_x^1 \ln t dt = [t\ln t]_x^1 - \int_x^1 dt = x\ln x - (1-x),$$

et comme $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$, on en déduit que l'intégrale impropre est convergente et que sa valeur est $\int_0^1 \ln t dt = -1$.

0.2.3 Propriétés des intégrales impropres

1.2.3.1 Relation de Chasles

Théor■me 0.3 *Soient $c \in]a,b[$ et f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $[a,b[$. Alors les intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ sont de même nature et si elles convergent on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Démonstration. Soient $c \in \mathbb{R}$ et x dans $]a,b[$ où $a < c < x$.

Appliquons la relation de Chasles sur $[a, x]$, on obtient

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt.$$

Ainsi, la fonction $F : x \longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt$ admette une limite quand $x \to b$, si et seulement si la fonction $x \longrightarrow \int_c^x f(t)\,dt$ admette une limite quand $x \to b$ (puisque $\int_a^c f(t)\,dt$ est une intégrale simple). ■

1.2.3.2 Linéarité des intégrales impropres

L'ensemble des fonctions qui admettant une intégrale impropre convergente sur l'intervalle $[a, b[$ est un sous-espace vectoriel sur $[a, b[$.

Théor■me 0.4 *Soient f et g deux fonctions localement intégrable sur l'intervalle $[a, b[$ et α, β deux réels. Si les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent alors l'intégrale impropres $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt$ converge aussi.*
De plus on a

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt.$$

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt &= \lim_{x \to b} \int_a^x (\alpha f + \beta g)(t)\,dt \\
&= \lim_{x \to b} \left[\alpha \int_a^x f(t)\,dt + \beta \int_a^x g(t)\,dt \right] \\
&= \alpha \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt + \beta \lim_{x \to b} \int_a^x g(t)\,dt \\
&= \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt
\end{aligned}$$

■

Remarque 0.3 :

1. *Si l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge et l'intégrale* $\int_a^b g(t)\,dt$ *diverge alors l'intégrale* $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt$ *diverge.*
2. *Si les intégrales* $\int_a^b f(t)\,dt$ *et* $\int_a^b g(t)\,dt$ *divergent alors on ne peut rien conclure sur la convergente de l'intégrale* $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt$.

1.2.3.3 Inégalité des intégrales impropres

Théor■me 0.5 *Soient* f *et* g *deux fonctions localement intégrable sur l'intervalle* $[a, b[$. *Si les intégrales* $\int_a^b f(t)\,dt$ *et* $\int_a^b g(t)\,dt$ *convergent, alors*

$$f \leq g \quad sur\ [a, b[\Longrightarrow \int\limits_a^b f(t)\,dt \leq \int\limits_a^b g(t)\,dt$$

En particulier

$$f \geq 0 \quad sur\ [a, b[\Longrightarrow \int\limits_a^b f(t)\,dt \geq 0$$

Démonstration. En effet

$$f(t) \leq g(t) \quad \forall t \in [a, b[\Longrightarrow \int\limits_a^x f(t)\,dt \leq \int\limits_a^x g(t)\,dt \quad \forall x \in]a, b[,$$

ce qui donne

$$\lim_{x \to b} \int\limits_a^x f(t)\,dt \leq \lim_{x \to b} \int\limits_a^x g(t)\,dt \Longrightarrow \int\limits_a^b f(t)\,dt \leq \int\limits_a^b g(t)\,dt.$$

■

0.3 Convergence des intégrales impropres

0.3.1 Critère de Cauchy pour les intégrales impropres

On considère une fonction f localement intégrable sur l'intervalle $[a, b[$, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

Théor■me 0.6 *Pour que l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,dt$ *soit convergente, il faut et il suffit que toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de limite* b*, la suite* $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)\,dt \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

soit convergente. On aura alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} F(x_n).$$

On en déduit le critère de Cauchy pour les intégrales impropres.

Théor■me 0.7 (Critère de Cauchy) *L'intégrale* $\int_a^b f(t)\,dt$ *est convergente si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in [a,b[\,, \forall x_1, x_2 \in [a,b[: x_\epsilon < x_1 < x_2 < b \Longrightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| < \epsilon. \tag{1}$$

Démonstration.

1. Supposons que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, alors par définition

$$\exists l \in \mathbb{R} : \quad \lim_{x\to b} F(x) = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt = l,$$

et d'après la définition de la limite, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in [a,b[\,, \forall x \in [a,b[: x_\epsilon < x < b \Longrightarrow |F(x) - l| < \epsilon/2.$$

Pour $x = x_1$ et $x = x_2$, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in [a,b[\,, \forall x_1, x_2 \in [a,b[: x_\epsilon < x_1 < x_2 < b \Longrightarrow \begin{cases} |F(x_1) - l| < \epsilon/2 \\ |F(x_2) - l| < \epsilon/2 \end{cases}$$

D'autre part,

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| = |F(x_2) - F(x_1)| < |F(x_1) - l| + |F(x_2) - l| < \epsilon,$$

alors la condition (1) est satisfaite.

2. On suppose la condition (1) est réalisé et on montre que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente. D'après le théorème 0.6, il suffit de montrer que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[a, b[$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, la suite $(F(x_n))$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}$.

   Par définition, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = b \iff \forall\epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}^* : \forall n > n_\epsilon \Longrightarrow x_n > x_\epsilon.$$

   Pour $n = p$ et $n = q$, on a :

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}^*, \forall p, q \in \mathbb{N} : p > q > n_\epsilon \Longrightarrow \begin{cases} x_p > x_\epsilon \\ x_q > x_\epsilon \end{cases}$$

et la conditions (1) entrainent alors à :

$$|F(x_p) - F(x_q)| = \left|\int_{x_q}^{x_p} f(t)\,dt\right| < \epsilon.$$

Alors la suite $(F(x_n))$ est une suite de Cauchy, elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$. ■

Exemple 0.8 *L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{t\sin t}dt$ diverge.*

En effet : soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $x_n = 2n\pi$ et $x'_n = (2n+1)\pi$.

$$\forall t \in [x_n, x'_n] \Longrightarrow t\sin t \geq 0 \Longrightarrow e^{t\sin t} \geq 1,$$

alors

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{t\sin t}dt \geq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} dt = \pi,$$

donc

$$\exists\epsilon = \pi > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n = 2n\pi, x'_n = (2n+1)\pi \in [0, +\infty[\ \ et \int_{x_n}^{x'_n} e^{t\sin t}dt \geq \pi.$$

Le critère de Cauchy n'est pas satisfaite ce qui prouve la divergence de l'intégrale.

0.4 Intégrales impropres des fonctions à valeurs positives (de signe constant)

Dans cette partie, nous considèrons que les fonctions localement intégrables sur l'intervalle $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Les critères de convergence sont aussi valables pour à valeurs négatives sur l'intervalle $[a, b[$, puisque la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ se ramène à celle de $\int_a^b -f(t)\,dt$ où la fonction $(-f)$ est à valeurs positives sur l'intervalle $[a, b[$.

0.4.1 Intégrales de Référence

Théor■me 0.8 (Intégrale de Riemann) *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$, on a :*

1. *L'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$, avec $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.*
2. *L'intégrale $\int_0^1 \dfrac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$, avec $\int_0^1 \dfrac{dt}{t^\alpha} = \dfrac{1}{1 - \alpha}$.*

Démonstration. On a

$$\int \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln t & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \left.\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^x = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

et

$$\text{si } \alpha = 1 : \quad \lim_{x\to+\infty} \ln t|_1^x = +\infty.$$

Par la même méthode, on montre le $2^{ème}$ résultat. ■

Théor■me 0.9 (Intégrale de Bertrand) *Soit* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ *et* f *une fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par* $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$, *on a :*

1. *L'intégrale* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ *converge ssi* $\{\alpha > 1, \forall\beta\in\mathbb{R}\}$*ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.
2. *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ *converge ssi* $\{\alpha < 1, \forall\beta\in\mathbb{R}\}$*ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.

Démonstration. Voir l'exercice **??**. ■

0.4.2 Critère de la convergence majorée

Théor■me 0.10 *Soit* f *une fonction localement intégrable sur l'intervalle* $[a,b[$ *avec* $b\in\mathbb{R}$ *ou* $b=+\infty$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$. *L'intégrale* $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ *est convergente si et seulement si la fonction* $F : x \to \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *est majorée sur* $[a,b[$, *c-à-d*

$$\exists M > 0, \forall x\in\,]a,b[: \int\limits_a^x f(t)\,dt \le M.$$

Démonstration. La fonction $F : x \to \int\limits_a^x f(t)\,dt$ est croissante.

En effet si $a < x_1 < x_2 < b$, on a

$$F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_a^{x_2} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_1} f(t)\,dt = \left[\int\limits_a^{x_1} f(t)\,dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right] - \int\limits_a^{x_1} f(t)\,dt = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \ge 0.$$

Alors, si x tend vers b, la fonction F admet une limite finie positive ou bien elle tend vers $+\infty$.

D'après le théorème de la limite monotone, quand x tend vers b, la fonction F admet une limite finie ssi elle est majorée au voisinage de b (puisque elle est croissante). ■

Remarque 0.4 *Dans le cas ou F n'est pas majorée, elle tend vers $(+\infty)$. Donc l'intégrale est divergente et on écrit $\int_a^b f(t)\,dt = +\infty$.*

Exemple 0.9 *Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$.*
La fonction $f : t \to \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)$ est localement intégrable et à valeurs positives dans l'intervalle $]0,1]$. On a de plus

$$F(x) = \int_x^1 \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) dt \leq \int_x^1 dt = 1 - x < 1, \quad \forall x \in \left]0,1\right].$$

Donc l'intégrale I est convergente.

0.4.3 Critère de comparison

Théor■me 0.11 *Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur l'intervalle $[a,b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ et vérifiant sur cet intervalle*

$$0 \leq f(t) \leq g(t), \quad \forall t \in \left[a,b\right[. \tag{2}$$

Alors :

1. *Si l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.*
2. *Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.*

Démonstration. On pose

$$\forall x > a : F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad et \quad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

D'après la propriétés des inégalités entre intégrales, on a

$$0 \leq f(t) \leq g(t), \quad \forall t \in [a, b[\Longrightarrow F(x) \leq G(x), \quad \forall x > a,$$

et puisque les fonctions F et G sont croissantes, on en déduit que :

- Si l'intégrale $\int\limits_a^b g(t)\,dt$ converge, la fonction G est majorée, alors la fonction F est majorée, donc l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ converge.
- Si l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ diverge, la fonction F est n'est pas majorée, alors la fonction G est n'est pas majorée aussi, donc l'intégrale $\int\limits_a^b g(t)\,dt$ diverge.

■

Exemple 0.10 *:*

1. *L'intégrale* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ *est convergente. En effet :*

$$0 \leq \frac{\sin^2 t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}, \qquad \forall t \geq 1,$$

et l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ *converge puisque*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^2} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{t}\bigg|_1^x = 1.$$

2. *L'intégrale* $\int\limits_0^1 \frac{-\ln t}{1+t^2} dt$ *est convergente. En effet :*

$$0 \leq -\frac{\ln t}{1+t^2} \leq -\ln t, \qquad \forall 0 < t \leq 1$$

et l'intégrale $\int_0^1 -\ln t dt$ *converge puisque*

$$\lim_{x\to 0}\int_x^1 -\ln t dt = \lim_{x\to+\infty} -t\ln t + t|_x^1 = -1.$$

Remarque 0.5 *On peut appliquer le critère de comparaison si la condition (2) est vérifiée seulement au voisinage de b.*

Corollaire 0.1 *Si on change la condition (2) par :*

$$\exists k_1, k_2 > 0 : 0 \leq k_1 f \leq g \leq k_2 f,$$

alors : les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ *et* $\int_a^b g(t)\,dt$ *sont de même nature.*

0.4.4 Critère d'équivalence

Théor■me 0.12 *Soient f et g deux fonctions positives, localement intégrables sur l'intervalle* $[a, b[$ *avec* $b \in \mathbb{R}$ *ou* $b = +\infty$.
Si f et g sont équivalentes au voisinage de b ($f \underset{b}{\sim} g$), *alors : les intégrales* $\int_a^b f(t)\,dt$ *et* $\int_a^b g(t)\,dt$ *sont de même nature.*

Démonstration. Par hypothèse, on a

$$f \underset{b}{\sim} g \iff \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

alors, il existe un voisinage de b et une fonction ψ définie sur ce voisinage, tels que :

$$f(x) = g(x)(1+\psi(x)) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to b}\psi(x) = 0,$$

alors pour

$$\epsilon = 1/2, \exists x_\epsilon, \forall x : x_\epsilon < x < b \Longrightarrow |\psi(x)| < 1/2.$$

D'où

$$(1/2)\, g(x) < f(x) < (3/2)\, g(x)$$

et par comparaison on aura le résultat. ■

Exemple 0.11 *:*

1. *L'intégrale* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ *converge car :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) = 1,$$

et l'intégrale $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *converge.*

2. *L'intégrale* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{tgt}} dt$ *diverge car :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{tgt}}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{tgt}} = 1,$$

et l'intégrale $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ *diverge puisque :*

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_{1}^{x} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{t}\Big|_{1}^{x} = +\infty.$$

Corollaire 0.2 *Soient f et g deux fonctions positives, localement intégrables sur l'intervalle $[a,b[$ avec $b\in\mathbb{R}$ ou $b=+\infty$, tel que $g\neq 0$ dans $[a,b[$. Supposons que*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = k \in [0,+\infty] \quad \textit{existe.}$$

On a :

1. *Si $0<k<+\infty$, alors les deux intégrales $\int\limits_{a}^{b} f(t)\, dt$ et $\int\limits_{a}^{b} g(t)\, dt$ sont de même nature.*

2. *Si $k=0$, alors la convergence de l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ implique la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$.*

3. *Si $k=+\infty$, alors la divergence de l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ implique la divergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$.*

0.5 Intégrales impropres des fonctions à valeurs de signe quelconque

0.5.1 Convergence absolue

Soit f une fonction réelle, localement intégrable sur un intervalle $[a,b[$ avec $b\in\mathbb{R}$ ou $b=+\infty$.

Définition 0.6 *On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.*

Théor■me 0.13 *Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Démonstration. Supposons que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente alors par définition l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente, donc la condition de Cauchy

$$\forall\epsilon>0,\exists x_\epsilon\in[a,b[\,,\forall x_1,x_2\in[a,b[\,:x_\epsilon<x_1<x_2<b\Longrightarrow\left|\int_{x_1}^{x_2}|f(t)|\,dt\right|<\epsilon,$$

ce qui implique

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right|\le\int_{x_1}^{x_2}|f(t)|\,dt<\epsilon.$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ satisfait le critère de Cauchy, alors elle est convergente.

$\blacksquare$

Exemple 0.12 *L'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ *converge absolument, puisque on a*

$$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \qquad et \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \quad converge,$$

alors par comparaison $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ *converge, et par définition l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ *converge absolument, ce qui implique qu'elle converge (d'après le théorème précédent).*

Remarque 0.6 *On peut trouver des intégrales impropres convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.*

Théor■me 0.14 (Critère d'équivalence pour la convergence absolue) *Soient* f *et* g *deux fonctions localement intégrables sur l'intervalle* $[a, b[$ *avec* $b \in \mathbb{R}$ *ou* $b = +\infty$.
Supposons que $g \geq 0$ *sur* $[a, b[$ *et que* $\lim_{x \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = k$ *existe et finie.*
On a :

1. *Si l'intégrale* $\int_a^b g(t)\, dt$ *converge, alors l'intégrale* $\int_a^b f(t)\, dt$ *converge absolument, et donc converge.*
2. *Si* $k \neq 0$ *et l'intégrale* $\int_a^b g(t)\, dt$ *diverge, alors l'intégrale* $\int_a^b f(t)\, dt$ *diverge.*

Proposition 0.1 (Critère de Riemann) *:*

1. *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction localement intégrable sur l'intervalle* $[1, +\infty[$, *tel que :* $\lim_{x \to +\infty} t^\alpha f(t) = k$ *existe et finie, on a :*

   a) *Si* $\alpha > 1$ *: alors l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ *converge absolument, donc converge.*

   b) *Si* $\alpha \leq 1$ *et* $k \neq 0$ *: alors l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ *diverge.*

2. *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction localement intégrable sur l'intervalle* $]0, 1]$, *tel que :* $\lim_{x \to 0} t^\alpha f(t) = k$ *existe et finie, on a :*

   c) *Si* $\alpha < 1$ *: alors l'intégrale* $\int_0^1 f(t)\, dt$ *converge absolument, donc converge.*

d) *Si $\alpha \geq 1$ et $k \neq 0$: alors l'intégrale* $\int\limits_0^1 f(t)\,dt$ *diverge.*

Exemple 0.13 *L'intégrale* $\int\limits_1^{+\infty} t^{-\ln t} dt$ *converge, puisque au voisinage de* $(+\infty)$ *on a*

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 t^{-\ln t} = 0 \qquad (\alpha = 2).$$

0.5.2 Semi-convergence

Définition 0.7 *On dit que l'intégrale* $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ *est semi-convergente, si elle est convergente mais elle n'est pas absolument convergente.*

Exemple 0.14 *L'intégrale* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *est semi-convergente car :*

1. *Etude de la convergence absolue : il suffit de montrer que l'intégrale* $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ *ne vérifie pas le critère de Cauchy.*

   On a

$$\forall n \geq 2 : \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \frac{1}{n\pi} \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t|\, dt = \frac{2}{n\pi}.$$

   D'où :

$$\int\limits_{(n-1)\pi}^{2n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \sum_{k=n}^{2n} \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{2}{\pi}\frac{n}{2n} = \frac{1}{\pi}.$$

   Donc, pour $\epsilon = \frac{1}{\pi}, \forall n \geq 2, \exists x_n = (n-1)\pi, x'_n = 2n\pi \in [1, +\infty[$ *et* $\int\limits_{x_n}^{x'_n} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \frac{1}{\pi}.$
   alors le critère de Cauchy n'est pas vérifié et par suite l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ *diverge.*

2. *Etude de la convergence : En intégrant par partie :*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt - \left.\frac{\cos t}{t}\right|_1^{+\infty}$$

   On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ *et* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ *converge, d'où la convergence de* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$

0.5.3 Critère d'Abel-Dirichlet pour les intégrales

Le théorème suivant, dû à Abel, est utilisé pour montrer qu'une intégrale impropre (non absolument convergente) est semi-convergente ; sa démonstration repose sur le critère de Cauchy.

Théorème 0.15 *Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur l'intervalle $[a,b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. Si une des deux paires de conditions suivantes (A ou B) est vérifiée*

$$\begin{cases} A1 & \text{L'intégrale } \int\limits_a^b f(t)\,dt \text{ est convergente.} \\ A2 & \text{La fonction } g \text{ est monotone et bornée sur } [a,b[. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B1 & \text{La fonction } F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \text{ est bornée sur } [a,b[. \\ B2 & \text{La fonction } g \text{ est monotone et possède une limite nulle en } b. \end{cases}$$

alors l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)\,g(t)\,dt$.

Démonstration. D'après la formule de la moyenne des intégrales :

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,g(t)\,dt = g(x_1)\int\limits_{x_1}^{\xi} f(t)\,dt + g(x_2)\int\limits_{\xi}^{x_2} f(t)\,dt,$$

où ξ est un point appartenant à l'intervalle $[x_1, x_2]$.

Supposons que la première paire de conditions (A1,A2) est vérifiée. La fonction g est bornée c-à-d :

$$\exists M > 0; \forall x \in [a,b[: |g(x)| \leq M.$$

L'intégrale $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ est convergente, alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon, x_2 > \xi > x_1 > x_\epsilon : \left|\int\limits_{x_1}^{\xi} f(t)\,dt\right| \leq \frac{\epsilon}{2M} \quad \text{et} \quad \left|\int\limits_{\xi}^{x_2} f(t)\,dt\right| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Donc

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq |g(x_1)|\left|\int\limits_{x_1}^{\xi} f(t)\,dt\right| + |g(x_2)|\left|\int\limits_{\xi}^{x_2} f(t)\,dt\right| < \epsilon.$$

D'où d'près le critère de Cauchy, l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ converge.

Supposons que la deuxième paire de conditions (B1,B2) est vérifiée. La fonction F est bornée c-à-d :

$$\exists N > 0; \forall x \in [a, b[: \left| \int_a^x f(t)\, dt \right| \leq N.$$

Ce qui implique

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \right| \leq 2N.$$

De plus

$$\lim_{x \to b} g(x) = 0 \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x > b - \delta \implies |g(x)| < \frac{\epsilon}{2N},$$

alors de même que précédement on a :

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, g(t)\, dt \right| < \epsilon, \quad \forall x_1, x_2 > b - \delta.$$

D'où en vertu du critère de Cauchy, l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ converge. ■

Exemple 0.15 *L'intégrale* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$ *converge* $\forall \alpha > 0$.

En effet : si on applique Abel on trouve :

- $|F(x)| = \left| \int\limits_1^x \cos t dt \right| = |\sin x - \sin 1| \leq 2,$ *bornée.*
- *La fonction* $t \to \frac{1}{t^\alpha}$ *est décroissante dans* $[1, +\infty[,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{t^\alpha} = 0.$

Remarque 0.7 *Les intégrales* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$ *et* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ *sont convergentes si* $\alpha > 0$, *et semi convergentes si* $\alpha \in \left]0, 1\right]$.

0.5.4 Utilisation du développement asymptotique

Cette méthode est la généralisation du critère d'équivalence dans le cas où à intégrer sont à valeurs de signe quelconque, et elle se repose sur l'étude de l'intégrale du développement asymptotique de la fonction.

Exemple 0.16 *L'intégrale* $\int\limits_{1}^{+\infty} \left(\sqrt{t^2+\cos t}-t\right) dt$ *converge, puisque :*

$$\sqrt{t^2+\cos t}-t = t\left(\sqrt{1+\frac{\cos t}{t^2}}-1\right) \quad et \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{\cos t}{t^2}=0,.$$

On a

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\cos t}{t^2}=0,$$

alors si on pose $y=\dfrac{\cos t}{t^2}$ *et on utilise le développement limité de la fonction* $\sqrt{1+y}$ *au voisinage de* 0*, on trouve*

$$\sqrt{1+\frac{\cos t}{t^2}}-1=\frac{\frac{\cos t}{t^2}}{2}-\frac{\left(\frac{\cos t}{t^2}\right)^2}{8}+o\left[\left(\frac{\cos t}{t^2}\right)^2\right].$$

Par suite

$$\sqrt{t^2+\cos t}-t=\frac{\cos t}{2t}-\frac{\cos^2 t}{8t^3}+o\left[\frac{\cos^2 t}{t^3}\right],$$

où

$$o\left[\frac{\cos^2 t}{t^3}\right]=\varepsilon(t) \quad avec \quad |\varepsilon(t)|\leq\frac{M}{t^3}.$$

On a

- *L'intégrale* $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{\cos t}{2t}dt$ *converge d'après le critère d'Abel.*
- *L'intégrale* $\int\limits_{1}^{+\infty}\left[-\dfrac{\cos^2 t}{8t^3}+o\left(\dfrac{\cos^2 t}{t^3}\right)\right]dt$ *est absolument convergente, puisque*

$$\begin{aligned}\left|-\frac{\cos^2 t}{8t^3}+o\left(\frac{\cos^2 t}{t^3}\right)\right| &\leq \left|\frac{\cos^2 t}{8t^3}\right|+o\left(\frac{\cos^2 t}{t^3}\right)\\ &\leq \frac{1}{8t^3}+\frac{M}{t^3}=\frac{\alpha}{t^3}\end{aligned}$$

0.6