جامعة محمد خيضر ( بسكرة)
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية والتسيير
قسم العلوم التجارية

السنة الجامعية: 2024/2023
المستوى: أولى ماستر تسويق
مقياس: الأساليب الكمية في التسويق 1

**حل سلسلة تمارين رقم (05) حول: تسويق الخدمة - نظرية خطوط الانتظار-**

## التمرين الأول:

يرغب صاحب مطعم للوجبات السريعة في تقديم الوجبات للعملاء بسرعة شديدة، إلا أنه في بعض الأوقات يتزايد عدد العملاء بحثيث لا يستطيع المضيفين تقديم الخدمة بسرعة، وبالتالي ينتظر العملاء في صف لكي يحصلوا على طلباتهم، ورغبة من صاحب المطعم في حل المشكلة، قام بتحليل البيانات الخاصة بوصول العملاء وزمن الخدمة، فوجد أن معدل الوصول 45 عميل/ الساعة في المتوسط، وأن المضيف الواحد يستطيع خدمة 60 عميل/ الساعة في المتوسط.

المطلوب:

1. أوجد خصائص التشغيل .
2. علق على النتائج مبينا مشكلة الانتظار التي يعاني منها مطعم الوجبات السريعة.
3. ماهي المقترحات التي يمكن أن تقدمها لصاحب المطعم لتحسين الخدمة.

**الحل:**

متوسط عدد العملاء القادمين في الدقيقة: $\lambda = 45/60 = 0,75$ (0.75 عميل/ الدقيقة)

معدل تقديم الخدمة في الدقيقة: $\mu = 60/60 = 1$ (1 عميل/ الدقيقة)

**وصول الزبائن يتبع توزيع بواسون: $P(x) = \lambda^x e^{-\lambda} / x!$**

احتمال عدم وصول أي عميل للمطعم في الدقيقة: $P(x=0) = (0,75)^0 e^{-0,75} / 0! = e^{-0.75} = 0,4724 = 47,24\%$

احتمال وصول 1 عميل للمطعم في الدقيقة: $P(x=1) = (0,75)^1 e^{-0,75} / 1! = 0,75\, e^{-0.75} = 0,3543 = 3543\%$

احتمال وصول 2 عميل للمطعم: $P(x=2) = (0,75)^2 e^{-0,75} / 2! = 0,1329 = 13,29\%$

احتمال وصول 3 عملاء في الدقيقة: $P(x=3) = (0,75)^3 e^{-0,75} / 3! = 0,0332 = 3,32\%$

احتمال وصول 4 عملاء للمطعم في الدقيقة: $P(x) = (0,75)^4 e^{-0,75} / 4! = 0,006 = 0,6\% \approx 0$

نلاحظ أن معدل وصول العملاء للمطعم وفق قانون بواسون يتناقص مع زيادة عدد العملاء، حتى يصل إلى احتمال صفر تقريبا عند 4 عملاء فأكثر، لذا يسمى توزيع بواسون قانون الأعداد الصغيرة.

**زمن الخدمة T يخضع للتوزيع الأسي: $P(T \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$**

احتمال تقديم الخدمة في زمن أقل من 0.5 دقيقة: $P(T \leq 0,5) = 1 - e^{-1(0,5)} = 1 - 0,6065 = 0,3935 = 39,35\%$

احتمال تقديم الخدمة في زمن أقل من 1 دقيقة: $P(T \leq 1) = 1 - e^{-1(1)} = 1 - 0,3679 = 0,6321 = 63,21\%$

احتمال تقديم الخدمة في زمن أقل من 2 دقيقة: $P(T \leq 2) = 1 - e^{-1(2)} = 1 - 0,1353 = 0,8647 = 86,47\%$

احتمال تقديم الخدمة في زمن أقل من 3 دقيقة: $P(T \leq 3) = 1 - e^{-1(3)} = 1 - 0,0498 = 0,95 = 95\%$

نلاحظ أن كل العملاء تقريبا ( 95%) يتم خدمتهم وتقديم الوجبات لهم في فترة لا تتجاوز 3 دقائق.

**1. خصائص التشغيل:**

**أ. احتمال وجود عملاء في المطعم (المطعم يعمل):**

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,75}{1} = \mathbf{0,75 = 75\ \%}$$

يوجد عملاء في المطعم (مهما كان عددهم) يساوي 75%، وه يدل على مستوى الاستخدام والنشاط في المطعم.

**ب. احتمال عدم وجود أي عملاء في المطعم ( المطعم لا يعمل):**

$$P_0= 1- P= 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1- \frac{0,75}{1} = \mathbf{0,25= 25\ \%}$$

احتمال عدم اشتغال المطعم (عدم وجود عملاء) يساوي 25%، أي يبقى العامل عاجز عن توفير الوجبات لربع الوقت، وهي نسبة مرتفعة في ظل المنافسة الحادة بين مطاعم الوجبات السريعة.

**ج. متوسط عدد العملاء صف الانتظار:**

$$Lq= \frac{\lambda^2}{\mu\,(\mu - \lambda)} = \frac{0,75^2}{1\,(1 - 0,75)} = \mathbf{2,25}$$

متوسط عدد العملاء في صف الانتظار 2,25 ( 2 عميل تقريبا).

**د. متوسط عدد العملاء في النظام (المطعم):**

$$Ls= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0,75}{1 - 0,75} = 3$$

متوسط عدد العملاء في النظام (المطعم) يساوي 3، وهو يضم 2,25 عميل في صف الانتظار، و0,75 عميل في مركز تقديم الخدمة.

**ملاحظة:** يمكن حساب متوسط عدد العملاء في النظام (المطعم) Ls بطريقة أخرى هي:

$$Ls= Lq + \frac{\lambda}{\mu} = 2,25 + \frac{0,75}{1} = \mathbf{3}\ \text{دقيقة}$$

**هـ. متوسط الزمن الذي يستغرقه العميل في صف الانتظار(زمن الانتظار):**

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu\,(\mu - \lambda)} = \frac{0,75}{1\,(1 - 0,75)} = \mathbf{3}\ \text{دقيقة}$$

الزمن المتوسط لانتظار كل عميل في صف الانتظار قبل حصوله على الخدمة يساوي 3 دقيقة.

متوسط الزمن الذي يستغرقه العميل في المطعم (انتظار+خدمة):

$$Ws= \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1 - 0,75} = \mathbf{4}\ \text{دقيقة}$$

**ملاحظة:** يمكن حساب العدد المتوسط للعملاء في النظام (المطعم) Ws:

$$Ws= Wq + \frac{1}{\mu} = 3 + \frac{1}{1} = \mathbf{3}\ \text{دقيقة}$$

**التعليق:**

- ينتظر العملاء في المتوسط 3 دقائق قبل الحصول على الطلب، وهو زمن مبالغ فيه في تجارة تعتمد على الخدمة السريعة، وتعتبر سرعة الخدمة مصدر رئيس للميزة التنافسية.
- كما أن متوسط عدد العملاء في صف الانتظار 2.25 عميل، مما يؤدي إلى استياء (عدم رضا) العملاء، واحتمال تركهم صف الانتظار، خاصة إذا كانوا على عجلة من أمرهم، حيث هذا هو السبب الرئيس في لجوئهم لمطاعم الوجبات السريعة، مما يجعل سرعة الخدمة معيار أساسي في تحقيق رضاهم وولائهم.
- كما أن 75% من العملاء يجب أن ينتظروا من أجل الخدمة، مما يعني أن نشاط التشغيل يبقى عاطل في نظر العملاء بنسبة 25% من الوقت، فالانتظار بالنسبة للعملاء يعني أن المطعم لا يقوم بتقديم الخدمة، أي كأنه عاطل، ولا يهمهم إن كان في ذلك الوقت يخدم عملاء آخرين.

إن النقائص السابقة تعني أن نظام الخدمة في المطعم يعاني من نقائص تؤثر على تنافسيته اتجه المطاعم الأخرى، وعلى رضا العملاء وولائهم، وبالتالي انخفاض المبيعات والأرباح، وهذا كله يتطلب تحسين نظام الخدمة من أجل تخفيض الانتظار.

**الحلول المقترحة لتحسين الخدمة وتخفيض الانتظار:**

- زيادة معدل الخدمة $\mu$ من خلال إحداث تغيير ابتكاري في تصميم العمل أو استخدام تكنولوجيا جديدة، بحيث يتم إعداد الوجبات السريعة وتسليمها للعملاء في فترة أقصر من 1 دقيقة (أي أقل من 60 عميل في الساعة).
- إضافة قنوات خدمة جديدة، من خلال توظيف عاملين جدد ووسائل جديدة، بحيث يمكن خدمة عدد أكبر من العملاء في نفس الوقت.

## التمرين الثاني:

محطة بنزين تتكون من مضخة واحدة يتم بموجبها تقديم الخدمة إلى الزبائن من أصحاب السيارات، معدل وصول السيارات إلى المحطة هو 3 سيارات في الدقيقة، بينما معدل تقديم الخدمة هو 4 سيارات في الدقيقة.

المطلوب: 1. ماهي احتمالات الوصول لغاية 3 سيارات في النظام؟

2. ماهو متوسط عدد السيارات في النظام وفي خط الانتظار.

3. ماهو متوسط الوقت الذي تستغرقه السيارة في النظام وفي خط الانتظار.

**الحل:**

معدل الوصول 3 =$\lambda$ سيارة في الدقيقة؛ معدل الخدمة 4 =$\mu$ سيارة في الدقيقة. وهذا يعني أن معدل الخدمة أعلى من معدل الوصول، ومنه الشرط $\lambda<\mu$ محقق.

احتمال وجود سيارات في المضخة (النظام يعمل): $p= 3/4 = 0,75$

احتمال عدم وجود سيارات في المضخة (النظام عاطل): $p_0= 1 – 0,75= 0,25$

1. احتمال وجود السيارة الأولى في النظام:

$$P_n= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \Rightarrow \quad P_1= \left(\frac{3}{4}\right)^1 \times 0,25 = 0,19$$

احتمال وجود السيارة الثانية في النظام:

$$P_2= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times 0,25 = 0,14$$

احتمال وجود السيارة الثالثة في النظام:

$$P_3= \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 0,25 = 0,105$$

متوسط عدد السيارات في النظام Ls:

$$Ls= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad \Rightarrow \quad Ls= \frac{3}{4 - 3} = 3$$

إذن في محطة البنزين( سواء في خط الانتظار أو في مرحلة التزود [illegible] في المتوسط ث[illegible]

متوسط عدد السيارات في خط الانتظار Lq:

$$Lq= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu – \lambda)} \quad \Rightarrow \quad Lq= \frac{3^2}{4(4 – 3)} = 2,25 \qquad \text{أو} \qquad Lq= P \times Ls = (0,75) \times 3= 2 ,25$$

توجد في صف الانتظار في المتوسط 2,25 سيارة في الدقيقة.

متوسط الوقت الذي تستغرقه السيارة في النظام Ws:

$$Ws= \frac{1}{\mu - \lambda} \quad \Rightarrow \quad Ws= \frac{1}{4 - 3} = 1 \text{ دقيقة}$$

تقضي كل سيارة في المتوسط 1 دقيقة في محطة البنزين، سواء في صف انتظار دورها أو في مرحلة التزود بالوقود.

متوسط الوقت الذي تستغرقه السيارة في خط الانتظار Wq:

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \Rightarrow Wq = \frac{3}{4(4-3)} = \mathbf{0,75} \text{ دقيقة}$$ أو $$Wq = P \times Ws = (0,75) \times 1 = \mathbf{0,75} \text{ دقيقة}$$

تقضي طل سيارة 0,75 دقيقة (أي 45 ثانية) في المتوسط في صف الانتظار من أجل التزود بالوقود.

## التمرين الثالث:

يعمل أحد محلات تقديم المأكولات على تقديم الخدمة بواسطة عامل واحد، وكان نمط وصول الزبائن يتبع توزيع بواسون، وبمعدل وصول يساوي 10 زبائن في الساعة، ومعدل تقديم الخدمة قائم على أساس من يصل أولا يحصل على الخدمة أولا، يتمتع المحل بسمعة طيبة ، وقد تم حساب زمن الخدمة الذي يخضع للتوزيع الأسي بمقدار 4 د/ الزبون.

المطلوب:

1. حساب معامل الاستخدام P.
2. حساب متوسط عدد الزبائن في النظام وفي خط الانتظار.
3. حساب الزمن اللازم للزبون في النظام وفي خط الانتظار.

**الحل:**

معدل وصول الزبائن: $\lambda = 10$

حساب معدل خدمة الزبائن في المحل (كم زبون يتم خدمته) في الساعة:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1 زبون} \longrightarrow \text{4 دقيقة} \\ \mu \text{ زبون} \longrightarrow \text{1 ساعة = 60 دقيقة} \end{array}\right\} \quad \mu = \frac{\text{1 زبون} \times \text{60 دقيقة}}{\text{4 دقيقة}} = \text{15 زبون في الساعة}$$

يستطيع المحل خدمة 15 زبون في الساعة.

**1. حساب معامل الاستخدام:**

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = \mathbf{0,66 = 66\ \%}$$

وهذا يعني أن المحل يبقى مشغولا بحدود 66 % من الوقت المتوفر لتقديم الخدمة.

**2. حساب متوسط عدد الزبائن في النظام (في المحل سواء في صف الانتظار أو الحصول على الخدمة):**

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \Rightarrow Ls = \frac{10}{15-10} = \mathbf{2}$$

رغم Ls يحسب بدون وحدة، لأنه حاصل وحدة البسط: زبون/ ساعة، ووحدة المقام: زبون/ ساعة يتم اختزالهما، إلا أن Ls يعبر عن عدد الزبائن في المتوسط.

**3. حساب متوسط عدد الزبائن في خط الانتظار:**

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \Rightarrow Lq = \frac{10^2}{15(15-10)} = \mathbf{1,33}$$ أو $$Lq = P \times Ls = (0,66) \times 2 = 1,33$$

يقف في الصف انتظارا للخدمة في المتوسط 1.33 زبون (الرقم هو متوسط لذا يظهر بالفاصلة).

**4. حساب الزمن الذي يجب أن يستغرقه الزبون في خط الانتظار:**

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \Rightarrow Wq = \frac{10}{15(15-10)} = \mathbf{0,133} \text{ ساعة} = \mathbf{0,1333 \times 60 = 8} \text{ دقيقة}$$

يبقى كل زبون ينتظر في المتوسط 8 دقائق قبل أن يحصل على الخدمة.

**5. حساب الزمن الذي يجب أن يستغرقه الزبون في المحل( الانتظار والحصول على الخدمة معا):**

$$Ws=\frac{1}{\mu-\lambda} \Rightarrow Ws=\frac{1}{15-10}=\mathbf{0,2}\ \textbf{ساعة} = \mathbf{0,2\times 60 = 12}\ \textbf{دقيقة}$$

إذن يستغرق الزبون في المتوسط 12 دقيقة في المحل، منها 8 دقائق في الانتظار، و4 دقائق في الحصول على الخدمة.

## التمرين الرابع:

محطة تعبئة وقود تتكون من مضخة واحدة لتقديم الخدمة، وكان معدل وصول السيارات إليها يتبع توزيع بواسون بمعدل 10 سيارة/ ساعة، أما تقديم الخدمة فيتبع التوزيع الأسي بمعدل 3.75 دقيقة/ سيارة.

المطلوب:

1. حساب معامل الخدمة واحتمال عدم وجود سيارة في النظام واحتمال وجود سيارتين في النظام.
2. ماهو متوسط عدد السيارات في المحطة وفي خط الانتظار.
3. ماهو احتمال وجود (سيارة واحدة، سيارتين) في النظام.
4. ماهو متوسط الوقت الذي تستخدمه السيارة في النظام وفي خط الانتظار.

**الحل:**

معدل وصول السيارات: $\lambda=10$ سيارة في الساعة؛ تقديم الخدمة: 3,75 دقيقة لكل سيارة.

في البداية يتم توحيد الوحدات الزمنية لكل من معدل الوصول ومعدل الخدمة، بحيث تصبح جميعها محسوبة بالساعة، يتم ذلك بالنسبة لمعدل تقديم الخدمة، وذلك كما يلي:

وعليه فإن:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1 سيارة} \longrightarrow \text{3,75 دقيقة} \\ \mu\ \text{زبون} \longrightarrow \text{1 ساعة = 60 دقيقة} \end{array}\right\} \quad \mu=\frac{\text{1 زبون} \times \text{60 دقيقة}}{\text{3,75 دقيقة}} = \text{16 زبون في الساعة}$$

إذن معدل تقديم الخدمة: $\mu=16$ سيارة/ ساعة.

**1. حساب معامل الاستخدام(احتمال وجود سيارات في النظام):**

$$P=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{10}{16}=\mathbf{0,625 = 62,5\ \%}$$

يعني أن هناك احتمال 62.5% أن توجد سيارات في المحطة في مرحلة الحصول على الخدمة.

**2. احتمال عدم وجود سيارات في النظام( معدل عدم التشغيل أو التعطل):**

$$p_0= 1 - 0,625= 0,375 = 37,5\%$$

**لدينا قانون احتمال وجود n سيارة في النظام: $p_n= p^n p_0$**

ومنه: احتمال وجود سيارة واحدة في النظام: $p_1= p^1 p_0 = (0,625)^1 (0,375)= 0,234= \mathbf{23,40\%}$

ومنه: احتمال وجود سيارتان في النظام: $p_1= p^n p_0 = (0,625)^2 (0,375)= 0,146= \mathbf{14,60\%}$

**3. إيجاد متوسط الوقت الذي تستغرقه السيارة في النظام( في محطة الوقود):**

$$Ws=\frac{1}{\mu-\lambda} \Rightarrow Ws=\frac{1}{16-10} \approx \mathbf{0,17}\ \textbf{سا} = \mathbf{0,17\times 60 = 10,2}\ \textbf{دقيقة}$$

**4. متوسط الوقت الذي تستغرقه السيارة في خط الانتظار:**

$$Wq=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \Rightarrow Wq=\frac{10}{16(16-10)}=\mathbf{0,104}\ \textbf{ساعة} = \mathbf{0,104\times 60 \approx 6}\ \textbf{دقيقة}$$

تقضي السيارة في محطة الوقود 10.2 دقيقة، منها 6 دقيقة في صف الانتظار، والباقي في عملية التزود بالوقود (الحصول على الخدمة)

## التمرين الخامس:

قررت إحدى مراكز تصليح الثلاجات فتح ورشة جديدة، وقد تم الإعلان عن التوظيف بوسائل الإعلان المتاحة، حيث تضمن الإعلان طلب استخدام مصلح واحد يلتزم بتقديم الخدمة ضمن الورشة الجديدة، تقدم للعمل شخصان هما سند وأحمد، حيث:

طلب سند أجرا مقداره 900 دج/ اليوم، وكانت لديه إمكانية على التصليح 4 ثلاجة/ ساعة.

طلب أحمد أجرا مقداره 1500 دج/ اليوم، وكانت قدرته على التصليح هي 6 ثلاجة/ سا.

إذا علمت أن معدل وصول الثلاجات إلى مركز تقديم الخدمة هو ثلاجة واحدة كل 20 د، وإذا علمت أيضا أن ساعات العمل اليومية في الورشة هي 6 ساعة، وأن تكلفة انتظار الثلاجة هي 250 دج (تكلفة الفرص البيعية الضائعة بسبب الانتظار الذي يجعل الزبائن يتجنبون تصليح ثلاجاتهم في الورشة).

المطلوب:

باعتبارك مدير لهذا المركز ماهو قرارك، هل هو مع تعيين سند أم أحمد؟

**الحل:**

حساب معدل وصول الثلاجات $\lambda$:

معدل الوصول: ثلاجة لكل 20 د، يتم تحويله إلى: ... ثلاجة/ ساعة:

1 ثلاجة ⟵ 20 دقيقة

$\lambda$ ثلاجة ⟵ 1 ساعة = 60 دقيقة

$$\lambda = \frac{\text{1 ثلاجة} \times \text{60 دقيقة}}{\text{20 دقيقة}} = \text{3 ثلاجة/ الساعة}$$

ومنه: $\lambda = 3$ (أي 3 ثلاجة لكل ساعة).

أما بخصوص تفاضل الخدمة لكل بديل فهي:

البديل الأول ( سند): معدل الخدمة: $\mu$= 4 ثلاجة/ سا، و: أجر 900 دج/ اليوم

البديل الثاني ( أحمد): $\mu$= 6 ثلاجة/ سا، و: أجر 1500 دج/ اليوم

**حساب التكلفة للانتظار والخدمة:**

لدينا $TC= CW + CS$ أي: التكلفة الكلية= تكلفة الانتظار + تكلفة الخدمة

تكلفة الانتظار CW= عدد الثلاجات في النظام (Ls) × عدد ساعات العمل في اليوم × تكلفة الانتظار لكل ثلاجة.

عدد ساعات العمل اليومي معطاة: 6 ساعة/ اليوم. وتكلفة الانتظار لكل ثلاجة معطاة: cw= 250 دج/ ثلاجة

نستخدم عدد الثلاجات في النظام LS، وليس عدد الثلاجات في صف الانتظار (Lq) في حساب تكلفة الانتظار، لأنه يعبر أكثر عن تكلفة الانتظار. فحتى أثناء تصليح الثلاجة، فإن الزبون يكون في حالة انتظار، خاصة إذا طالت مدة التصليح.

**المصلح الأول (سند):**

نحسب عدد الثلاجات في النظام (الورشة) بالنسبة لسند:

$$Ls= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \Longrightarrow Ls= \frac{3}{4 - 3} = \textbf{3 ثلاجة/ ساعة}$$

ومنه: تكلفة الانتظار بالنسبة لتوظيف سند: 4500 دج =250× 6 × 3 =CW

ولدينا تكلفة الخدمة= الأجر اليومي للمصلح سند = 900 دج/ يوم

ومنه التكلفة الكلية بالنسبة لتوظيف سند: 5400 دج/ اليوم =900 +4500 =TC

**المصلح الثاني (أحمد):**

نحسب عدد الثلاجات في النظام Ls بالنسبة لأحمد:

لدينا معدل تقديم الخدمة: $\mu$= 6 ثلاجة/ ساعة؛ ومعد وصول الثلاجات: $\lambda$= 3 ثلاجة/ ساعة

$$Ls=\frac{\lambda}{\mu-\lambda} \Longrightarrow Ls=\frac{3}{6-3}=\textbf{1 ثلاجة/ سا}$$

ومنه تكلفة الانتظار: دج 1500 =250× 6 × 1 =Cw

;ولدينا تكلفة الخدمة (أجر المصلح أحمد): CS= 1500 دج/ اليوم.

ومنه التكلفة الكلية بالنسبة لتوظيف أحمد: دج 3000 =1500 + 1500 =Tc

إذن من الأفضل تشغيل أحمد لأنه أقل تكلفة، حيث يكلف في اليوم الواحد 3000 دج، مقارنة بسند الذي يكلف 5400 دج في اليوم، والسبب أن أحمد يستطيع إصلاح عدد أكبر من الثلاجات في الساعة (6) مقارنة بسند (4 فقط)، مما جعل تكلفة الانتظار في حالة أحمد أقل ( 1500 دج لأحمد مقارنة بـ 4500 دج لسند)، مما رفع التكلفة كثيرا عند توظيف سند، رغم أن أجره اليومي منخفضا مقارنة بأحمد ( 900 دج مقابل 1500 دج)، وهذا ما يبين أهمية إنتاجية العامل وأثرها في مشكلة الانتظار وبالتالي تأثيرها على تكاليف الانتظار.

## التمرين السادس:

في إحدى محطات تصليح السيارات، اتضح أن فترة تصليح السيارة الواحدة مختلفة عن الفترات المطلوبة للسيارات الأخرى، وقد اتضح أن زمن التصليح يتبع التوزيع الأسي بمعدل 5 دقيقة/ سيارة، وأن السيارات تصل بصورة عشوائية وحسب توزيع بواسون بمعدل 8 سيارة/ ساعة، وكانت تكلفة انتظار السيارة الواحدة 5000 دج، وتكلفة التصليح 2000 دج.

المطلوب:

1. متوسط عدد السيارات في النظام.
2. متوسط زمن انتظار السيارة في النظام.
3. متوسط عدد السيارات في خط الانتظار.
4. التكلفة الكلية لتصليح سيارة واحدة.

الحل:

معدل وصول السيارات إلى محطة التصليح والدخول في صف الانتظار: $\lambda$= 8 سيارة/ الساعة.

تقديم خدمة التصليح: 5 دقيقة/ سيارة. نحو هذه القيمة إلى: .... سيارة/ الساعة، أي معدل تقديم الخدمة $\mu$

1 سيارة ⟵ 5 دقيقة

$\mu$ ثلاجة ⟵ 1 ساعة = 60 دقيقة

$$\mu=\frac{\text{1 سيارة} \times \text{60 دقيقة}}{\text{5 دقيقة}}=\text{12 سيارة/ الساعة}$$

إذن معدل تقديم الخدمة: $\mu$ = 12 سيارة/ سا.

**1. متوسط عدد السيارات في النظام (محطة التصليح سواء في صف الانتظار أو في خدمة التصليح) Ls:**

$$Ls=\frac{\lambda}{\mu-\lambda} \Longrightarrow Ls=\frac{8}{12-8}=\textbf{2 سيارة/ ساعة}$$

إذن يوجد في المحطة في المتوسط 2 سيارة في الساعة إما في الانتظار أو الخدمة.

**2. متوسط زمن انتظار السيارة في النظام (محطة التصليح) Ws:**

$$Ws=\frac{1}{\mu-\lambda} \Longrightarrow Ws=\frac{1}{12-8} \approx \textbf{0,25 سا} = \textbf{0,25} \times \textbf{60} = \textbf{15 دقيقة}$$

إذن تبقى كل سيارة 15 دقيقة في المتوسط في محطة التصليح ، وهذا يشمل زمن الانتظار وزمن الخدمة معا.

**3. متوسط عدد السيارات في خط الانتظار:**

$$Lq=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \Rightarrow Lq=\frac{8^2}{12(12-8)}$$ **=1,3 سيارة**

**4. تكلفة الخدمة الكلية:**

تكلفة انتظار السيارة الواحدة 5000 دج، ومنه تكلفة الانتظار CW= زمن الانتظار Ls × تكلفة انتظار سيارة واحدة:

$$CW= 0,25 \times 5000= 1250$$

تكلفة الخدمة للسيارة الواحدة (التصليح) CS: 2000 دج من المعطيات.

ومنه: التكلفة الكلية: $CT= CW + CS= 1250 + 2000= 3250$

التكلفة الكلية لنظام الانتظار 3250 دج، وهي تشمل تكلفة الانتظار 1250 دج/سيارة، وتتمثل في الفرص البيعية الضائعة بسبب مشكلة الانتظار لمدة 15 دقيقة في المتوسط، وتكلفة خدمة التصليح الفعلية 2000 دج/ سيارة، وهذا يعني أن الانتظار يرفع تكلفة المحطة، مما يتطلب تخفيضها من خلال علاج مشكلة الانتظار.

## التمرين السابع:

في إحدى الورش الإنتاجية تصل الأجزاء المكونة للمنتج إلى مركز التجميع بصورة عشوائية، حيث يقوم مجموعة من العمال بعملية التجميع المطلوبة، وقد بينت الدراسة التي أجريت في الورشة أن متوسط الزمن بين وصول قطعتين متتاليين 60 ثانية، كما أن متوسط الذي تستغرقه عملية التجميع هو 50 ثانية.

المطلوب:

حساب المؤشرات الخاصة بخط الانتظار هذا، علما أن الورشة تعتبر قناة خدمة واحدة، وأن الوصول يخضع التوزيع البواسوني، وزمن الخدمة، يخضع للتوزيع الأسي.

**الحل:**

لدينا: متوسط الزمن بين وصول قطعتين متتاليتين إلى خط التجميع: 60 ثانية، وهذا يعني وصول قطعة إلى خط التجميع كل 60 ثانية، ومنه معدل وصول القطع $\lambda$:

1 قطعة ⟵ 60 ثانية

$\lambda$ قطعة ⟵ 1 دقيقة = 60 ثانية

$$\lambda=\frac{1\ \text{قطعة} \times 60\ \text{ثانية}}{60\ \text{ثانية}}=1$$

ومنه: $\lambda= 1$ ( معدل وصل القطع إلى خط التجميع: 1 قطعة/ الدقيقة).

ولدينا: مدة الخدمة (تجميع القطع في منتج واحد): 50 ثانية، ومنه معدل الخدمة $\mu$= ... منتج مجمع/ دقيقة.

تجميع 1 منتج ⟵ 50 ثانية

تجميع $\mu$ منتج ⟵ 1 دقيقة = 60 ثانية

$$\Rightarrow \mu=\frac{1\ \text{منتج} \times 60\ \text{ثانية}}{50\ \text{ثانية}}=1\ \text{قطعة/ الدقيقة}$$

ومنه: $\mu= 1,2$ (معدل خدمة التجميع وإنتاج المنتجات: 1.2 منتج/ الدقيقة).

**الآن نحسب مؤشرات التشغيل في خط التجميع (مؤشرات نظام الانتظار)**

**1. معامل الاستخدام: احتمال أن تكون الورشة في حالة إنتاج ( وصول القطع وتجميعها وإنتاج المنتج النهائي) P:**

$$P_0=\frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow P_0=\frac{1}{1,2}=0.8333\approx 0,83\approx 83\%$$

إذن: الورشة تعمل (تجميع القطع وإنتاج المنتج) في 83% من زمن الإنتاج، والباقي يضيع في مرحلة الانتظار وتحرك القطع باتجاه العمال لتناولها وتجميعها.

**.2 معامل عدم الاستخدام أو التعطل:**

هو احتمال أن تكون قناة الخدمة (الورشة) متعطلة بانتظار وصول القطع للتجميع وتكوين المنتج $P_0$:

وهي تمثل أيضا معامل عدم الاستخدام، بسبب احتمال تأخر وصول القطع إلى عمال التجميع:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow P_0 = 1 - \frac{1}{1,2} = 1 - 0.8333 \approx 0,17 \approx 17\%$$

إذن: احتمال عدم وجود في النظام( خط الانتظار أو مرحلة التجميع)، وبالتالي نظام التجميع لا يشتغل هو 17% تقريبا. وهذا يعني أن الورشة تكون معطلة في 17% من زمن الإنتاج.

ونلاحظ أن مجوع معدل الاستخدام P ومعامل التعطل $P_0$ يساوي 1: $P + P_0 = 1$

**.3 متوسط عدد القطع في النظام (خط الانتظار والتجميع معا):**

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \Rightarrow Ls = \frac{1}{1,2 - 1} = \textbf{5 قطعة/ ساعة}$$

يوجد في المتوسط 5 قطع أو أجزاء في خط التجميع( سواء في صف الانتظار أو في مرحلة التجميع النهائي).

**.4 متوسط عدد القطع في خط الانتظار( تتحرك على السير المتحرك في انتظار التجميع):**

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \Rightarrow Lq = \frac{1^2}{1,2(1,2 - 1)} = \mathbf{4,17} \quad \text{أو} \quad Lq = P \times Ls = (0,8333) \times 5 = 4,17$$

إذن متوسط عدد القطع في خط انتظار قبل عملية التجميع والتركيب لتكوين المنتج يساوي 4.17 قطعة/ الساعة تقريبا.

**.5 متوسط زمن التدفق في النظام بالدقائق (زمن الانتظار والتجميع معا) Ws:**

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} \Rightarrow Ws = \frac{1}{1,2 - 1} = \mathbf{5}$$

تقضي كل قطعة من المنتج 5 دقائق في المتوسط في نظام التجميع في الورشة ( مرحلة الانتظار+مرحلة التجميع).

**.6 متوسط الزمن المتوقع لانتظار القطع (في صف انتظار التجميع) Wq:**

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \Rightarrow Wq = \frac{1}{1,2(1,2 - 1)} = \mathbf{4,17\ mn} \qquad Wq = P \times Ws = (0,8333) \times 5 = 4,17$$

إذن الزمن المتوقع الذي تكون فيه القطع في حالة انتظار لعملية التجميع يقدر بـ 4.17 دقيقة في المتوسط، مما يعني أن زمن التجميع يساوي 5- 4.17= 0.83 دقيقة≈ 50 ثانية تقريبا، وهي فترة تجميع المنتج المعطاة في نص التمرين.

**التعليق:**

إن المؤشرات التي تم حسابها أعلاه على غاية الأهمية بالنسبة للإدارة، فإذا فرضنا أن تكلفة تشغيل العامل الواحد في هذه الورشة: 500 دج/ سا، ومدة العمل اليومي 8 ساعة/ اليوم، وأن إدارة الورشة ترغب في معرفة جدوى توظيف عامل أو عمال آخرين، فإنها تستفيد من المؤشرات التي تم حسابها سابقا كما يلي:

الطاقة الإنتاجية المثلى للورشة هي تلك التي تجعل: مجموع تكلفة تعطل قناة الخدمة (التجميع) وتكلفة الانتظار أقل ما يمكن، ويمكن حساب تكلفة توقف العامل الواحد في اليوم كما يلي:

تكلفة توقف العامل= تكلفة توقف عامل في الساعة ×عدد ساعات العمل في اليوم× نسبة تعطل نظام التجميع

= 500 دج × 8 سا × 0.17 = 680 دج.

حيث:
تكلفة توقف العامل في الساعة= أجرة العامل لأنه يأخذ أجر ولا يعمل بسبب تعطل النظام (لعدم وصول القطع بسبب الانتظار)= 500 دج/ الساعة.
عدد ساعات العمل= 8 ساعة/ اليوم.
نسبة التعطل هي نسبة عدم الاستخدام: $P_0 = 0.17$
تكلفة الانتظار اليومية =متوسط عدد القطع في خط الانتظار× عدد ساعات العمل اليومي × تكلفة ساعة الانتظار
= 4.17 × 8 × 500= 166.80 دج.
متوسط عدد القطع في خط الانتظار( تتحرك على السير المتحرك في انتظار التجميع): Lq = 4,17 قطعة/ الساعة
وبمقارنة هاتين الكلفتين، نجد أن القرار الأمثل في هذه الحالة هو استخدام عمال آخرين، ويتم عدد العمال اللازم استخدامهم بإعادة حساب المؤشرات الخاصة بالنموذج مرة أخرى بافتراض زيادة عدد العمال، فإذا كانت التكلفة تبرر ذلك، يعاد حساب المؤشرات مرة ثالثة بعد زيادة عدد العمال عاملا ثانيا، وهكذا بحيث نصل إلى سلسلة من الإبدال العدد المطلوب إضافته من العمال، والتكلفة الكلية لكل بديل، ويتم في النهاية اختيار البديل ذو التكلفة الأقل.

## التمرين الثامن:

يحتوي متجر صغير على مخرج واحد مكون من حاسب وآلة الصندوق، ونظرا لازدياد حجم البيع، قرر صاحب المتجر إجراء دراسة لتحديد الطاقة المثلى لهذا المخرج، سواء من خلال توظيف عامل آخر أو فتح مخارج جديدة، وقد بينت الدراسة الأولية أن معدل وصول الزبائن يساوي 30 زبون/ ساعة، ومعدل الخدمة (محاسبة الزبائن) يساوي 35 زبون/ الساعة.
المطلوب:
حدد البديل الأفضل بالنسبة لصاحب المتجر: توظيف عامل جديد أو فتح قناة خدمة جديدة.

**الحل:**

من معطيات التمرين: $\lambda = 30$؛ $\mu = 35$ ؛ الوحدة زبون في الساعة.
نلاحظ أن الشرط $\lambda < \mu$ متحقق، والنظام ذو قناة خدمة واحدة (الحاسب وآلة الصندوق).
وبالتقيد بالافتراضات الخاصة بتوزيعات معدل الوصول والخدمة، فإن المؤشرات الخاصة بخط الانتظار يمكن حسابها على النحو التالي:

**1. معامل الاستخدام (احتمال وجود زبائن في صف الانتظار لدفع المشتريات:**

$$P = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow P = \frac{30}{35} = 0,857 \approx 85,70\%$$

إذن: احتمال وجود عملاء في نظام الانتظار لسداد المشتريات من المحل يساوي 85.70 %.

**2. احتمال عدم وجود زبائن في النظام (معامل عدم الاستخدام) $P_0$:**

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow P_0 = 1 - \frac{30}{35} = 1 - 0,857 \approx 0,143 \approx 14,30\%$$

إذن: احتمال عدم وجود زبائن في المتجر 14.30%، كما أن 85.7% من العملاء يجب أن ينتظروا في صف الانتظار حتى يحصلوا على الخدمة.

**3. متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام (المتجر: صف الانتظار + مركز الخدمة:**

$Ls = \lambda / (\mu - \lambda) = 30/(35-30) = 6$

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \Rightarrow Ls = \frac{30}{35-30} = \mathbf{6}$$

إذن: متوسط عدد الزبائن في المتجر في وحدة الزمن (الساعة): 6، سواء في صف الانتظار لأو الحصول على الخدمة ( الدفع للمحاسب والانصراف مع البضائع التي اشتروها).

**4. متوسط عدد الزبائن المتوقع في خط الانتظار( أمام محاسب الدفع):**

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \Longrightarrow Lq = \frac{30^2}{35(35-30)} = \mathbf{5{,}14} \quad \text{أو} \quad Lq = P \times Ls = (0{,}857) \times 6 = 5{,}14$$

إذن: متوسط عدد الزبائن في صف الانتظار لتسديد المشتريات من المتجر يساوي 4,17 تقريبا.

**5. الزمن الذي يستغرقه الزبون في النظام بالساعات:**

$$Ws = \frac{1}{\mu-\lambda} \Longrightarrow Ws = \frac{1}{30-35} = \mathbf{0{,}2}$$

إذن: في المتوسط يقضي كل زبون في عملية الانتظار والدفع 0.2 ساعة (12 دقيقة).

**6. الزمن الذي يستغرقه الزبون في خط الانتظار بالساعات:**

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \Longrightarrow Wq = \frac{30}{35(35-30)} = \mathbf{0{,}17\ mn} \qquad Wq = P \times Ws = (0{,}8333) \times 5 = 4{,}17$$

إذن: يستغرق كل زبون في المتوسط 0.17 ساعة (10 دقيقة) تقريبا في صف الانتظار من أجل دفع قيمة المشتريات من المتجر.

**التعليق:**

من المؤشرات أعلاه يتضح أن الزبون ينتظر فترة طويلة، سواء في صف الانتظار(10 دقائق)، أو في نظام دفع المشتريات ككل(12 دقيقة)، ولذلك فإن صاحب المتجر يفكر جديا في العمل على تخفيض أزمنة الانتظار من خلال أحد البديلين التاليين:

- توظيف عامل ثاني ليساعد العامل الموجود في نقطة الخروج (المحاسبة).
- إضافة مركز خروج جديد (قناة خدمة جديدة) في المتجر.

**البديل الأول: إضافة عامل ثاني في نقطة الخروج**

نفرض أن صاحب المتجر سيتحمل تكلفة إضافية جراء ذلك، قدرها 100 دج/ شهريا، وأن تكلفة الوقوف في خط الانتظار تمثل خسارة (فرصة ضائعة) قدرها 50 دج/ دقيقة على مدى الشهر، أي أنه كلما يزداد زمن الانتظار دقيقة واحدة، يؤدي إلى عزوف الزبائن عن الشراء، وبالتالي فقد قدر التاجر الخسارة الناتجة عن هذه الدقيقة بـ 50 دج/ الشهر، وعليه فإن إنقاص زمن الانتظار لمدة دقيقة واحدة، سيساعد على تجنب خسارة قدرها 50 دج/ شهر، ولنفرض الآن أن إضافة موظف جديد سيجعل معدل الخدمة يزداد ليصبح 40 زبونا بدلا من 30، وعلى هذا الأساس، نقوم بإعادة حساب **مؤشرات نظام الانتظار في حالة إضافة موظف جديد على النحو التالي:**

$\lambda = 30$ ; $\mu = 40$

$P_0 = 1 - (30/40) = 0{,}25$

$P = 30/40 = 0{,}75$

$Ls = \lambda / (\mu - \lambda) = 30/(40-30) = 3$

$Lq = \lambda^2 / [\mu(\mu - \lambda)] = (30)^2/[40(40-30)] = 2{,}25$

$Ws = 1/(\mu - \lambda) = 1/(40-30) = 0{,}1$

$Wq = \lambda / [\mu(\mu - \lambda)] = (30)/[40(40-30)] = 0{,}075$

يمكن مقارنة هذه المؤشرات مع المؤشرات السابقة( حالة عدم التوظيف)، حيث أن زمن انتظار الزبون في الصف تقلص من 0.17 سا إلى 0.075 سا، أي انخفض زمن الانتظار من 10.2 دقيقة إلى 4.5 دقيقة، مما سيتيح تجنب خسارة شهرية قدرها بالدينار:

$(10,2- 4,5)\times 50= 285$

ومن المعلوم أن تكلفة توظيف عامل جديد هي 100 دج/ شهر، وهكذا سيأخذ صاحب المتجر الوفر الممكن تحقيقه من توظيف هذا العامل، وهو= 285- 100= 185 دج/ شهر.

**البديل الثاني: إنشاء مخرج ثاني في المتجر:**

وبنفس الطريقة يمكن دراسة البديل الثاني (إنشاء مخرج ثاني) في المتجر، وتكلفته تصل إلى 4000 دج/ شهر، إضافة إلى أجرة الموظف 100 دج/ شهر، لكن في هذه الحالة يصبح نظام الانتظار مكون من قناتين للخدمة s= 2، وتصبح العلاقات الرياضية السابقة غير صالحة، إلا إذا اعتبرنا أن الزبائن سيتوزعون مناصفة بين المخرجين، ولا ينتقلون من صف لآخر، ولتبسيط الحالة، يمكن اعتبار نظامي خط انتظار منفصلين، وبالتالي يمكن استخدام النموذج الرياضي السابق في التحليل.

نفرض أن مدير المتجر قرر استخدام مخرجين مستقلين، في هذه الحالة سيكون معدل الوصول هو نصف معدل الوصول، أي 15 زبون/سا، بينما يبقى معدل الخدمة هو نفسه، أي 35 زبون/سا، وعندها تكون مؤشرات خط الانتظار كما يلي:

$P= \lambda/\mu= 15/35= 0,43$

$P_0= 1- (\lambda/\mu)= 1- (15/35)= 1- 0,43= 0,57$

$Ls= \lambda/(\mu-\lambda)= 15/(35-15)= 0,75$

$Lq= \lambda^2/[\mu(\mu-\lambda)]= 15^2/ [35(35-15)]= 0,32$

$Ws= 1/(\mu-\lambda)= 1/(35-15)= 0,05$

$Wq= \lambda/[\mu(\mu-\lambda)]= 15/[35(35-15)]= 0,02$

المدة التي يمكن توفيرها عند تطبيق البديل الثاني: $(60\times 0,17)-(60\times 0,02)= 9$ mn

الوفر في التكاليف المحقق: 9 × 50= 450 دج. حيث 50 دج/ دقيقة هي الوفر تكاليف الانتظار(عزوف الزبائن عن الانتظار وبالتالي عدم الشراء).

فإذا طرحنا منها أجرة الموظف 100 دج/ شهر، فإن المبلغ المتبقي: 450-100 = 350 دج/ شهر، سيستخدم لتغطية تكاليف إنشاء مركز الخروج 4000 دج، وعليه فإن صاحب المتجر سيتمكن من استرداد تكاليف الاستثمار في المخرج الجديد بعد: 4000/ 250= 11.4 شهر( حوالي سنة).

في النهاية على صاحب المتجر تجميع هذه نتائج الدراسة التحليلية لكلا البدين في جدول مقارنة ودراستها، ثم اختيار البديل الذي يجعل التكاليف الكلية أقل ما يمكن.