

Solution de l'exercice 4 de la Série N°2

Exercice 4. Soit X une population normale d'espérance inconnue μ et de variance 4. On prélève un échantillon de taille 16 pour réaliser le test

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 10 \\ H_1 : \mu > 10 \end{cases}.$$

1. Construire le test uniformément le plus puissant au niveau $\alpha = 0.05$.
2. Déterminer sa fonction puissance, puis tracer son graphe.
3. Si $\mu = 12$, calculer le risque de deuxième espèce.

Solution. 1) Il s'agit de tester une hypothèse simple contre une hypothèse composite. Nous allons appliquer encore une fois le Lemme de Neyman-Pearson qui reste valable pour ce cas. Le rapport de vraisemblance est

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{\prod_{i=1}^{16} \frac{1}{\sqrt{2 \times 4}} \exp -\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \mu}{2} \right)^2}{\prod_{i=1}^{16} \frac{1}{\sqrt{2 \times 4}} \exp -\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - 10}{2} \right)^2} = \frac{\exp -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{16} \left(\frac{x_i - \mu}{2} \right)^2}{\exp -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{16} \left(\frac{x_i - 10}{2} \right)^2}, \text{ pour } \mu > 10.$$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{x_i - \mu}{2} \right)^2 - \left(\frac{x_i - 10}{2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{8} (10 - \mu) (\mu - 2x_i + 10). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{L_0} &= \exp \sum_{i=1}^{16} \left\{ -\frac{1}{8} (\mu - 10) (\mu - 2x_i + 10) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{8} (\mu - 10) (16\mu - 2s + 160) \right\}, \text{ où } s = \sum_{i=1}^{16} x_i. \end{aligned}$$

En d'autres termes

$$\frac{L_1}{L_0} = \exp \left\{ -\frac{1}{8} (\mu - 10) \left(16\mu - \frac{\bar{x}}{8} + 160 \right) \right\}, \text{ où } \bar{x} = \frac{s}{16}.$$

Ainsi la région critique est

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_{16}) \in \mathbb{R}^{16} : \exp \left\{ -\frac{1}{8} (\mu - 10) \left(16\mu - \frac{\bar{x}}{8} + 160 \right) \right\} \geq k \right\}.$$

On doit supposer $k > 0$, car le rapport de vraisemblance $L_1/L_0 > 0$. Il est évident que la dernière inégalité implique que

$$-\frac{1}{8} (\mu - 10) \left(16\mu - \frac{\bar{x}}{8} + 160 \right) \geq \log k$$

Comme $\mu > 10$, alors $-(\mu - 10)/8 < 0$, ce qui implique

$$16\mu - \frac{\bar{x}}{8} + 160 \leq -\frac{8 \log k}{\mu - 10},$$

par conséquent $\bar{x} > c$ où $c := \frac{64 \log k}{\mu - 10} + 1280 \times +128\mu$. La région de rejet peut être alors réécrite comme suit

$$W = \{(x_1, \dots, x_{16}) \in \mathbb{R}^{16} : \bar{x} \geq c\},$$

où c est telle que $\mathbf{P}_0(\bar{X} > c) = \alpha = 0.05$. Sous H_0 , nous avons $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(10, 4/16) \equiv \mathcal{N}(10, 1/4)$, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0(\bar{X} > c) &= \mathbf{P}_0\left(\frac{\bar{X} - 10}{\sqrt{1/4}} \geq \frac{c - 10}{\sqrt{1/4}}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(Z \geq \frac{c - 10}{1/2}\right) = 1 - \mathbf{P}(Z \leq 2(c - 10)) = 0.05, \end{aligned}$$

ou $\mathbf{P}(Z \leq 2(c - 10)) = 1 - 0.05 = 0.95$, en d'autres termes, $2(c - 10) = \Phi^{-1}(0.95) = 1.64$, ce qui est équivalent à $c = 10.82$. Ainsi le test le plus puissant est

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} \geq 10.82 \\ 0 & \text{si } \bar{x} < 10.82 \end{cases}$$

2) La fonction puissance est définie par

$$\pi(\mu) = \mathbf{P}(\bar{X} \geq 10.82 \mid \mu \geq 10) = \begin{cases} \alpha(\mu) & \text{pour } \mu = 10 \\ 1 - \beta(\mu) & \text{pour } \mu > 10 \end{cases}$$

On note que $\alpha(10) = \mathbf{P}_0(\bar{X} \geq 10.82) = \alpha = 0.05$. D'un autre côté, on

$$\begin{aligned} 1 - \beta(\mu) &= \mathbf{P}(\bar{X} \geq 10.82 \mid \mu > 10) = \mathbf{P}_1(\bar{X} \geq 10.82) \\ &= \mathbf{P}_1\left(\frac{\bar{X} - \mu}{1/2} \geq \frac{10.82 - \mu}{1/2}\right) = \mathbf{P}(Z \geq 2(10.82 - \mu)) \\ &= 1 - \Phi(2(10.82 - \mu)). \end{aligned}$$

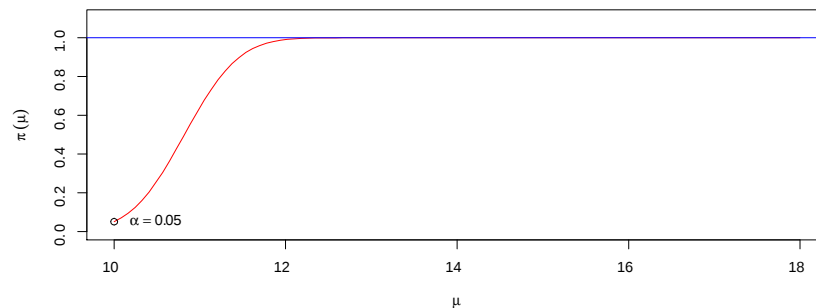
Ainsi la fonction puissance est

$$\pi(\mu) = \begin{cases} 0.05 & \text{pour } \mu = 10 \\ 1 - \Phi(2(10.82 - \mu)) & \text{pour } \mu > 10. \end{cases}$$

Rappelons que la fonction de répartition de la loi normale Φ est une fonction croissante, par conséquent la fonction

$$\mu \rightarrow 1 - \Phi(2(10.82 - \mu)),$$

est de même une fonction croissante. Le graphe de la fonction $\mu \rightarrow \pi(\mu)$ est le suivant:



3) Le risque de deuxième espèce

$$\begin{aligned} \beta &= 1 - \pi(12) = \Phi(2(10.82 - 12)) = \Phi(-2.36) \\ &= 1 - \Phi(2.36) = 1 - 0.99 = 0.01 = 1\%. \end{aligned}$$

C'est à dire le risque de garder H_0 alors que H_1 est vraie égale à 1% (on ne perd rien si on reste dans H_0).