

Série N°2 : Construction de tests statistiques

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\theta > 0$. On souhaite tester l'hypothèse nulle $H_0 : \theta = 2$ contre l'alternative $H_1 : \theta = 1$ sur la base d'une seule observation. Déterminer les deux risques associés à la région de rejet $[1, \infty[$.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$. On suppose que la région de rejet du test

$$\begin{cases} H_0 : \theta \leq 1 \\ H_1 : \theta > 1 \end{cases} .$$

est $W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \max_{1 \leq i \leq n} x_i \geq 0.9 \right\}$. Déterminer la fonction puissance de ce test, puis déduire son niveau de signification.

Exercice 3 Sur la base d'un échantillon de taille $n = 9$, construire le test le plus puissant, au niveau $\alpha = 0.10$, sur la moyenne μ d'une variable aléatoire normale de variance $\sigma^2 = 2$:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = -1 \end{cases} .$$

Vérifier qu'il est sans biais.

Exercice 4 Soit X une population normale d'espérance inconnue μ et de variance 4. On prélève un échantillon de taille 16 pour réaliser le test

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 10 \\ H_1 : \mu > 10 \end{cases} .$$

1. Construire le test uniformément le plus puissant au niveau $\alpha = 0.05$.
2. Déterminer sa fonction puissance, puis tracer son graphe.
3. Si $\mu = 12$, calculer le risque de deuxième espèce.

Exercice 5 Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon, de taille $n \geq 1$, d'une population X normale centrée de variance σ^2 . A partir d'un échantillon de taille 10, construire le test uniformément le plus puissant, au niveau de signification $\alpha = 0.05$, des hypothèses

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \leq 1 \\ H_1 : \sigma^2 > 1 \end{cases} .$$

Tracer le graphe de sa fonction puissance.

Exercice 6 Dans une production il y a une proportion p d'articles défectueux. On prélève 40 articles pour réaliser le test

$$\begin{cases} H_0 : p \leq 0.1 \\ H_1 : p > 0.1 \end{cases} ,$$

au niveau de signification 0.01. Déterminer le test optimal puis tracer le graphe de sa fonction puissance.

Exercice 7 On pèle un échantillon de taille 64 d'une population normale d'espérance inconnue μ et de variance 1. Déterminer le test uniformément le plus puissant, au niveau de signification 0.10, pour les hypothèses

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 0 \\ H_1 : \mu < 0 \end{cases} .$$

Tracer le graphe de sa fonction puissance.