Université Mohammed Khider de Biskra
Département Mathématiques
Module: Modélisation et Simulation

Première Année Master
Option: Stat & Proba
2023/2024

Interrogation

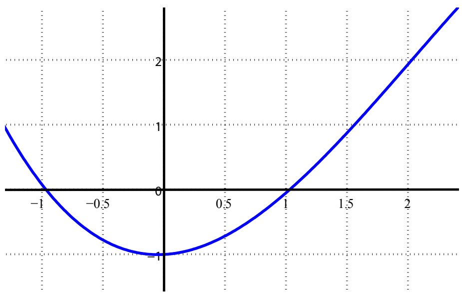
Exercice 1 *(02 points)* Soit X une variable aléatoire ayant comme densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} kx^4, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec k est une constante réelle.

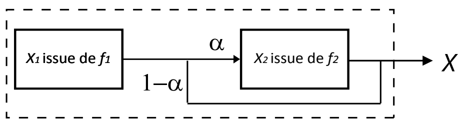
1. Donner la fonction de réparation associée à f. **(01pt)**
2. Proposé un algorithme, qui nous permet de générer un échantillon de taille n de même loi que X. **(01pt)**

Exercice 2 *(./04.50 points)* Soit la fonction $f(x) = \frac{-1}{6}x^3 + x^2 + \frac{1}{6}x - 1$ dont le graphe est présenté dans la figure suivante:



1. Proposer un simulateur qui nous permet de calculer la surface délimiter par la courbe de f, l'axe des abscisses $(x'x)$ et les deux droites verticales $x = -1$ et $x = 2$. **(2pts)**
2. Proposer un algorithme de simulation qui nous permet de calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{2} f(x)dx$. **(2.5pts)**

Exercice 3 *(./01.50 points)* Soit la variable aléatoire X décrite comme suite :



$$X = X_1 + \begin{cases} X_2, & \text{avec une probabilité } \alpha; \\ 0, & \text{avec une probabilité } 1 - \alpha. \end{cases}$$

Question: Proposer un algorithme qui nous permettra de générer un n-échantillon de même loi que la variable aléatoire X.
Remarque : On suppose que f_1 et f_2 sont facile à simuler.

Université Mohammed Khider de Biskra
Département Mathématiques
Module: Modélisation et Simulation

Première Année Master
Option: Stat & Proba
2023/2024

Corrigé de l'Interrogation

Solution de l'Exercice 1 *(02 points)*

1. Nous devant d'abord déterminer la valeurs de la constante k, le fait que f est une densité alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 kx^4 dx = 1 \Rightarrow \frac{k}{5}x^5\Big|_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{k}{5} = 1 \Rightarrow k = 5.$$

2. Par définition on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, ainsi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ x^5, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

3. Pour concevoir un simulateur qui peut générer un échantillon de taille n de même loi que X on peut faire recours à la méthode d'inversion. soit u une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

$$u = x^5 \Rightarrow x = u^{\frac{1}{5}} (\text{ le fait que } x^5 \text{ est positif}).$$

Ainsi l'algorithme de notre simulateur peut être comme suit:

```
for i=1:n
    u=random('unif',0,1);
    x(i)=u^(1/5);
end
```

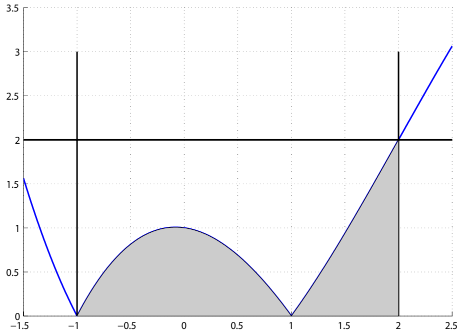
Solution de l'Exercice 2

1. Pour estimer la surface en question nous proposons d'utiliser la méthode de rejet (Monté Carlo). Mais nous constatons que f change de signe dans $[-1; 2]$, à cet effet nous proposons d'utiliser $|f(x)|$ plutôt que $f(x)$ elle-même. Pour générer un point, notons que:

- $x \in [-1; 2]$ de ce fait il suffit de génère des x selon une loi uniforme sur $[-1; 2]$.
- $|f(x)| \in [0; 2]$ de ce fait il suffit de génère des y selon une loi uniforme sur $[0; 2]$.
- La surface du rectangle délimité par $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ et $y = 2$ est S=(2-(-1))*(2-0)=6;
- La surface recherchée est $s = S * Nbr/n$ où Nbr est le nombre de point à l'intérieur de la surface recherché, n est le nombre de point généré et S est la surface du rectangle précédent.

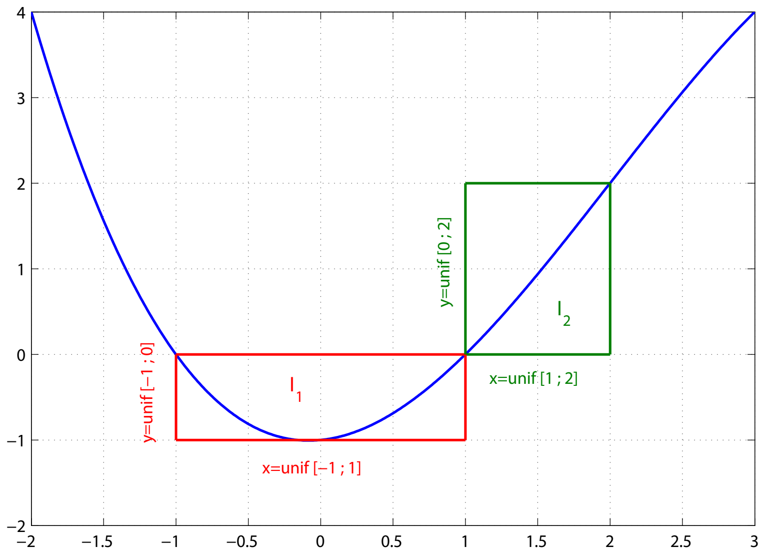
Ainsi, le simulateur peut être comme suit:

```
Nbr=0;
for i=1:n
    x=random('unif',-1,2);
    y=random('unif',0,2);
    if (y <= abs(f(x)))
        Nbr=Nbr+1;
    end
end
s=6*(Nbr/n);
```



2. Calcul d'intégrale. Le fait que la fonction f change de signe dans $[-1;2]$ (négative sur $[-1;1]$ et positive sur $[1;2]$), pour estimé I par simulation nous allons décomposé l'intégrale I en deux intégrales I_1 et I_2 où $I_1 = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ et $I_2 = \int_{1}^{2} f(x)dx$. Ainsi de la même approche et la même analyse que dans la première question, l'algorithme suivant peut donner une estimation pour I.

```
1  Nbr1=0;
2  Nbr2=0;
3  for i=1:n
4      x1=random('unif',-1,1);
5      y1=random('unif',-1,0);
6      if (y1 >= f(x1))
7          Nbr1=Nbr1+1;
8      end
9      x2=random('unif',1,2);
10     y2=random('unif',0,2);
11     if (y2 <= f(x2))
12         Nbr2=Nbr2+1;
13     end
14 end
15 I1=((1-(-1))*(1-(0)))*(Nbr1/n);
16 I2=((2-1)*(2-0))*(Nbr2/n);
17 I=I2-I1;
```



Remarque: *Les ligne 15, 16 et 17 peuvent être résumé en:* $I = (2/n) * (Nbr2 - Nbr1)$.

Solution de l'Exercice 3 L'analyse du problème exposé dans l'exercice donne issue à l'algorithme suivant:

```
for i=1:n
    u=random('unif',0,1);
    if (u<=alpha)
        a=random('f1');
        b=random('f2');
        x(i)=a+b;
    else
        x(i)=random('f1');
    end
end
```

ou simplement:

```
for i=1:n
    x(i)=random('f1');
    u=random('unif',0,1);
    if (u<=alpha)
        x(i)=x(i)+random('f2');
    end
end
```