33

المحور الخامس : مقاييس الشكل.

رأينا سابقا مجموعتين مهمتين من المقاييس الإحصائية الوصفية هما مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت، لكن الاعتماد عليهما فحسب لوصف ظاهرة ما يؤدي إلى إغفال بعض الجوانب المهمة مثل شكل منحناها التكراري. فقد نجد ظاهرتين لهما الوسط الحسابي نفسه والانحراف المعياري نفسه، ولكنهما تختلفان في الشكل العام للتوزيع.

ولهذا ظهرت الحاجة إلى مجموعة ثالثة من المقاييس تعطينا فكرة عن الشكل العام للتوزيع، تسمى: مقاييس الشكل.

لكن، وقبل ذلك لابد أولاً أن نعرج على فكرة أخرى مهمة في الإحصاء وهي فكرة العزوم المستخدمة في حساب الكثير من مقاييس الشكل:

I - العزوم: (Les moments)

1 - تعريف: العزم في الإحصاء فكرة غير ملموسة مستمدة من مفهوم ميكانيكي، يشير إلى القوة المطبقة حول نقطة مركزية.

تستخدم العزوم لإستخراج قوانين حساب: الوسط الحسابي، الانحراف المعياري، التباين، والكثير من مقاييس الشكل كما سنرى.

2 - حسابها:

العزم من الدرجة "R" لسلسلة المعطيات X_i حول أي عدد A هو "M_R" حيث:

$$M_R = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i (x_i - A)^R \quad (45)$$

و $0 \leq R$.

انطلاقا من هذا القانون العام يمكن أن نميز بين نوعين أساسيين من العزوم حسب قيمة العدد A:

النوع الأول: العزوم الإبتدائية (M_R)

العزم الإبتدائي من الدرجة R هو عزم متمركز حول نقطة الأصل (0.0) أي أن $A=0$، وعليه فهو يحسب كما يلي:

أ- بالنسبة لسلسلة عددية: $M_R = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^R}{n}$ — (46)

ب- بالنسبة لتوزيع تكراري: $M_R = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i X_i^R}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$ — (47)

- لاحظ أنه:

(لما $R=0$ فإن $M_0 = 1$)، (لما $R=1$ فإن $M_1 = \bar{X}$)، ($S^2 = M_2 - M_1^2$)

النوع الثاني: العزوم المتمركزة (μ_R).

في هذا النوع يكون العزم متمركزا حول $\bar{X}$ أي ($A = \bar{X}$)، ونرمز له بالرمز "μ_R".

أ- بالنسبة لسلسلة عددية: $\mu_R = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^R}{n}$ — (48)

ب- بالنسبة لتوزيع تكراري: $\mu_R = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^R}{\sum n_i}$ — (49)

لاحظ أنه:

$R = 0 \Rightarrow \mu_0 = 1$ ، $R = 1 \Rightarrow \mu_1 = 0$ ، $R = 2 \Rightarrow \mu_2 = S^2$

3- العلاقة بين العزوم الابتدائية والعزوم المتمركزة:

يمكن حساب μ_R بالاعتماد على M_R، فمثلا:

$$\mu_2 = M_2 - M_1^2$$
$$\mu_3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3$$
$$\mu_4 = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1M_2 - 3M_1^4.$$

II- الالتواء: "Dissymétrie ou assymétrie".

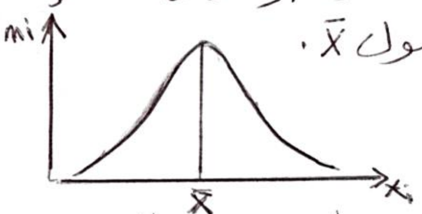
1- تعريف التناظر (Symétrie): التناظر ضد الالتواء، ويعتبر التوزيع متناظرا إذا كانت المفردات X_i موزعة بانتظام وبالتساوي حول $\bar{X}$.

يمكن أن نلاحظ ما يلي: $\bar{X} = Me = Mo$

$Q_3 - Me = Me - Q_1$

$D_9 - Me = Me - D_1$

$P_{99} - Me = Me - P_1.$



(منحنى متناظر)

35

2- تعريف الإلتواء: يعتبر التوزيع ملتويا إذا لم تكن المفردات X موزعة بالتساوي حول $\bar{X}$، بموضوعان:

أ- إلتواء نحو اليمين: أو الالتواء الموجب، نجده عندما يكون الذيل الأطول للمنحنى متجها نحو اليمين، حيث نجد أن $Mo < Me < \bar{X}$

ب- إلتواء نحو اليسار: أو الإلتواء السالب، نجده عندما يكون الذيل الأطول للمنحنى متجها نحو اليسار، حيث يكون $Mo > Me > \bar{X}$.

3- مقاييس الإلتواء: هناك جملة من المؤشرات التالية من وحدة القياس، تساعد على قياس درجة الالتواء واتجاهه. أشهرها مايلي:

أ- معامل فيشر F_1:

$$F_1 = \frac{\mu_3}{S^3} \quad (50)$$

حيث نميز الحالات التالية:

* $F_1 > 0$ ⇐ الإلتواء نحو اليمين.
* $F_1 = 0$ ⇐ المنحنى عديم الالتواء.
* $F_1 < 0$ ⇐ الالتواء نحو اليسار.

ب- معامل بيرسون (P): وضع "كارل بيرسون" صيغتين لحسابه:

+ الصيغة الأولى: تهدف الى اعطاء فكرة أولية عن شكل التوزيع من خلال دراسة موقع المنوال بالنسبة للوسط الحسابي.

$$P_1 = \frac{(\bar{X} - Mo)}{S} \quad (51)$$

فإذا كان:

* $P_1 > 0$ ⇐ $\bar{X} > Mo$ ⇐ التوزيع موجب الإلتواء.
* $P_1 = 0$ ⇐ $\bar{X} = Mo$ ⇐ " عديم الالتواء. (متناظر)
* $P_1 < 0$ ⇐ $\bar{X} < Mo$ ⇐ " سالب الإلتواء.

+ الصيغة الثانية: تعطينا معامل الأهما هو "P_2" الذي يحسب كمايلي:

$$P_2 = \frac{(\mu_3)^2}{(\mu_2)^3} = \frac{\mu_3^2}{S^6} = F_1^2 \quad (52)$$

نلاحظ أن قيمة P_2 دوما موجبة.

وعليه لمعرفة إتجاه الإلتواء ندرس إشارة μ_3:

الأستاذ / هاشمي عبابسة

الأستاذ / هاشمي عبابسة

36

فإذا كان : * $M_3 > 0$ ⟸ التوزيع موجب الإلتواء.

* $M_3 = 0$ ⟸ التوزيع عديم الإلتواء.

* $M_3 < 0$ ⟸ التوزيع سالب الإلتواء.

ج - معامل يول وكندال (Yule et Kendall) : (C_{yk})

تظهر أهمية هذا المعامل في التوزيعات التكرارية المفتوحة نظراً لصعوبة حساب المعاملات الأخرى في هذه الحالة :

$$C_{yk} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} \quad \text{—— (53)}$$

فإذا كان :

* $C_{yk} > 0 \Leftarrow (Q_3 - Q_2) > (Q_2 - Q_1) \Leftarrow$ التوزيع موجب الإلتواء.

* $C_{yk} = 0 \Leftarrow (Q_3 - Q_2) = (Q_2 - Q_1) \Leftarrow$ التوزيع عديم الإلتواء.

* $C_{yk} < 0 \Leftarrow (Q_3 - Q_2) < (Q_2 - Q_1) \Leftarrow$ التوزيع سالب الإلتواء.

ونظراً لإعتماد هذا المعامل على الربيعيات فهو يسمى كذلك المعامل الربيعي للإلتواء. وبالطريقة نفسها يمكن حساب المعاملين العشري والمئيني للإلتواء :

$$C_{yk} = \frac{(P_{90} - P_{50}) - (P_{50} - P_{10})}{P_{90} - P_{10}} = \frac{(D_9 - D_5) - (D_5 - D_1)}{D_9 - D_1} \quad \text{—— (54)}$$

خلاصة :

تستخدم معاملات الإلتواء لقياس درجة إلتواء لشكل توزيع ظاهرة ما ذاتجاهه ، إضافة الى المقارنة بين مختلف اشكال التوزيعات لعدة ظواهر (شريطة إستخدام المعامل نفسه في المقارنة).

وليكون إستخدام هذه المعاملات مفيداً يجب أن تكون الظاهرة وحيدة المنوال وذات عدد كبير من المشاهدات.

III - التفلطح (L'aplatissement) :

1 - تعريف التفلطح :- نقول أن المنحنى مفلطح إذا كانت قمته أقل ارتفاعاً، وشكله اكثر اتساعاً وانبساطاً مقارنة بالمنحنى الطبيعي.

2- تعريف التدبب: نقول أن المنحنى مدبب، إذا كانت قيمته أعلى، وشكله أقل اتساعًا وانبساطًا مقارنة بالمنحنى الطبيعي.

37

3- معاملات التفلطح:

لقياس درجة تفلطح أو تدبب المنحنى التكراري لظاهرة ما، نستخدم عدة معاملات أهمها:-

أ- معامل بيرسون P_3:

$$P_3 = \frac{M_4}{M_2^2} = \frac{M_4}{S^4} \quad \text{— (55)}$$

حيث نميز الحالات التالية:-

* $P_3 > 3 \Leftarrow$ المنحنى مدبب (Léptocurtique)
* $P_3 = 3 \Leftarrow$ المنحنى طبيعي (الشرط الأ يكون ملتويًا) (Mésocurtique)
* $P_3 < 3 \Leftarrow$ المنحنى مفلطح (platicurtique).

يسمى أيضًا معامل التفلطح العزومي.

ب- معامل فيشر F_2:

$$F_2 = P_3 - 3 = \frac{M_4}{S^4} - 3 \quad \text{— (56)}$$

فإذا كان: * $F_2 > 0 \Leftarrow P_3 > 3 \Leftarrow$ المنحنى مدبب.

* $F_2 = 0 \Leftarrow P_3 = 3 \Leftarrow$ المنحنى طبيعي (شرط الأ يكون ملتويًا).
* $F_2 < 0 \Leftarrow P_3 < 3 \Leftarrow$ المنحنى مفلطح.

ج- معامل كيلي "K" (Kelly):

$$K = \frac{\frac{1}{2} EQ}{P_{90} - P_{10}} = \frac{\frac{1}{2} EQ}{D_9 - D_1} \quad \text{— (57)}$$

ويسمى كذلك معامل التفلطح المئيني.

وإذا كان: $K = 0{,}263$. فإن المنحنى طبيعي.

الأستاذ /
هاشمي عبابسة