مطابقة ميكانيك - كهرباء

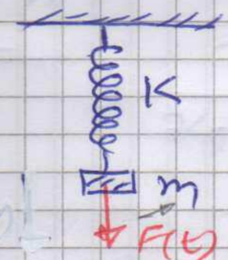
ميكانيك	كهرباء
x	q
$\dot{x}$	$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, $\dot{q} = i$
m	L
k	$1/C$
α	R

الدرس 4: الاهتزازات القسرية ذات درجة حرية واحدة

تعريف: هي الاهتزازات التي تحدث في وجود قوة إثارة خارجية (قوة محركة)

دراسة جملة ميكانيكية

1- في غياب المخمد:

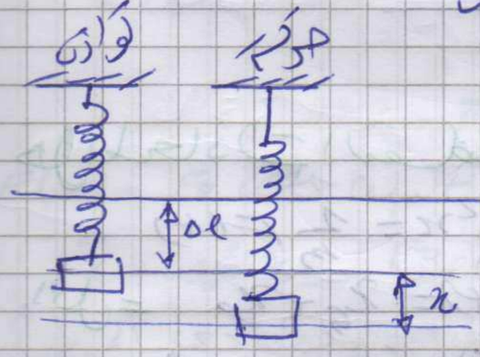


$F(t)$: قوة خارجية

إيجاد المعادلة التفاضلية

1- طريقة نيوتن:

- (توازن) = في غياب $F(t)$ ⇐ $mg - k\Delta l = 0$



- حركة: $\sum \vec{F} = m\ddot{x}\,\vec{i}$

$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}(t) = m\ddot{x}\,\vec{i}$

بالإسقاط:

$mg - k(\Delta l + x) + F(t) = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} + kx = F(t) + \underbrace{mg - k\Delta l}_{0}$

$\boxed{m\ddot{x} + kx = F(t)}$

ملاحظة: في حالة وجود المخمد ⇐ ظهور المشتق الأول في المعادلة التفاضلية.

حركة اهتزازية حرة ⇐ معادلة متجانسة

〃 〃 قسرية ⇐ 〃 غير متجانسة.

2- طريقة الطاقة:

$dE = dW_{F_{ext}} = \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = F_{ext}\,\dot{x}\,dt$

$\frac{dE}{dt} = F_{ext}\,\dot{x}$ $\qquad$ $\frac{dE}{dt} = -\alpha\dot{x} + F_{ext}\,\dot{x}$ $\qquad$ 2- وجود مخمد

$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$, $E_p = \frac{1}{2} kx^2$

محافظة

$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = F(t)\dot{x} \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + kx = F(t)}$

3- طريقة لاغ:

$\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}}_{=0} = F_{q\,ext}$

$F_{q\,ext} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dq}$ $\quad \begin{cases} \vec{F} = F\vec{i} \\ \vec{r} = x\vec{i} \\ q = x \end{cases}$

$= F\vec{i}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}\vec{i} = F$ (قوة انسحابية)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = F(t)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx$

$m\ddot{x} + kx = F(t)$

حل المعادلة التفاضلية:

$m\ddot{x} + kx = F(t) \to \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}F(t)$

الحل: $x(t) = x_G + x_p$

حل المعادلة المتجانسة:

$x_G = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$ أو $x_G = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

إيجاد x_p: يتعلق بالطرف الثاني:

مثال 1: قوة ثابتة $F(t) = F_0$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} = e^{0t}\left(\frac{F_0}{m}\cos 0t + A\sin 0t\right)$

$x(t) = x_G + x_p$

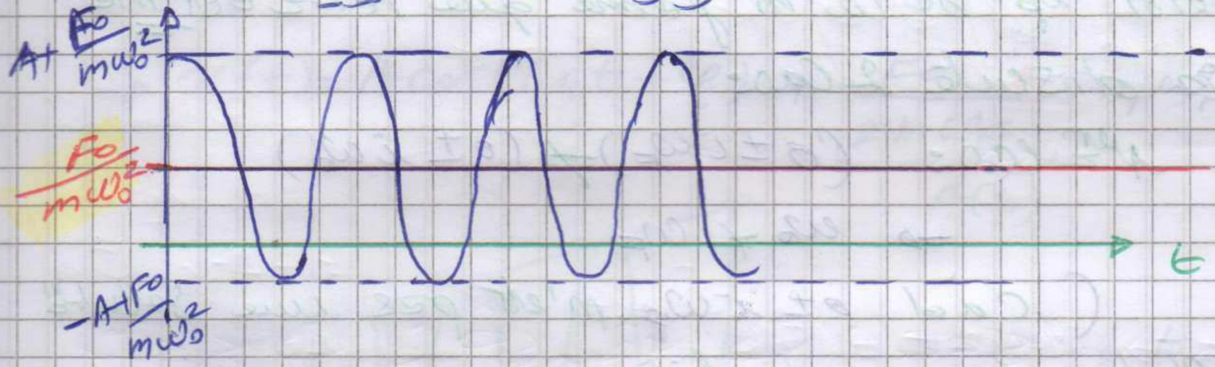
نختار x_p من شكل الطرف الثاني: $x_p = C = cte$

ثم نعوض في م ت: $\dot{x}_p(0) = 0$, $\ddot{x}_p = 0 \to$

$\Rightarrow 0 + \omega_0^2 c = \frac{F_0}{m} \Rightarrow c = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = x_p$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

- تحسب الثوابت من الشرطين الابتدائيين . $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$



خلاصة : تأثير قوة التأثير الخارجية على الجملة هو أن تجعلها تهتز حول موضع توازن الجديد.

le 08/11/2015

Rappel = $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$

الحل : $x(t) = x_G + x_p$

$x_G = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

مثال -1- : $F(t) = F_0 = cste$

$F(t) = F_0 = cste$; $x_p = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$

مثال -2- : $F(t) =$ fonct. ~~Pério~~ périodique

$F(t) = F_0 \cos \omega_F t$ $\qquad$ ω_F : نبض القوة $F(t)$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_F t$$

لتسهيل الحسابات و الاشتقاقات و تفادي الخطأ
نستعمل : الأعداد المركبة. (دالة الأسية) عوض الطريقة الكلاسيكية

$A = x + iy \Rightarrow A = |A| e^{i\varphi} = |A|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$|A| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{|A|}$, $\sin\varphi = \frac{y}{|A|}$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$F(t) = F_0\cos\omega_F t = \mathbb{R}e(F_0 e^{i\omega_F t})$

partiè reélle du nbre complexe الجزء الحقيقي : Re

$F(t) = F_0 \cos\omega_F t = Re(F_0 e^{i\omega_F t})$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t} = \frac{F_0}{m} e^{(0+i\omega_F t)}$ ⇐ نذكر Re لتبسيط الكتابة.

$x(t) = x_G + x_p$; $x_G = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

On choisi x_p de la m^m forme que le 2^e terme

— On discute 2 cas:

1er cas: $(0 \pm i\omega_F) \neq (0 \pm i\omega_0)$

$\Rightarrow \omega_0 \neq \omega_F$

(càd $0 \pm i\omega_F$ n'est pas une solutⁿ à l'équation partculière

$\omega_0 \neq \omega_F$ (عدم تطابق تردد $F(t)$ مع ω_0)

⇐ نختار x_p من شكل الطرف 2 الثاني.

$x_p = C e^{i\omega_F t}$

$\ddot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t} \Rightarrow \dot{x}_p = i\omega_F C e^{i\omega_F t}$

$\Rightarrow \ddot{x}_p = -\omega_F^2 C e^{i\omega_F t} = -\omega_F^2 x_p$

$\Rightarrow (\omega_0^2 - \omega_F^2) x_p = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t} \Rightarrow x_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_F^2)} e^{i\omega_F t}$

$$x_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_F^2)} \cos\omega_F t$$

$$\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_F^2)} \cos\omega_F t$$

نأخذ الجزء الحقيقي فقط حيث أننا إتفقنا مسبقا على عدم تكرار Re في الكتابات

2e cas:

$0 \pm i\omega_F = 0 \pm i\omega_0 \Rightarrow \omega_F = \omega_0$

($0 \pm i\omega_F$ solution à l'éq partcul.)

تطابق نبض القوة الخارجية مع ω_0 هو ما يسمى حالة الرنين.

$\Rightarrow$ On choisi x_p de la forme du 2e terme $\times\, t$

$x_p = t\, C e^{i\omega_F t} \Rightarrow \dot{x}_p = C e^{i\omega_F t}(1 + i\omega_F t)$

$\ddot{x}_p = 2Ci\omega_F e^{i\omega_F t} - C t \omega_F^2 e^{i\omega_F t}$

$\ddot{x}_p + \omega_0^2 x_p = C e^{i\omega_F t}(2i\omega_F \underbrace{- \omega_F^2 t + \omega_0^2 t}_{0}) = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t}$

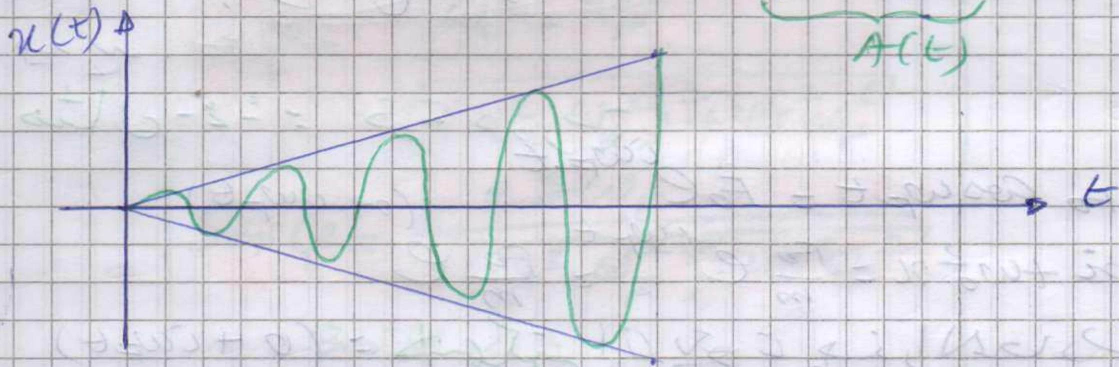
$C = \frac{F_0}{2im\omega_F} = \frac{F_0}{2im\omega_F} = \frac{F_0}{2 e^{i\pi/2} m\omega_F}$ $(e^{i\frac{\pi}{2}} = i)$ $= \frac{F_0}{2m\omega_0} e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$x_p=\frac{F_0}{2m\omega_F}\,t\,e^{i\left(\omega_F t-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$x_p=\frac{F_0}{2m\omega_F}\,t\cdot\cos\left(\omega_F t-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\quad x_p=\frac{F_0}{2m\omega_F}\,t\sin\omega_F t$$

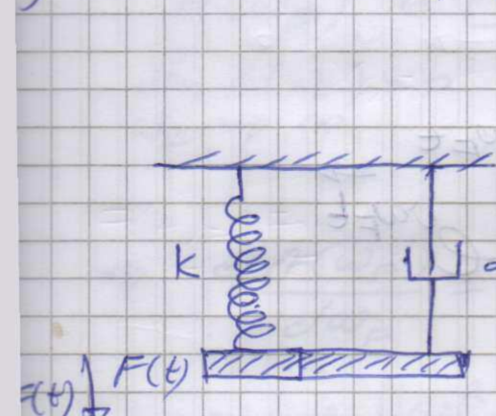
$x(t)=$

$$\Rightarrow x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)+\underbrace{\frac{F_0}{2m\omega_F}t}_{A(t)}\sin\omega_F t$$



ملاحظة : نلاحظ في حالة الى ت (حالة الرنين) انه بمرور الزمن تزداد السعة وقد يؤدي ذلك إلى تحطيم الحمل الميكانيكية لذلك وعموما نتجنب حالة الظاهرة في الحمل الميكانيكية.

2) في وجود المخمد:



ع.ح: $\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F(t)}{m}$

الحل: $x(t)=x_G+x_p$

$$(*)\quad x_G=\begin{cases}Ae^{-\delta t}\cos(\omega_a t+\varphi) & \delta<\omega_0 \Leftarrow \Delta<0\\ e^{-\delta t}(C_1t+C_2) & \delta=\omega_0 \Leftarrow \Delta=0\\ C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t} & r_1,r_2<0,\ \delta>\omega_0 \Leftarrow \Delta>0\end{cases}$$

$\lim_{t\to+\infty} x_G=0$

بعد مدة زمنية تختفي x_G

لذلك لا نهتم به (حل عابر)

و نهتم بـ: x_p (حل دائم)

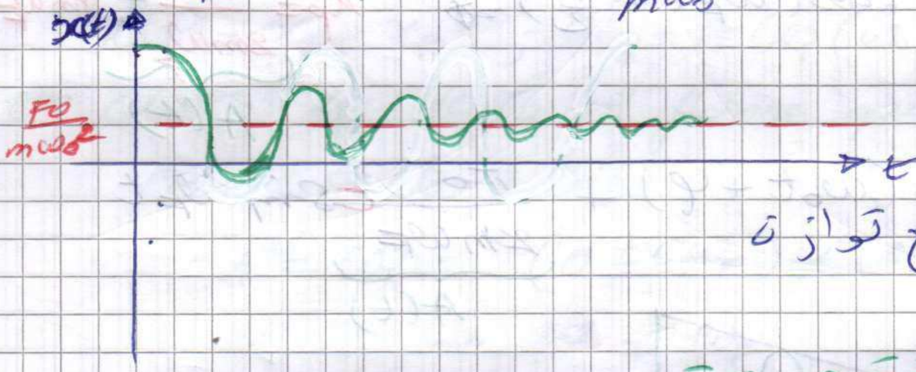
x_p يتعلق بالطرف الثاني.

مثال 1: $F(t)=F_0$

نختار x_p من شكل ثابت.

$x_p = c \Rightarrow \dot{x}_p = 0 \Rightarrow \ddot{x}_p = 0$

$\omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \Rightarrow x_p = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \Rightarrow x(t) = x_G + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$



كأنما نعتبر موضع توازن جديد.

مثال -2- : قوة دورية

$F(t) = F_0 \cos\omega_F t = F_0 e^{i\omega_F t}$

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t} = \frac{F_0}{m} e^{(0+i\omega_F t)}$

$(0 + i\omega_F t)$ = لا يمكن أن يكون جذر المعادلة المميزة (*)

لذلك نختار x_p من شكل الطرف الثاني (تماما)

$x_p = \tilde{A} e^{i\omega_F t}$, $\tilde{A} = |\tilde{A}| e^{i\varphi}$; $\tilde{A}$ = عدد مركب

$\tilde{A} = A e^{i\varphi}$, $A = |\tilde{A}|$

$\dot{x}_p = i\omega_F x_p$

$\ddot{x}_p = -\omega_F^2 x_p$

$[(\omega_0^2-\omega_F^2) + 2i\delta\omega_F]\, x_p = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t} \Rightarrow$

$x_p = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2-\omega_F^2)+2i\delta\omega_F} e^{i\omega_F t} = \tilde{A} e^{i\omega_F t}$

$\tilde{A} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2-\omega_F^2)+2i\delta\omega_F} = A e^{i\varphi}$

$|\tilde{A}| = A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_F^2)^2+4\delta^2\omega_F^2}}$

$x_p = A e^{i\varphi} e^{i\omega_F t} = A e^{i(\varphi+\omega_F t)} = A\cos(\omega_F t+\varphi) + \cancel{A i \sin(\omega_F t+\varphi)}$

(*) $\tilde{A} = F_0/m \frac{1}{(\omega_0^2-\omega_F^2)+i2\delta\omega_F} \times \frac{(\omega_0^2-\omega_F^2)-2i\delta\omega_F}{(\omega_0^2-\omega_F^2)-2i\delta\omega_F}$

$\boxed{\tilde{A} = \frac{a}{(\omega_0^2-\omega_F^2)+2i\delta\omega_F}}$, $a = F_0/m$

le 15/11/2015

NB: في دراسة جميع الحالات حركة البسيط - $a = F_0/m$ لتغير شكله حسب الحالة المدروسة لكن تشكل المقام يبقى على نفس التشكل.

$$(*) \Rightarrow \tilde{A} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2-\omega_F^2)^2+4\delta^2\omega_F^2}\left[\omega_0^2-\omega_F^2-2i\delta\omega_F\right]$$

$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2-\omega_F^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_F^2)^2+4\delta^2\omega_F^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{-2\delta\omega_F}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_F^2)^2+4\delta^2\omega_F^2}}$$

$\sin\varphi < 0$

$\Rightarrow \varphi < 0$

دراسة تغير السعة $A(\omega_F)$ بدلالة نبض القوة الخارجية

$A(\omega_F) \in [0, +\infty[$, $A(0) = \dfrac{F_0}{m\omega_0^2}$

$\lim_{\omega_F \to \infty} A(\omega_F) = 0$

نبحث عن القيم العظمى لـ A.

$$\Rightarrow \frac{dA(\omega_F)}{d\omega_F} = 0 \Rightarrow \frac{dA(\omega_F)}{d\omega_F} = \frac{F_0/m}{---} = 0$$

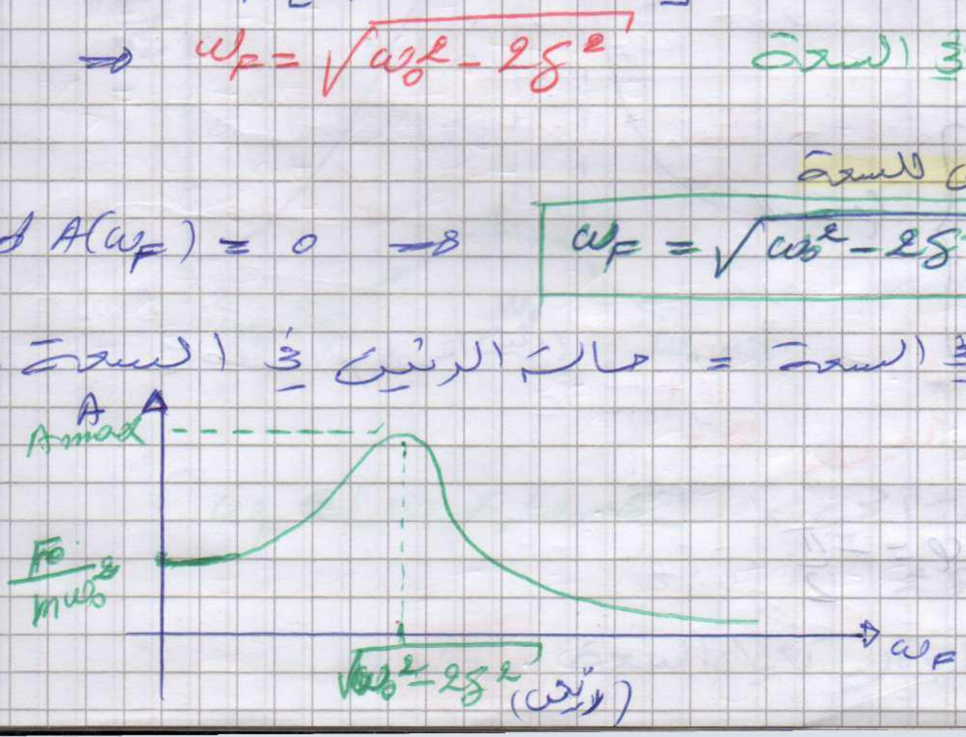
$$\Rightarrow 4\omega_F\left[\omega_F^2-\omega_0^2+2\delta^2\right] = 0 \Rightarrow \omega_F^2 = \omega_0^2-2\delta^2$$

$\Rightarrow \omega_F = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$ حالة الرنين في السعة

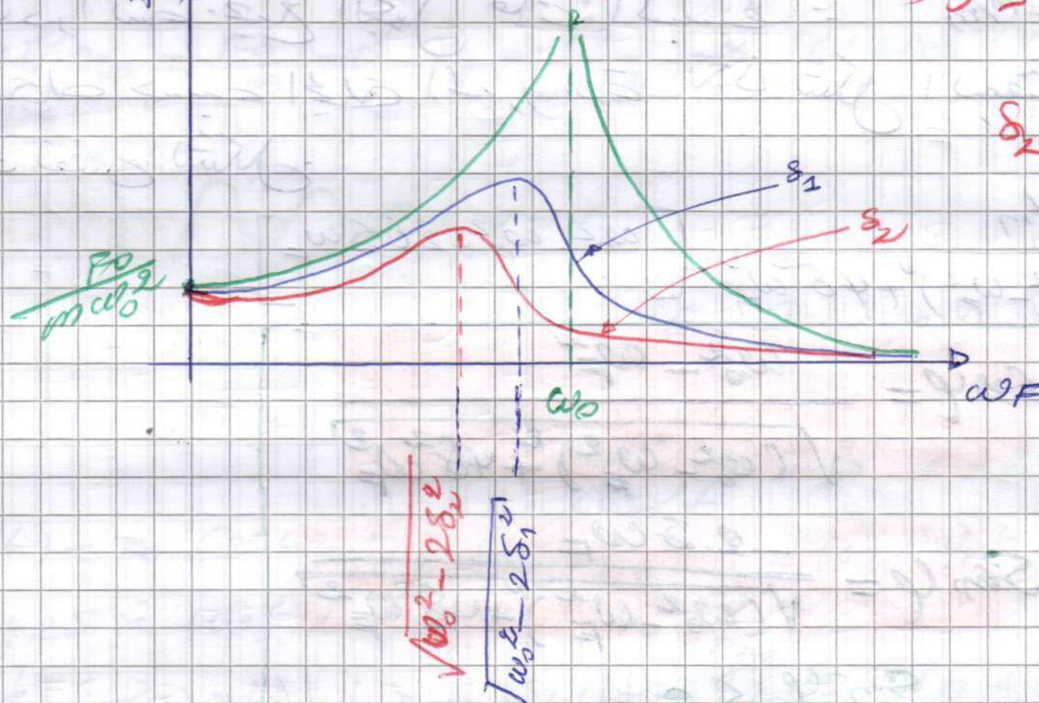
النهاية العظمى للسعة

$dA(\omega_F) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_F = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}}$

نهاية عظمى في السعة = حالة الرنين في السعة.



دراسة تغير $A(\omega_F)$ بدلالة δ :



دراسة تغير φ بدلالة ω_F :

$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + 4\delta^2\omega_F^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{-2\delta\omega_F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + 4\delta^2\omega_F^2}} < 0 \Rightarrow \varphi < 0$$

$\omega_F \in [0, \infty[$

$\underline{\omega_F = 0}$

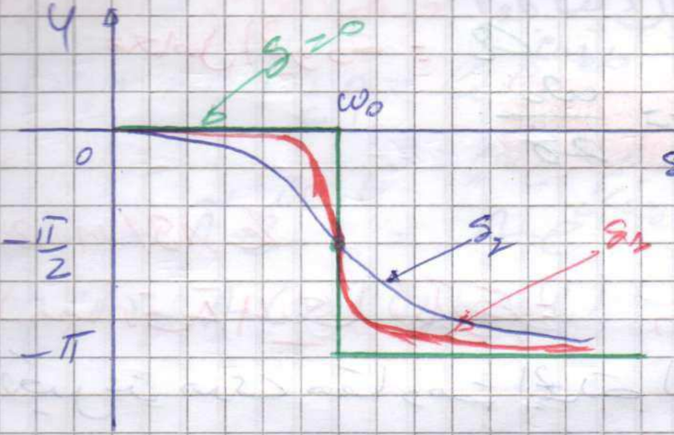
$$\left.\begin{array}{l} \sin\varphi = 0 \\ \cos\varphi = 1 \end{array}\right\} \varphi = 0$$

$\underline{\omega_F \to \infty}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\omega_F \to \infty} \sin\varphi = 0 \\ \lim\limits_{\omega_F \to \infty} \cos\varphi = -1 \end{array}\right\} \varphi = -\pi$$

$\underline{\omega_F = \omega_0}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = -1 \end{array}\right\} = \varphi = -\frac{\pi}{2}$$



حالة خاصة: $\delta=0$

$\sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi=\begin{cases}0\\-\pi\end{cases}$

$\cos\varphi=\begin{cases}1, & \omega_F<\omega_0 \Rightarrow\\ -1, & \omega_F>\omega_0 \Rightarrow\end{cases}$

$\begin{cases}\Rightarrow \varphi=0\\ \Rightarrow \varphi=-\pi\end{cases}$

دراسة تغير للسعة السرعة بدلالة ω_F :

$$\dot{x}(t)=\tilde{A}\,i\,\omega_F\,e^{i\omega_F t}=A\omega_F\,e^{i\varphi}\,e^{i\frac{\pi}{2}}\,e^{i\omega_F t}$$

$$=A\omega_F\,e^{i(\omega_F t+\varphi+\frac{\pi}{2})}$$

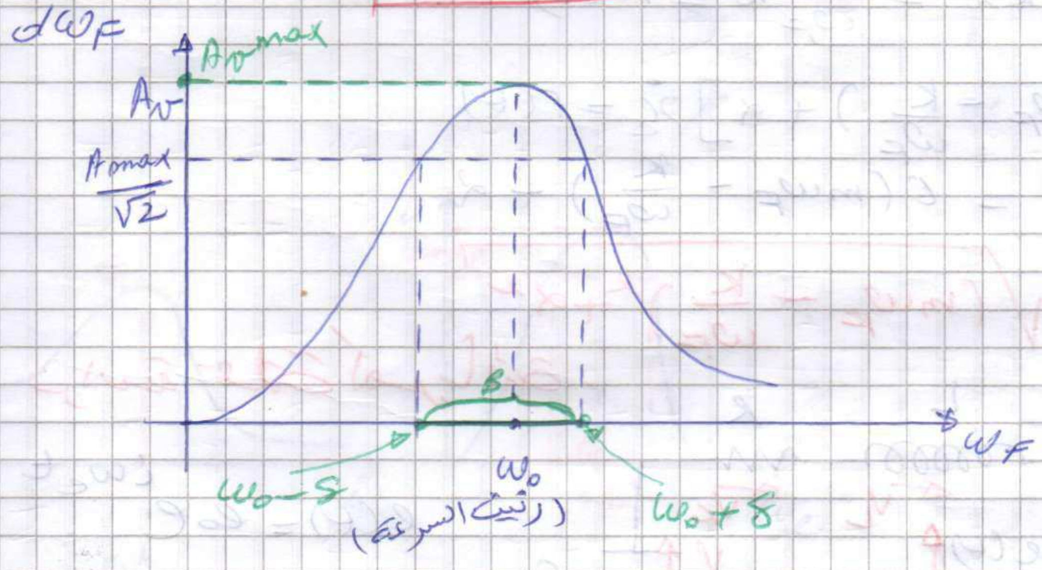
$$\dot{x}(t)=A_v\cos(\omega_F t+\varphi')$$

$$\begin{cases}A_v=A\omega_F\\ \varphi'=\varphi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$A_v=\frac{\omega_F F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_F^2)^2+4\delta^2\omega_F^2}}$$

$$A_v(0)=0\,,\quad \lim_{\omega_F\to\infty}A_v(\omega_F)=0$$

$$\frac{dA_v}{d\omega_F}=0 \Rightarrow \boxed{\omega_F=\omega_0}$$ حالة الرنين في السرعة



تعريف شريط العبور B =

هو المجال التالي : $\omega_F\in[\omega_0-\delta,\omega_0+\delta]$

حيث $2\delta=B$

داخل هذا المجال تكون السعة معتبرة.

معامل الجودة : Q

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

le 19/11/2015

الممانعة الميكانيكية : Z_m

تعبر عن مدى مقاومة الجملة لتأثير القوة الخارجية.

$$\boxed{Z_m = \frac{F(t)}{\dot{x}(t)}} = \frac{\text{القوة}}{\text{السرعة}}$$

Si/ $F(t) = F_0 e^{i\omega_F t}$ (périodique)

$x(t) = A e^{i(\omega_F t + \varphi)}$ ⟸ الحل يكون جيبي ⟸

$$\dot{x} = i\omega_F x \Rightarrow x = \frac{\dot{x}}{i\omega_F} = -\frac{i\dot{x}}{\omega_F} = x$$

$$\ddot{x} = i\omega_F(i\omega_F x) = i\omega_F \dot{x} = \ddot{x}$$

$$Z_m = \frac{F(t)}{\dot{x}}$$

$$Z_m = \frac{F(t)}{\dot{x}}$$

المعادلة التفاضلية : (بدون المرور إلى الحل العام للمعادلة التفاضلية)

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t)$$

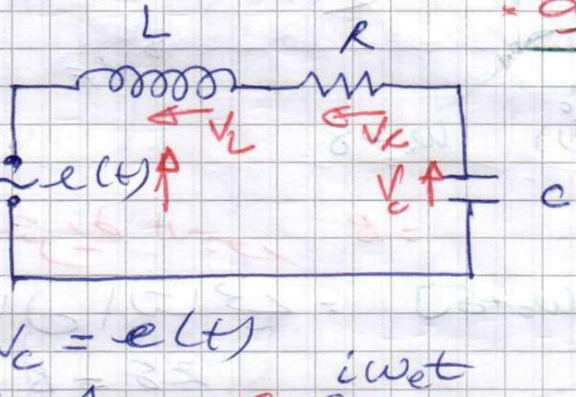
$$m i\omega_F \dot{x} + k\dot{x} - \frac{ik}{\omega_F}\dot{x} = F(t)$$

$$\Rightarrow \left[i\left(m\omega_F - \frac{k}{\omega_F}\right) + \alpha\right]\dot{x} = F(t)$$

$$Z_m = \frac{F(t)}{\dot{x}} = i\left(m\omega_F - \frac{k}{\omega_F}\right) + \alpha$$

$$|Z_m| = \sqrt{\left(m\omega_F - \frac{k}{\omega_F}\right)^2 + \alpha^2}$$

دراسة حالة كهربائية.



$$e(t) = e_0 e^{i\omega_e t}$$

$$V_L + V_R + V_C = e(t)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e_0 e^{i\omega_e t}$$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega_F t}$$

$\leftarrow$ القوة $F(t)$ في الميكانيك يقابلها فرق الكمون $= V(t) = e(t)$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e_0 e^{i\omega_e t}$$

انطلاقا من التماثل الكهروميكانيكي :

$$q(t) = \tilde{A} e^{i\omega_e t} = A e^{i(\omega_e t + \varphi)}$$

$$q(t) = A\cos(\omega_e t + \varphi) \quad , \quad A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e)^2 + 4\delta^2\omega_e^2}}$$

avec $a = e_0/L$

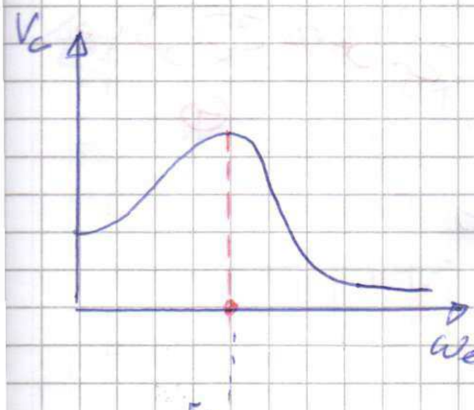
$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega_e^2}{\sqrt{\quad}} \quad ; \quad \sin\varphi = -\frac{2\delta\omega_e}{\sqrt{\quad}}$$

$$V(c) = \frac{q(t)}{C} = \frac{A}{C}\cos(\omega_e t + \varphi)$$

$$\frac{A}{C} = \frac{e_0/LC}{\sqrt{\quad}} = \frac{e_0\,\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2) + 4\delta^2\omega_F^2}}$$

$F(t) = F_0 e^{i\omega_F t}$
$\Rightarrow e(t) = e_0 e^{i\omega_e t}$

ميكانيك	كهرباء
قوة F	فرق كمون V
إزاحة x	شحنة q
سرعة $v = \dot{x}$	تيار $i = \dot{q}$
كتلة m	L
ثابت k	$1/C$
مخمد α	R



$\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$