le 19/11/2015

Chap N°2 : الاهتزازات الحرة متعددة درجات الحرية

مقدمة: هي اهتزازات ناتجة عن ازاحة الجملة عن وضع توازنها ثم تترك تهتز حرة ولوصف حركتها يلزمنا أكثر من احداثية مستقل.

دراسة جملة ميكانيكية

تكن لدينا الجملة الميكانيكية التالية:

إيجاد المعادلتين التفاضليتين:

1/ طريقة نيوتن:

معادلة (1) $\begin{cases} \text{عند التوازن} & \sum F_i = 0 \\ \text{عند الحركة} & \sum F_i = m_1 \ddot{x}_1 \end{cases}$

(2) م $\begin{cases} \text{عند ت} & \sum F_i = 0 \\ 2 \;\; " & \sum F_i = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$

2/ طريقة الطاقة:

$\frac{dE}{dt} = 0$ (الحرة)

طريقة الطاقة لا تصلح لأنه لدينا فقط معادلة واحدة.

3/ طريقة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \cancel{\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1}} = \cancel{Q_1^{ext}} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \cancel{\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2}} = \cancel{Q_2^{ext}} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{---} (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad \text{---} (2)$$

Ep : simplifiée $\Rightarrow$ $L = E_c - E_p$

$$E_c = E_{c_1} + E_{c_2} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$$

$$L = E_c - E_p$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 , \quad \frac{d}{dt}(m_2 \dot{x}_2) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_1 - x_2)(-1) - k_2 x_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k(x_1 - x_2) = 0 \qquad (2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \qquad (2)$$

le 22/11/2015

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k(x_1 - x_2) = 0 & / m_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 & / m_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k_1 + k}{m_1} x_1 - \frac{k}{m_1} x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{k_2 + k}{m_2} x_2 - \frac{k}{m_2} x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 - \frac{k}{m_1} x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 - \frac{k}{m_2} x_1 = 0 \end{cases}$$

نقسم على ω_{01}^2 و ω_{02}^2

معامل الترابط :

$$\frac{1}{\omega_{01}^2} \ddot{x}_1 + 1 x_1 = \underbrace{\frac{k}{m_1 \omega_{01}^2}}_{\gamma_{2\to1}} x_2$$

$$\frac{1}{\omega_{02}^2} \ddot{x}_2 + 1 x_2 = \underbrace{\frac{k}{m_2 \omega_{02}^2}}_{\gamma_{1\to2}} x_1$$

$\gamma_{2\to1}$: معامل ترابط الحالة 2 لـ 1 :

$$\gamma_{2\to1} = \frac{k}{m_1 \omega_{01}^2}$$

$\gamma_{1\to2}$: معامل ترابط الحالة 1 لـ 2 :

$$\gamma_{1\to2} = \frac{k}{m_2 \omega_{02}^2}$$

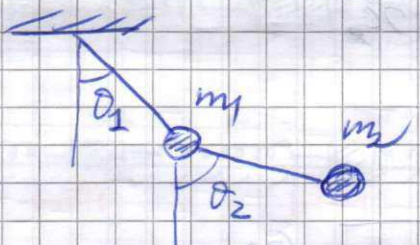
معامل ترابط الحالة ٣ :

معامل ترابط الجملة Γ :

$$\Gamma = \sqrt{\gamma_{2\to 1}\cdot \gamma_{1\to 2}} = \frac{k}{\sqrt{m_1 m_2 \omega_1^2 \omega_2^2}} = \frac{k}{\sqrt{(k+k_1)(k+k_2)}}$$

أنواع الترابط :

- ترابط مرونـي : يوجد في الطرف الثاني معامل $x \neq 0$
- مخمد لزوجي : = " " " " $\dot{x} \neq 0$
- كتلي (عطالي) : = " " " " $\ddot{x} \neq 0$.



(عطالي)

حل المعادلتين التفاضليتين :

نفرض $K_1 = K_2 = K$ ، $m_1 = m_2 = m$

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{k+K}{m} = \omega_0^2$$

$$\Gamma = \frac{k}{K+k} \quad , \quad \Gamma\cdot\omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \Gamma\omega_0^2 x_2 = 0 & (1) \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \Gamma\omega_0^2 x_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

المعادلة (1) متعلقة بالمعادلة (2) ⇐ يصعب حل مثل هذه المعادلات (بدون البرهان عن شكل الحل) وهو حل جيبي :

$$x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow x_1 = A_1 e^{i\omega t} \ , \ A_1 = |A_1| e^{i\varphi_1} \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow x_2 = A_2 e^{i\omega t} \ , \ A_2 = |A_2| e^{i\varphi_2} \end{cases}$$

هناك 5 مجاهيل :

نعوض في المعادلتين (1) و (2) : $\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \omega_0^2) A_1 e^{i\omega t} - \Gamma\omega_0^2 A_2 e^{i\omega t} = 0 \\ (-\omega^2 + \omega_0^2) A_2 e^{i\omega t} - \Gamma\omega_0^2 A_1 e^{i\omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) A_1 - \Gamma\omega_0^2 A_2 = 0 & (\mathrm{I}) \\ -\Gamma\omega_0^2 A_1 + (\omega_0^2 - \omega^2) A_2 = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

جملة معادلتين.

تذكير:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2 \quad , \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\Gamma\omega_0^2 \\ -\Gamma\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\Gamma\omega_0^2)^2$$

$$A_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & -\Gamma\omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{0}{\Delta}$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & 0 \\ -\Gamma\omega_0^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{0}{\Delta}$$

- إذا كانت $\Delta \neq 0 \Leftarrow$ (Δ توجد حركة) لأن $A_1 = A_2 = 0$
- " " $\Delta = 0 \Leftarrow$ (عدد لا نهائي من الحلول حسب الشروط الابتدائية)

كي تكون حركة $\Leftarrow$ $\boxed{\Delta = 0}$

$\boxed{\Delta = 0} \Leftarrow$ المعادلة المميزة للنبضات الطبيعية (ذاتية)

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\Gamma\omega_0^2)^2 = 0$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 - \Gamma\omega_0^2)(\omega_0^2 - \omega^2 + \Gamma\omega_0^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2 - \Gamma\omega_0^2) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = \omega_0^2(1-\Gamma)} \\ (\omega_0^2 - \omega^2 + \Gamma\omega_0^2) = 0 \quad\quad \boxed{\omega_2^2 = \omega_0^2(1+\Gamma)} \end{cases}$$

يسمى ω_1 و ω_2 بالنبض الطبيعي للجملة $\Leftarrow$
وهما النبضات الذاتية لتهتز بهما الجملة

ملاحظة:

عدد النبضات = عدد المعادلات التفاضلية

= عدد درجات الحرية.

تمكن للجملة أن تهتز بنبضتين ω_1 و ω_2

الأنماط الذاتية (الطبيعية) للجملة :

تعريف : يسمى نمط عندما تهتز الجملة بإحدى نبضاتها

النمط (1) : ← الجملة تهتز بـ : ω_1 أي : $\omega=\omega_1$

" " (2) : ← الجملة " " بـ : ω_2 أي : $\omega=\omega_2$

عدد الأنماط = عدد ω_i = ... = عدد درجات الحرية

* النمط (1) : $\omega=\omega_1$ بالتعويض في (I) و (II) بقيمة ω_1 =

$$(\omega_0^2-\omega_1^2)A_1-\Gamma\omega_0^2A_2=0$$

$$(\omega_0^2-\omega_0^2(1-\Gamma))A_1-\Gamma\omega_0^2A_2=0$$

$$\omega_0^2\Gamma A_1-\Gamma\omega_0^2A_2=0 \Rightarrow \boxed{A_1=A_2=B_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1=x_2=B_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)}$$

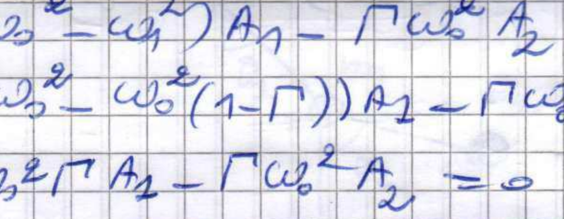
← اهتزاز على التوافق.

$$\omega_1^2=\omega_0^2(1-\Gamma)=\frac{k+K}{m}\left(1-\frac{k}{K+k}\right)$$

$$=\frac{k+K}{m}\cdot\left(\frac{K+k-k}{K+k}\right)=\frac{K}{m}$$

وعليه ω_1 لا يتعلق بـ : k

الرسم : اهتزاز على التوافق



* النمط (2) : $\omega=\omega_2$ بالتعويض في I أو II :

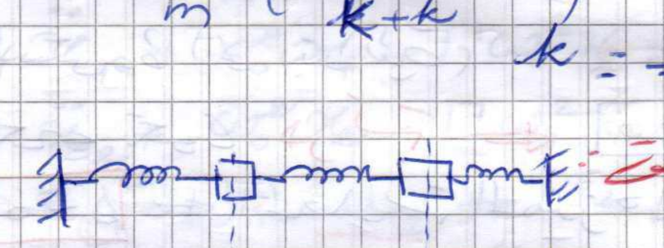
$$(\omega_0^2-\omega_2^2)A_1-\Gamma\omega_0^2A_2=0$$

$$(\omega_0^2-\omega_0^2(1+\Gamma))A_1-\Gamma\omega_0^2A_2=0$$

$$-\Gamma\omega_0^2A_1-\Gamma\omega_0^2A_2=0 \Rightarrow A_1=-A_2=B_2$$

$$\Rightarrow x_1=-x_2=B_2\cos(\omega_2t+\varphi_2)$$

اهتزاز على التعاكس.



الحل العام : مجموع الحلول المتحصل عليها في الأنماط (1) و (2)

$$\begin{cases} x_1 = \underset{(1)\text{ نمط}}{x_1} + \underset{(2)\text{ نمط}}{x_1} \\ x_2 = \underset{(2)\text{ نمط}}{x_2} + \underset{(2)\text{ نمط}}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= B_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \\ x_2 &= B_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) - B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \end{aligned}}$$

(الحل العام)

نحدد الثوابت B_i و φ_i من الشروط الابتدائية.

le 29/11/2015

ملخص = كيفية الحصول على الحل النهائي (مهم)

1- إيجاد المعادلات التفاضلية ⟸ لاغرانج / نيوتن.

2- نختار شكل الحل مباشرة: (يعطى مباشرة).

$$A_i = A_i e^{i\omega t} = |A_i| \cos(\omega t+\varphi_i)$$

3- بالتعويض في المعادلات التفاضلية نحصل على جملة معادلات طرفها الثاني معدوم.

4- لكي تكون حلول للجملة المعادلات التفاضلية السابقة يجب أن يكون: $\boxed{\Delta=0}$ ⟸ معادلة النبضات الطبيعية

⟸ نجد ω_i (النبضات الطبيعية)

5- بالتعويض بـ ω_i (في المرحلة 3) نجد الأنماط الطبيعية (حلول جزئية)

6- الحل الكلي = مجموع الأنماط ونحسب الثوابت من الشروط الابتدائية.

$$x_1 = B_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$
$$x_2 = B_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) - B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

تحديد الثوابت B_i و φ_i من شكل أ:

ملاحظة:

1- الشرط (1) اهتزاز على التوافق:

$$\begin{cases} x_1(0) = x_2(0) = x_0 \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

بالتعويض في الحل الكلي:

$$\begin{cases} B_1 \cos\varphi_1 + B_2 \cos\varphi_2 = x_0 & (1) \\ B_1 \cos\varphi_1 - B_2 \cos\varphi_2 = x_0 & (2) \\ -\omega_1 B_1 \sin\varphi_1 - \omega_2 B_2 \sin\varphi_2 = 0 & (3) \\ -\omega_1 B_1 \sin\varphi_1 + \omega_2 B \sin\varphi_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2B_1 \cos\varphi_1 = 2x_0$

$(3)+(4) \Rightarrow -2\omega_1 B_1 \sin\varphi_1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_1 = 0}, \boxed{B_1 = x_0}$ car $(\omega_1 \neq 0$ et $B_1 \neq 0)$

$(1)-(2) \Rightarrow 2B_2 \cos\varphi_2 = 0$

$(3)-(4) \Rightarrow -2\omega_2 B \sin\varphi_2 = 0$ $\Rightarrow \boxed{B_2 = 0}$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 \cos\omega_1 t \\ x_2(t) = x_0 \cos\omega_1 t \end{cases} \Rightarrow x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow$$

اهتزاز على التوافق.

2) نمط (2) = اهتزاز على التعاكس:

$x_1(0) = -x_2(0) = x_0$

$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = x_0 \cos\omega_2 t. \\ x_2(t) = -x_0 \cos\omega_2 t. \end{cases} \Rightarrow x_1(t) = -x_2(t)$$

$x_1(t) = -x_2(t) = x_0 \cos(\omega_2 t + \pi)$

فرق الطور $= \pi$

3) ظاهرة الخفقان:

$$\begin{cases} x_1(0) = x_0 \\ x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

بالتعويض في ①، ②، ③، ④

$$\begin{cases} B_1 \cos\varphi_1 + B_2 \cos\varphi_2 = x_0 & (1) \\ B_1 \cos\varphi_1 - B_2 \cos\varphi_2 = 0 & (2) \\ -\omega_1 B_1 \sin\varphi_1 - \omega_2 B_2 \sin\varphi_2 = 0 & (3) \\ -\omega_1 B \sin\varphi_1 + \omega_2 B_2 \sin\varphi_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)+(2) \Rightarrow 2B_1 \cos\varphi_1 = x_0 \\ (3)+(4) \Rightarrow -2\omega_1 B_1 \sin\varphi_1 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[(B_1 \neq 0)]{} \boxed{\begin{array}{l} \varphi_1 = 0 \\ B_1 = \dfrac{x_0}{2} \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)-(2) \Rightarrow 2B_2 \cos\varphi_2 = x_0 \\ (3)-(4) \Rightarrow -2\omega_2 B_2 \sin\varphi_2 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[(B_2 \neq 0)]{} \boxed{\begin{array}{l} \varphi_2 = 0 \\ B_2 = \dfrac{x_0}{2} \end{array}}$$

نعوض في الحل العام =

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{x_0}{2}\left(\cos \underbrace{\omega_1 t}_{\alpha} + \cos \underbrace{\omega_2 t}_{\beta}\right) \\ x_2(t) = \dfrac{x_0}{2}\left(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta-\alpha}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\beta-\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 \cos\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t \, \cos\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t \\ x_2(t) = x_0 \sin\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t \, \sin\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t \end{cases}$$

جداء دالتين $= x_1$

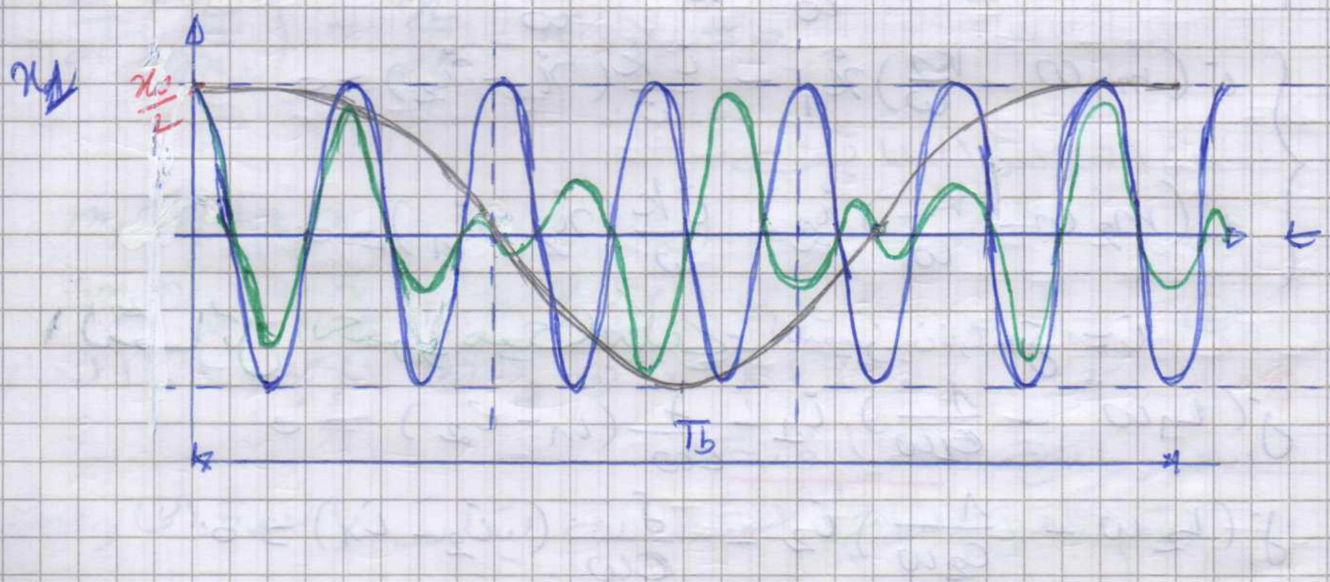
$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t \\ \text{و} \\ \cos\left(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t \end{cases}$$

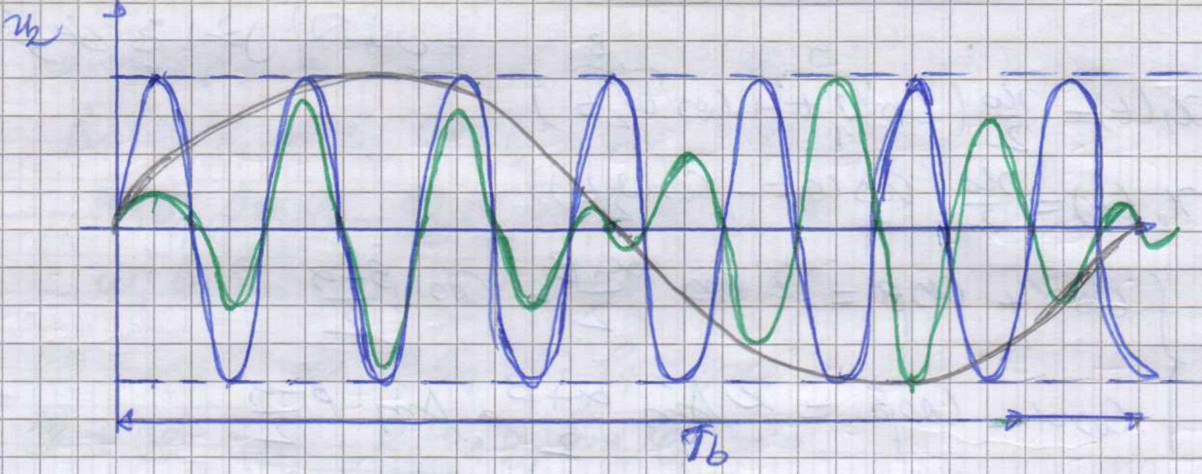
جيبيتين ذات دور =

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{4\pi}{\omega_1+\omega_2} \\ T_b &= \frac{4\pi}{\omega_2-\omega_1} \end{aligned}\right\} \quad T_b \gg T$$

جداء دالتين : $= x_2$

$$\begin{cases} \sin\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t \\ \sin\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t \end{cases}$$





نلاحظ في هذه الحالة أن هناك تبادل طاقوي بين المهتزين حيث نقصان إحدى السعتين يؤدي إلى زيادة السعة الأخرى والعكس صحيح والمسؤول على نقل هاته الطاقة هو النابض الرابط بين المهتزين.

دراسة حالة كهربائية:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k(x_1 - x_2) = 0 & (1) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_i = -\dfrac{i}{\omega}\dot{x}_i \\ \ddot{x}_i = i\omega \dot{x}_i \end{array}}$$

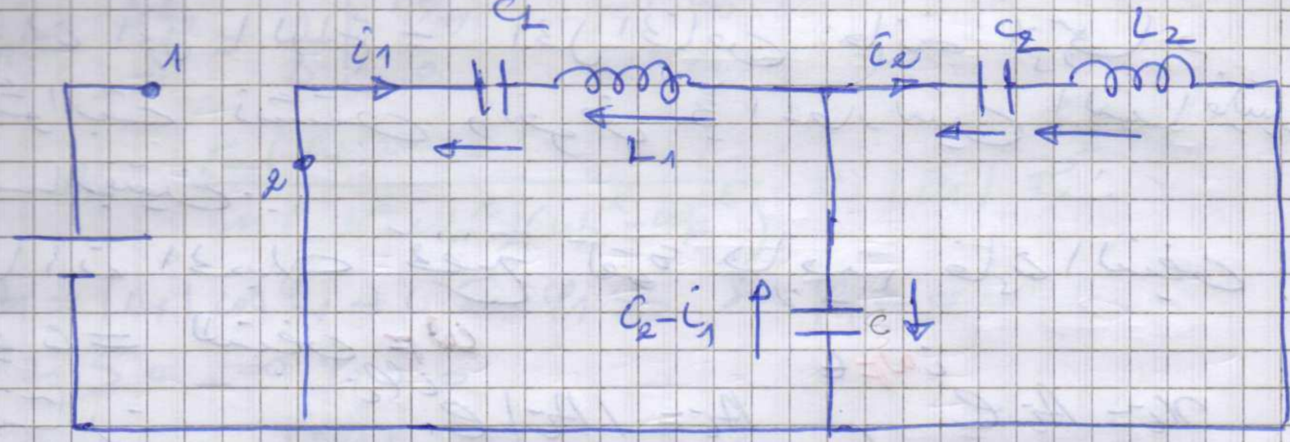
$$\begin{cases} m_1 i\omega \dot{x}_1 - \dfrac{i k_1 \dot{x}_1}{\omega} - \dfrac{ik}{\omega}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \\ m_2 i\omega \dot{x}_2 - \dfrac{i k_2}{\omega}\dot{x}_2 - \dfrac{ik}{\omega}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\left(m_1\omega - \dfrac{k_1}{\omega}\right)\dot{x}_1 - \dfrac{ik}{\omega}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \\ i\left(m_2\omega - \dfrac{k_2}{\omega}\right)\dot{x}_2 - \dfrac{ik}{\omega}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \end{cases}$$

التماثل الكهروميكانيكي: $i = j$ (التمييز بين I, i)

$$j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)i_1 - \frac{j}{C\omega}(i_1 - i_2) = 0$$

$$j\left(L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega}\right)i_2 - \frac{j}{C\omega}(i_2 - i_1) = 0$$



$$V_L = L\ddot{q} = jL\omega i$$

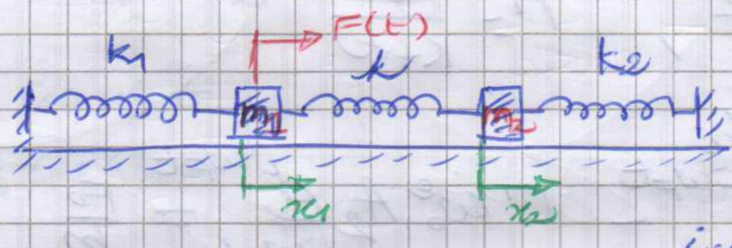
جهد جيبي

$$L_C = \frac{q}{C} = -\frac{j}{C\omega} i$$

le 06/12/2015

الاهتزازات القسرية ذات درجتي حرية:

ليكن لدينا الجملة الميكانيكية السابقة وقوة خارجية جيبية تؤثر في الكتلة m_1



$$F(t) = F_0 \cos\omega_F t = \cancel{F_{x_1 ext}} = F_0 e^{i\omega_F t}$$

كتابة المعادلات: (ح ع 2)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = F_{x_1 ext} = F_0 e^{i\omega_F t} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = F_{x_2 ext} = 0 \end{cases}$$

من الدرس السابق:

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k(x_1 - x_2) = F_0 e^{i\omega_F t} \quad ①$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \quad ②$$

NB = يجب الانتقال بـ ① و ② إلى الدارة الكهربائية المكافئة.

نهتم بالحل الدائم (حيث أنه يتعلق بالقوة الخارجية) ونهمل الحل العام (العابر)

- أما الحل الدائم = الحل الخاص ؛ فإنه لإيجاد الثوابت نشتق ونعوض في المعادلتين التفاضليتين السابقتين.

- أما أن الجملة تخضع لقوة خارجية فإن النبض يكون = للنبض ω_F

نختار:

$$x_i = A_i e^{i\omega_F t}, \quad A_i = |A_i| e^{i\varphi_i}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 e^{i\omega_F t} \\ x_2 = A_2 e^{i\omega_F t} \end{cases}$$

بالتعويض في ع ت:

$$m_1 = m_2 = m, \quad K_1 = K_2 = k.$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \Gamma\omega_0^2 x_2 = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t} \quad \text{---} \quad (1) \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \Gamma\omega_0^2 x_1 = 0 \quad \text{---} \quad (2) \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{\cancel{k} + k}{m}, \quad \Gamma = \frac{k}{K+k}$$

$$\ddot{x}_i = -\omega_F^2 x_i$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega_F^2) A_1 e^{i\omega_F t} - \Gamma\omega_0^2 A_2 e^{i\omega_F t} = \frac{F_0}{m} \\ -\Gamma\omega_0^2 A_1 e^{i\omega_F t} + (\omega_0^2 - \omega_F^2) A_2 e^{i\omega_F t} = 0 \end{cases}$$

$$\to \boxed{\begin{matrix} (\omega_0^2 - \omega_F^2) A_1 - \Gamma\omega_0^2 A_2 = F_0/m & (\mathrm{I}) \\ -\Gamma\omega_0^2 A_1 + (\omega_0^2 - \omega_F^2) A_2 = 0 & (\mathrm{II}) \end{matrix}}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega_F^2 & -\Gamma\omega_0^2 \\ -\Gamma\omega_0^2 & (\omega_0^2 - \omega_F^2) \end{vmatrix} = (\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 - (\Gamma\omega_0^2)^2$$

$$= (\omega_0^2 - \omega_F^2 - \Gamma\omega_0^2)(\omega_0^2 - \omega_F^2 + \Gamma\omega_0^2)$$

$$= [\underbrace{\omega_0(1-\Gamma)}_{\omega_1^2} - \omega_F^2][\underbrace{\omega_0^2(1+\Gamma)}_{\omega_2^2} - \omega_F^2]$$

$$\to \Delta = (\omega_1^2 - \omega_F^2)(\omega_2^2 - \omega_F^2).$$

$$A_1 = \frac{\Delta A_1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} F_0/m & -\Gamma\omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2-\omega_F^2 \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \frac{F_0(\omega_0^2-\omega_F^2)}{m(\omega_1^2-\omega_F^2)(\omega_2^2-\omega_F^2)} = |A_1|\, e^{i\varphi_1}$$

$$A_1 = |A_1|\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 \Rightarrow \sin\varphi_1 = 0$$

$$A_1 > 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0$$

$$A_1 < 0 \Rightarrow |\varphi_1| = \pi$$

$$A_2 = \frac{\Delta A_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} (\omega_0^2-\omega_F^2) & F_0/m \\ -\Gamma\omega_0^2 & 0 \end{vmatrix}$$

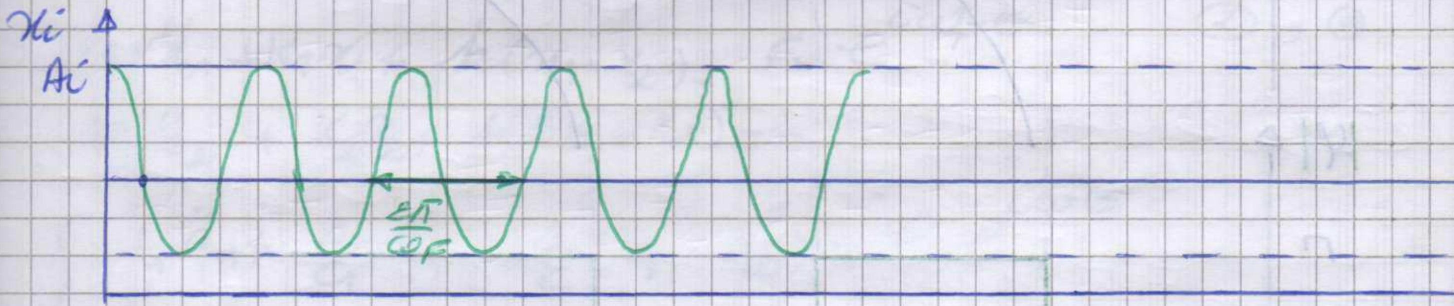
$$A_2 = \frac{F_0\Gamma\omega_0^2}{m(\omega_1^2-\omega_F^2)(\omega_2^2-\omega_F^2)}$$

$$A_2 < 0 \Rightarrow |\varphi_2| = \pi$$

$$A_2 > 0 \Rightarrow \varphi_2 = 0$$

$$x_1 = A_1\cos\omega_F t$$

$$x_2 = A_2\cos\omega_F t$$



دراسة تغير A_i بدلالة ω_F :

$$A_1(\omega_F) = \frac{F_0(\omega_0^2-\omega_F^2)}{m(\omega_1^2-\omega_F^2)(\omega_2^2-\omega_F^2)}$$

$$A_1(0) = \frac{F_0\,\omega_0^2}{m(\omega_1^2-\omega_2^2)} = \frac{F_0}{m\omega_0^2(1-\Gamma^2)}$$

$$\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$$

$$(\omega_0\sqrt{1-\Gamma} < \omega_0 < \omega_0\sqrt{1+\Gamma})$$

$$\lim_{\omega_F \xrightarrow{<} \omega_1} A_1(\omega_F) = \frac{+}{+\cdot+} = +\infty$$

$$\lim_{\omega_F \xrightarrow{>} \omega_1} A_1(\omega_F) = \frac{+}{-\cdot+} = -\infty$$

حالة رنين

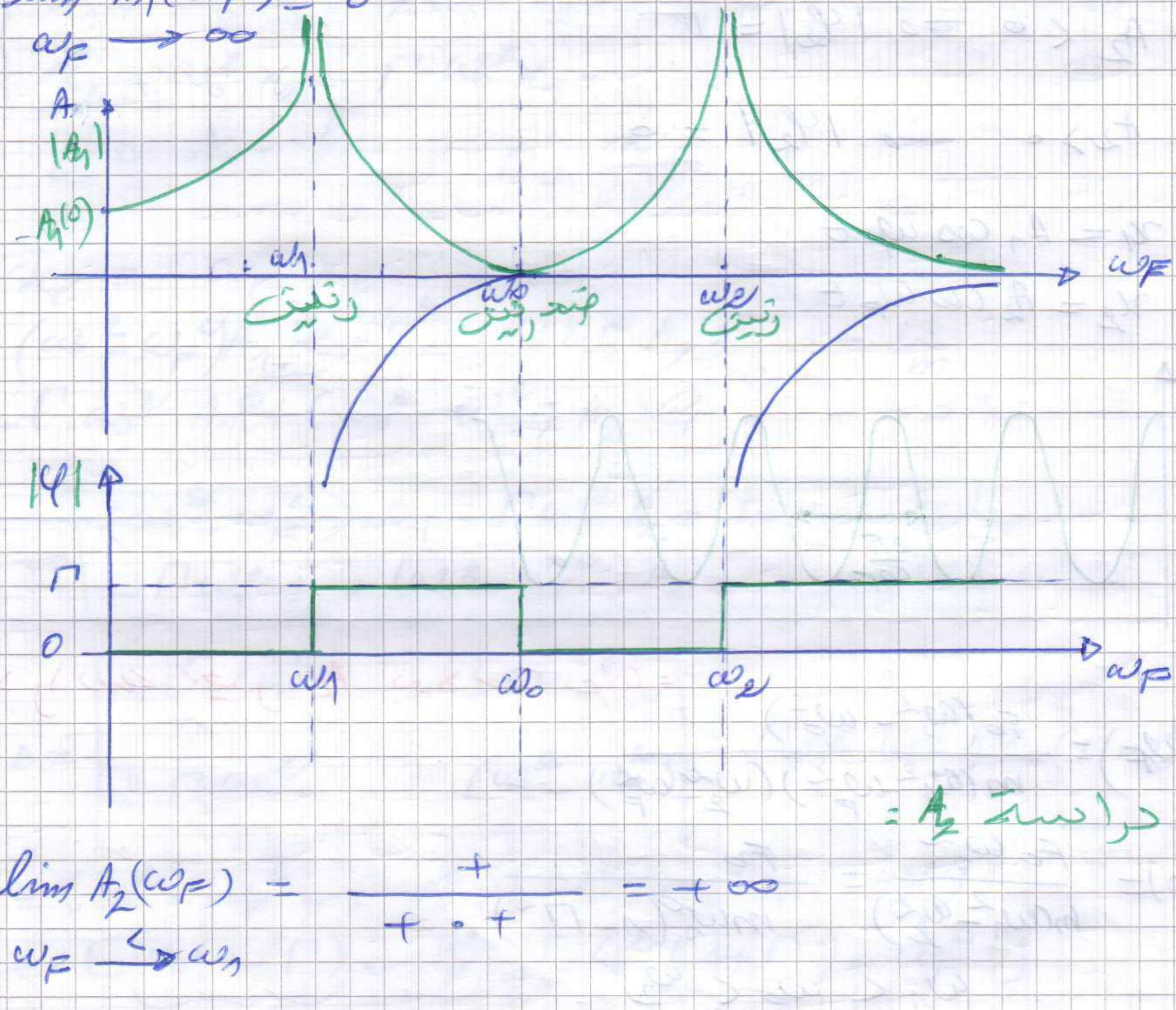
$$A_1(\omega_0) = 0$$ (حالة ضد الرنين)

$$\lim_{\omega_F \xrightarrow{<} \omega_2} A_1(\omega_F) = \frac{-}{-\cdot+} = +\infty$$

$$\lim_{\omega_F \xrightarrow{>} \omega_2} A_2(\omega_F) = \frac{-}{-\cdot-} = -\infty$$

حالة رنين

$$\lim_{\omega_F \to \infty} A_1(\omega_F) = 0^-$$



دراسة A_2 :

$$\lim_{\omega_F \xrightarrow{<} \omega_1} A_2(\omega_F) = \frac{+}{+\cdot+} = +\infty$$

$$\lim_{\omega_F \xrightarrow{>} \omega_1} A_2(\omega_F) = \frac{+}{-\cdot+} = -\infty$$

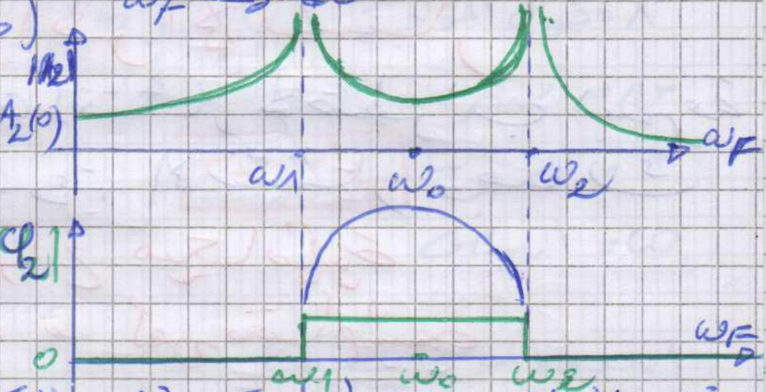
$A_2(\omega_0) \neq 0$

$$A_2(\omega_0) = \frac{F_0 \Gamma \omega_0^2}{m\left[\omega_0^2(1-\Gamma) - \omega_0^2\right]\left[\omega_0^2(1+\Gamma) - \omega_0^2\right]}$$

$$= \frac{F_0 \Gamma \cancel{\omega_0^2}}{m\left[-\Gamma \omega_0^2\right]\left[\Gamma \cancel{\omega_0^2}\right]} = -\frac{F_0}{m \Gamma \omega_0^2} < 0$$

$$\lim_{\omega_F \xrightarrow{<} \omega_2} A_2(\omega_F) = \frac{+}{-\cdot +} = -\infty \, , \quad \text{et} \lim_{\omega_F \to \infty} A_2(\omega_F) = 0^+$$

$$\lim_{\omega_F \xrightarrow{>} \omega_2} A_2(\omega_F) = \frac{+}{-\cdot -} = +\infty$$



نلاحظ أنه عند تطابق نبض القوة الخارجية مع إحدى النبضات الطبيعية للجملة تحدث حالة رنين حيث السعة تكون عظمى وهناك ظاهرة أخرى هي ضد الرنين حيث تكون السعة صغرى.

الدارة الكهربائية المماثلة: انطلاقا من المعادلتين ① و ②

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k(x_1 - x_2) = F_0 e^{i\omega_F t}$$

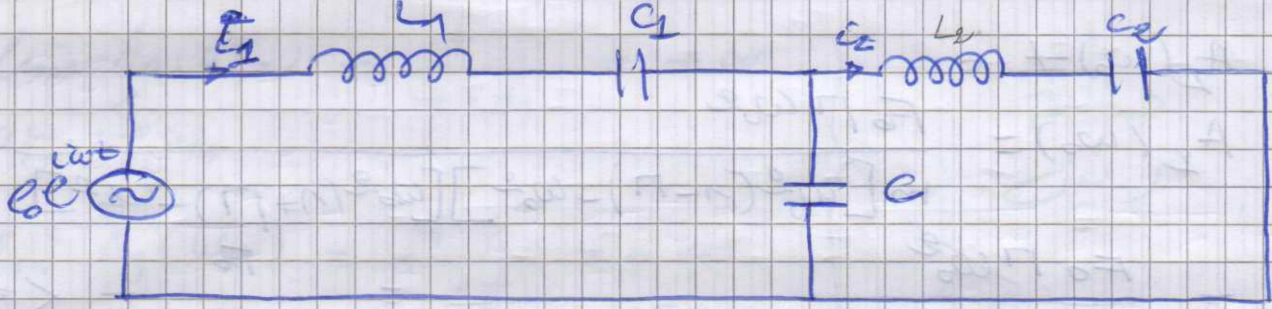
$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1} q_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = e_0 e^{i\omega t} \\ L_2 \ddot{q}_2 + \frac{1}{C_2} q_2 + \frac{1}{C}(q_2 - q_1) = 0 \end{cases}$$

الحل جيبي:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -\frac{j}{\omega} \dot{x} \\ \ddot{x} = j\omega \dot{x} \end{array}} \qquad j^2 = -1$$

$$\begin{cases} j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right) i_1 - \frac{j}{C\omega}(i_1 - i_2) = e_0 e^{i\omega t} \\ j\left(L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega}\right) i_2 - \frac{j}{C\omega}(i_2 - i_1) = 0 \end{cases}$$



le 13/12/2015

الأمواج وظواهر الانتشار

تعريف الموجة: هي عبارة عن انتشار الاضطراب بسرعة v تسمى بسرعة الانتشار وهناك نوعان:
- أمواج ميكانيكية
- " " كهرومغناطيسية

الأمواج الميكانيكية: تحتاج الى وسط مادي مستمر مرن لكي تنتشر.

" " الكهرومغناطيسية: لا تحتاج الى وسط مادي للانتشار لأنها ناتجة عن تذبذب في كل من الحقلين الكهربائي والمغناطيسي

الأمواج الميكانيكية: هناك نوعين

1- أمواج عرضية: اهتزاز المادة عموديا على اتجاه الانتشار. (يكون جهة انتشار الاضطراب (انتشار الموجة) عمودي على جهة انتقال (اهتزاز) نقاط المادة.

مثال: اهتزاز حبل، موجة في الماء...

2- أمواج طولية: يكون فيه اتجاه انتشار الموجة له نفس حامل انتقال (اهتزاز) المادة.

مثال: صوتية، أمواج المروحة في النابض...

دراسة أمواج عرضية:

الانتشار الحر للأمواج في حبل: