جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسييـر

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
والعلوم التجارية LMD-SEGC
السنـــة الأولـــى

سلسلة التمــارين رقم 09 في الإحصــاء 01

الانحدار الخطي البسيط والارتباط.

التمرين الأول: إليك المعطيات التالية لظاهرتين X و Y

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9

1. حدد معادلة انحدار Y على X ومعادلة انحدار X على Y.
2. ارسم خطي الانحدار $C_{Y/X}$ و $C_{X/Y}$ في معلم نفسه. ماذا تلاحظ؟
3. احسب معامل بيرسون للارتباط.

التمرين الثاني: يمثل الجدول التالي عدد القروض المصغرة الممنوحة للشباب خلال 10 سنوات، ومعدلات البطالة المقابلة لها.

I. باعتبار أن المتغير X مستقلا والمتغير Y تابعا:

السنوات	عدد القروض (X)	معدلات البطالة (Y)
1980	10	0.200
1981	15	0.180
1982	20	0.175
1983	25	0.170
1984	30	0.150
1985	40	0.130
1986	45	0.110
1987	50	0.100
1988	55	0.080
1989	60	0.075

1. ارسم لوحة الانتشار.
2. هل يمكن القول - من خلال ملاحظة لوحة الانتشار- أن هناك علاقة بين عدد القروض الممنوحة ومعدلات البطالة؟
3. حدد معادلة انحدار Y على X
4. أرسم خط الانحدار لهذه المعادلة في الشكل نفسه
5. اشرح المعنى الحقيقي لكل من المعلمتين *a* و *b*.
6. احسب الخطأ المعياري للتقدير $S_{Y/X}$
7. حدد درجة الثقة التي يمكن وضعها في تقديرات المعادلة.
8. حدد قوة العلاقة بين عدد القروض الممنوحة ومعدلات البطالة.
9. لنقل إن الدولة منحت 35 قرضا، هل يمكننا تقدير المستوى الذي سيؤول إليه معدل البطالة؟ ولماذا؟
10. ما هو عدد القروض اللازم منحه للشباب للقضاء نهائيا على البطالة؟

II. لنعتبر الآن X هو المتغير التابع و Y وهو المتغير المستقل.

1. حدد معادلة الانحدار X على Y
2. ارسم خط الانحدار لهذه المعادلة في الشكل السابق نفسه.
3. بمقارنة خطي الانحدار السابقين ماذا تلاحظ؟
4. حدد قوة العلاقة بين عدد القروض الممنوحة ومعدلات البطالة باستخدام الميلين *a* و *a'*

التمرين الثالث: يوضح الجدول المقابل عدد الناجحين والراسبين في امتحانات البكالوريا للعينة من 200 طالب مسحوبة من ثانويتين A و B

المجموعات	ناجح	راسب	المجموع
الثانوية A	95	5	**100**
الثانوية B	35	65	**100**
المجموع	**130**	**70**	**200**

لمعرفة ما إذا كانت هناك علاقة بين الانتماء لإحدى هاتين الثانويتين والنجاح في البكالوريا:

1. ما هو معامل الارتباط المناسب الذي تقترحه لقياس قوة العلاقة بين النجاح في البكالوريا والانتماء لإحدى هاتين الثانويتين؟ برر اجابتك باختصار.
2. احسب هذا المعامل الذي اقترحته. ماذا تستنتج؟

التمرين الرابع:

تريد احدى الشركات معرفة ما إذا كانت هناك علاقة بين "التقدير في الامتحان الكتابي" و"التقدير في الامتحان الشفهي" في مسابقة التوظيف، فاختارت ثمانية مرشحين ودونت النتائج في الجدول الآتي:

المرشح	1	2	3	4	5	6	7	8
التقدير في الامتحان الشفهي	A	B	C	D	D	F	G	H
التقدير في الامتحان الكتابي	B	A	C	D	E	F	G	H

1. ما هو معامل الارتباط المناسب الذي تقترحه لقياس قوة العلاقة بين التقدير في الامتحانين؟
   - برر إجابتك باختصار.
2. أحسب هذا المعامل الذي اقترحته.
   - ماذا تستنتج؟

التمرين الخامس:

تريد إحدى الدراسات معرفة مدى الارتباط بين التدخين والانتساب إلى مهنة من المهن A أو B أو C ، فحصلت على البيانات المبينة في الجدول المقابل:

المطلوب:

حدد مقدار التوافق بين التدخين والانتساب لمهنة معينة من هذه المهن الثلاث.

عادة التدخين	المهن			المجموع
	A	**B**	**C**	
يدخن	30	80	20	**130**
لا يدخن	25	15	30	**70**
المجموع	**55**	**95**	**50**	**200**

أسرة المقياس.

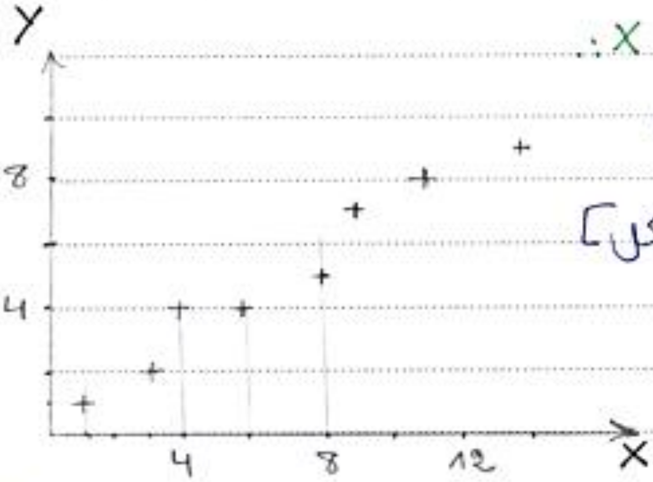
حلول سلسلة التمارين رقم 09 في مقياس الاحصاء 01

* الانحدار والارتباط *

حل التمرين الأول :

1- تحديد معادلة انحدار Y على X :

طالما أن التمرين لم يحدد شكل العلاقة بين X و Y، وجب علينا رسم لوحة الانتشار [انظر الشكل]



نلاحظ أن لوحة الانتشار تظهر سحابة من النقاط تقترب من تشكيل خط مستقيم، لذا نقول أن العلاقة بين X و Y علاقة خطية من الشكل $\hat{y}_i = a x_i + b$

- يمكننا تحديد قيمتي الثابتين a و b بإحدى طريقتين :

الطريقة الأولى : بتطبيق القانونين المشتقين من طريقة المربعات الصغرى [انظر المحاضرة].

Y^2	XY	X^2	Y	X
1	1	1	1	1
4	6	9	2	3
16	16	16	4	4
16	24	36	4	6
25	40	64	5	8
49	63	81	7	9
64	88	121	8	11
81	126	196	9	14
256	364	524	40	56

$$a = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{8(364) - (56)(40)}{8(524) - 56^2}$$

$$= \frac{7}{11} = 0,636$$

$$b = \frac{1}{n} \left[\sum Y - a \sum X \right]$$

$$= \frac{1}{8} \left[40 - \frac{7}{11}(56) \right] = \frac{6}{11} = 0,545$$

أو نحسب b بتطبيق القانون الآتي :

$$b = \frac{\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{(524)(40) - (56)(364)}{8(524) - (56)^2}$$

$$= \frac{6}{11} = 0{,}545.$$

ومنه يمكن كتابة معادلة انحدار Y على X كالآتي :

$$\hat{Y}_i = \frac{7}{11} X_i + \frac{6}{11} \quad \text{أو} \quad \hat{Y}_i = 0{,}636 X_i + 0{,}545.$$

الطريقة الثانية : نحدد a و b بحل جملة المعادلتين الآتية :

$$\begin{cases} \sum Y = a \sum X + nb \\ \sum XY = a \sum X^2 + b \sum X \end{cases}$$

نعوض المجاميع هذه بقيمها الظاهرة في الجدول السابق فنجد .

$$\begin{cases} 40 = 56a + 8b \\ 364 = 524a + 56b \end{cases}$$

ثم نحل هذه الجملة بإحدى الطريقتين المعروفتين "الجمع" أو التعويض فنجد ان $a = \frac{7}{11}$ ، و $b = \frac{6}{11}$

+ تحديد معادلة انحدار X على Y : حيث نعتبر أن X أصبح متغيرا تابعا، بينما أصبح Y متغيرا مستقلا .

بما أن معادلة انحدار Y على X خطية فإن معادلة انحدار X على Y خطية أيضا . ولا حاجة هنا لرسم لوحة الانتشار يمكن كتابة معادلة انحدار X على Y على النحو الآتي :

$$\hat{X} = a' Y + b'$$

$$a' = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{n \sum Y^2 - (\sum Y)^2} = \frac{8(364) - (56)(40)}{8(256) - (40)^2}$$

$$= \frac{3}{2} = 1{,}50$$

$$b = \frac{1}{n}\left[\sum x - a\sum y\right] = \frac{1}{8}\left[56 - 1,50(40)\right] = -\frac{1}{2} = (-0,5)$$

ومنه ... معادلة انحدار X على Y هي $\hat{X}_i = 1,50Y_i - 0,5$

ج- رسم خطي الانحدار $C_{y/x}$ و $C_{x/y}$ في المعلم نفسه:

لرسمهما في المعلم نفسه لابد من الانتباه إلى ضرورة تعديل معادلة انحدار X على Y، لتصبح من الشكل ....=Y_i وليس ....=X_i حيث يكون المحور العمودي دوما محور التراتيب ويحمل قيم Y.
يتم هذا التعديل كما يلي:

$$\left(\hat{X}_i = 1,50Y_i - 0,5\right) \Leftrightarrow \left(\hat{X}_i = \frac{3}{2}Y_i - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \hat{X}_i + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}Y_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{X_i}{3/2} + \frac{1/\cancel{2}}{3/\cancel{2}} = Y_i$$

$$\Leftrightarrow Y_i = \frac{2}{3}X_i + \frac{1}{3}$$

ملاحظة: انتبه الى أن هذه المعادلة لا تساوي معادلة انحدار Y على X. وهذا التساوي لا يتحقق إلا في حالة الارتباط التام".

لرسم خطي الانحدار نحدد نقطتين لكل منهما، بافتراض قيمة لـ X وتعويضها في المعادلة فنستخرج قيمة Y، ثم نوصل بين هاتين النقطتين فنحصل على خطي الانحدار.
(بالنسبة لخط الانحدار الأول نعين النقطتين C و D ونربطهما وبالنسبة لخط الانحدار الثاني نعين النقطتين E و F ثم نوصل بينهما. (انظر الشكل أسفله).

* احداثيات النقطتين C و D لخط انحدار Y على X :

$C: \quad x = 4 \Rightarrow \hat{y} = \frac{7}{11}(4) + \frac{6}{11} = \frac{34}{11} = 3{,}09 \simeq 3$

إذن $C(4, 3)$

$D: \quad x = 10 \Rightarrow \hat{y} = \frac{7}{11}(10) + \frac{6}{11} = \frac{76}{11} = 6{,}9 \simeq 7$

إذن $D: (10, 7)$

نعين النقطتين C و D في الشكل السابق، ثم نرسم $C_{Y/X}$.

* احداثيات النقطتين E و F لخط انحدار X على Y :

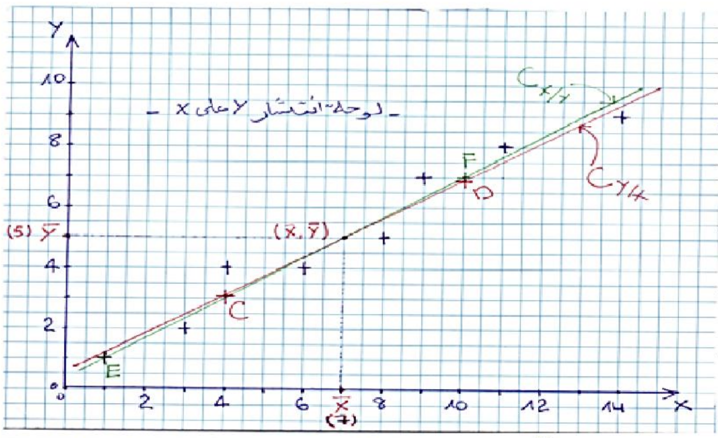
$E: \quad x = 1 \Rightarrow \hat{y}' = \frac{2}{3}(1) + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$

إذن $E(1, 1)$

$F: \quad x = 10 \Rightarrow \hat{y}' = \frac{2}{3}(10) + \frac{1}{3} = \frac{21}{3} = 7.$

إذن $F(10, 7)$

وعلى ذلك ... نحدد النقطتين C، D ونوصل بينهما لرسم خط انحدار Y على X، ونحدد النقطتين E، F ونوصل بينهما لرسم خط انحدار X على Y. (انظر الشكل)



* ماذا نلاحظ؟

نلاحظ أن خطي الانحدار يتقاطعان في نقطة واحدة هي مركز سحابة النقاط واحداثياتها هي $(\bar{X}, \bar{Y})$

3 ـ حساب معامل بيرسون:

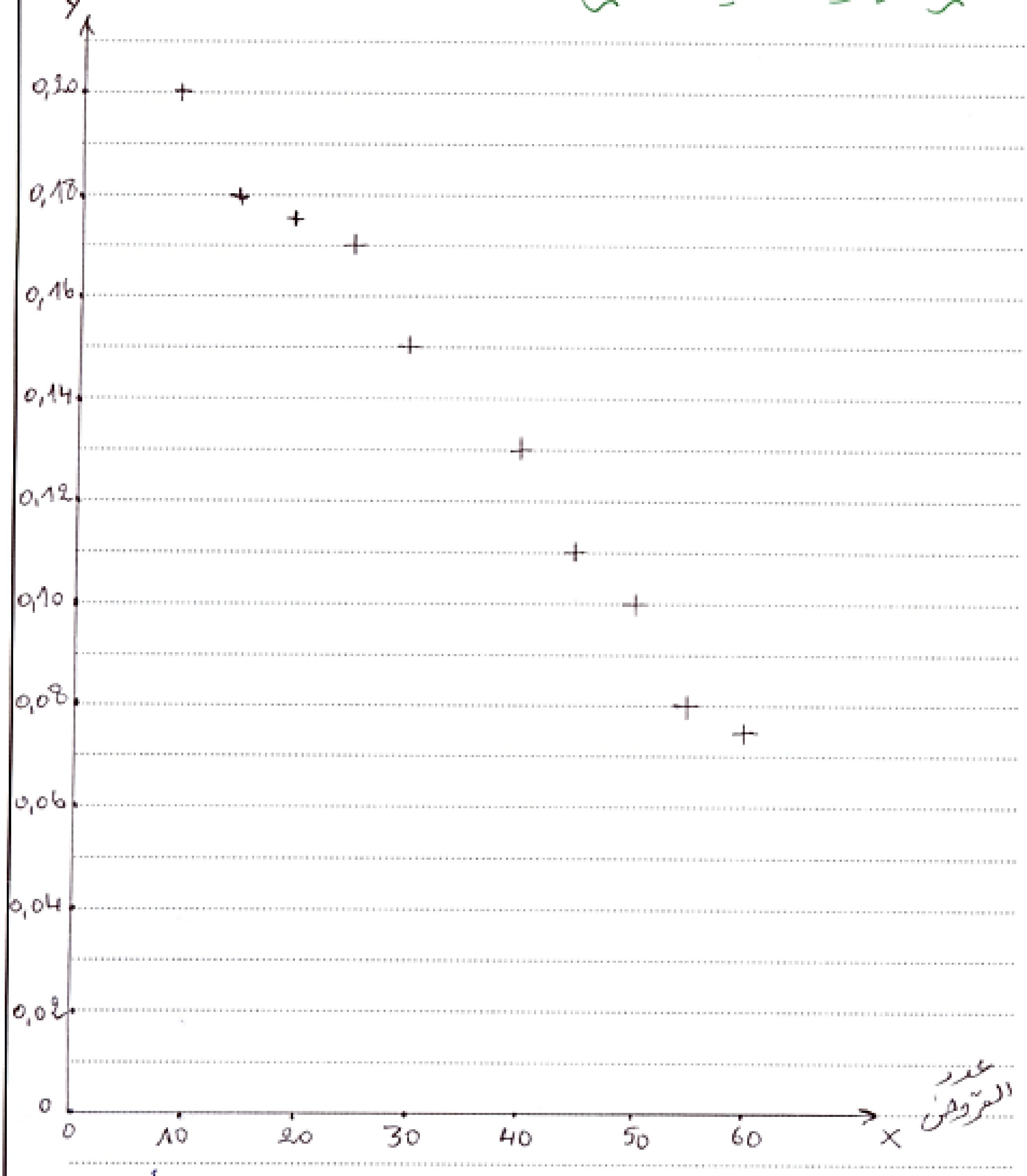
هناك عدة قوانين لحساب معامل "بيرسون" للارتباط الخطي أبسطها وأسرعها بحفظ النتائج السابقة هو الآتي:

$$r_p = \sqrt{a.a'} = \sqrt{\frac{7}{11} . \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{21}{22}} = \sqrt{0{,}95} = 0{,}98 = 98\%$$

أي أن العلاقة بين X و Y علاقة "طردية" "قوية جدا".

حل التمرين الثاني :

1- رسم لوحة الإنتشار :



2- نعم ... من خلال ملاحظة لوحة الإنتشار يمكن القول أنه هناك علاقة بين عدد القروض ومعدلات البطالة، لأن سحابة النقاط تقترب من تشكيل خط مستقيم .

3. تحديد معادلة انحدار Y على X:

بما أن سحابة النقاط تقترب من تشكيل خط مستقيم، فإن العلاقة بين X و Y "علاقة خطية" من الشكل $\hat{Y}_i = a x_i + b$

حيث:

$$a = \frac{n \sum XY - \sum X . \sum Y}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} \quad ; \quad b = \frac{\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY}{n \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

أو بطريقة أخرى (قانون آخر):

$$a = \frac{\sum XY - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum X^2 - n(\bar{X})^2} \quad ; \quad b = \bar{Y} - a\bar{X} = \frac{1}{n}\left[\sum Y - a \sum X\right]$$

$(Y_i - \hat{Y}_i)^2$	$\hat{Y}_i$	$X \cdot Y$	Y^2	X^2	Y_i	X_i
$(0{,}0003)^2$	0,1997	2,00	0,0400	100	0,200	10
$(-0{,}007)^2$	0,1870	2,70	0,0324	225	0,180	15
$(0{,}001)^2$	0,1740	3,50	0,0306	400	0,175	20
$(0{,}008)^2$	0,1620	4,25	0,0289	625	0,170	25
$(0{,}001)^2$	0,1430	4,50	0,0225	900	0,150	30
$(0{,}006)^2$	0,1240	5,20	0,0169	1 600	0,130	40
$(-0{,}001)^2$	0,1110	4,95	0,0121	2 025	0,110	45
$(0{,}001)^2$	0,0990	5,00	0,0100	2 500	0,100	50
$(-0{,}006)^2$	0,0860	4,40	0,0064	3 025	0,080	55
$(0{,}002)^2$	0,0730	4,50	0,0056	3 600	0,075	60
0,0002	/	41,00	0,2054	15000	1,370	350

$$a = \frac{10(41) - 350(1,37)}{10(15000) - (350)^2} = \frac{-69,5}{27500} = (-0,002).$$

$$b = \frac{1}{10}\left[1,37 + \frac{69,5}{27500}(350)\right] = \frac{62}{275} = 0,225$$

ومنه

$$\hat{Y}_i = (-0,002)x_i + 0,225.$$

4- رسم خط انحدار Y على X ($C_{Y/X}$):
لنفرض النقطتين E، F.

$E: \quad X_i = 15 \Rightarrow \hat{Y}_i = 0{,}187 \quad ; \quad E(15; 0{,}187)$

$F: \quad X_i = 60 \Rightarrow \hat{Y}_i = 0{,}073 \quad , \quad F(60 , 0{,}073)$

نعين هاتين النقطتين على الشكل السابق ونوصل بينهما بالمسطرة فنحصل على خط انحدار Y على X.

[أنظر الشكل في الصفحة الموالية أسفله]

ملاحظة: عند التعويض في المعادلة السابقة وتفاديا لأخطاء التقريب، يجب وضع قيمة a على شكل كسر ($\frac{-69{,}5}{27500}$) وكذلك قيمة b

5- المعنى الحقيقي للمعلمتين a و b.

معنى قيمة a: a جاء بقيمة سالبة، ويعني أن البطالة يقدر أن تنخفض بمعدل (0,2%) كلما منحت الدولة قرضا إضافيا مصغرا للشباب. (العلاقة عكسية).

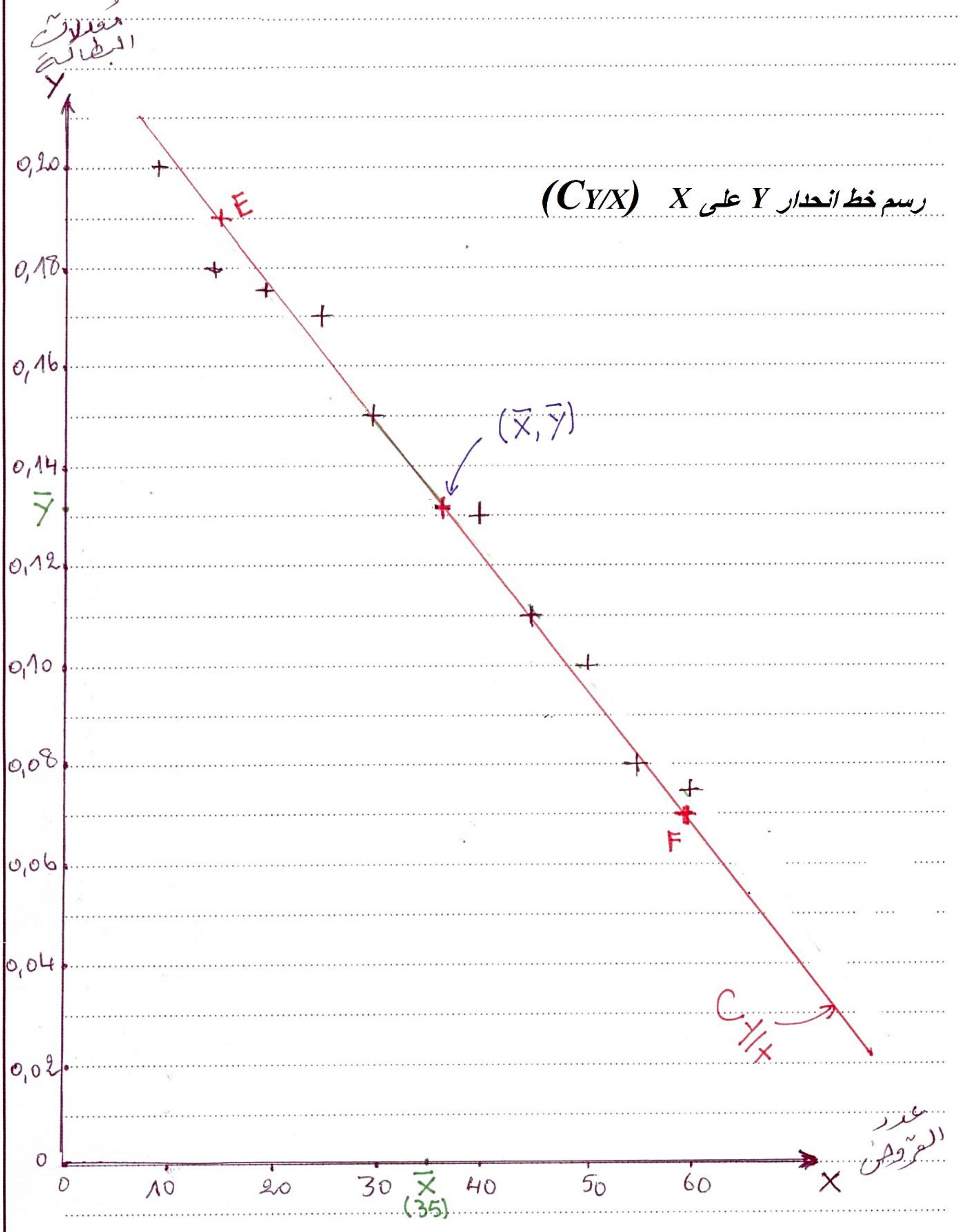
معنى قيمة b: ويعني المعدل التقديري للبطالة، والمقدر بنسبة 22,5% إذا لم تمنح أي قرض مصغر للشباب.

6- حساب الخطأ المعياري للتقدير: يعبر هذا الخطأ عن الانحراف بين القيم التقديرية (التي مصدرها المعادلة) والقيم الحقيقية (التي مصدرها الواقع). ويشبه كثيرا في حسابه الانحراف المعياري الذي درسناه سابقا. يمكن حساب هذا الخطأ وفق القانون الآتي:

$$S_{Y/X} = \sqrt{\frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}0002}{10}} = 0{,}0044$$

نلاحظ أن قيمة $S_{Y/X}$ صغيرة جدا، وهذا يدل على أن أخطاء التقدير بالمعادلة ضئيلة جدا، ويدل أيضا على جودة تمثيل خط الانحدار للسحابة.

رسم خط انحدار Y على X $(C_{Y/X})$



7- تحديد درجة الثقة في تقديرات المعادلة:

يمكن تحديد درجة الثقة بحساب ما يسمى "معامل التحديد R^2"

وذلك وفق القانون الآتي:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST}$$

حيث:

SSR: يعبر عن الانحرافات المفسَّرة بالانحدار

SST: يعبر عن الانحرافات الكلية (مفسَّرة وغير مفسَّرة)

يمكن حساب كل منهما بقانونين اثنين: الأول "عام" يمكن تطبيقه في جميع أشكال الانحدار، أما الثاني فهو قانون "خاص" لا يطبق إلا إذا كان الانحدار "خطيا".

$$SSR = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \quad \text{القانون الأول}$$

$$= a^2 \left[\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} \right] \quad \text{القانون الثاني}$$

$$= \left(\frac{-69,5}{27500} \right)^2 \left[15000 - \frac{(350)^2}{10} \right] = 0,01756$$

$$SST = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 \quad \text{القانون الأول}$$

$$= \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n} \quad \text{القانون الثاني}$$

$$= \left(0,2054 - \frac{(1,37)^2}{10} \right) = 0,01776$$

وعليه:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{0,01756}{0,01776} = 0,98 = 98\%$$

أي أننا واثقون في تقديرات المعادلة بنسبة 98%. بعبارة أخرى لو أجرينا - نظريا - مائة عملية تقدير بهذه المعادلة، فسنجد 98 تقديرًا صحيحًا، وتقديرين اثنين فقط خاطئين.

8 - تحديد قوة العلاقة بين عدد القروض ومعدلات البطالة:
يتم ذلك بحساب معامل بيرسون للارتباط r_p، وذلك بتطبيق أحد القوانين الآتية:

$$r_p = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n \sum y_i^2 - (\sum y)^2]}}$$

$$= \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{[\sum x_i^2 - n(\bar{x})^2][\sum y_i^2 - n(\bar{y})^2]}}$$

$$= \sqrt{a \cdot a'} = \sqrt{R^2}$$

وأقرب طريق وأسهله لحساب r_p وفق ماتوصلنا إليه من نتائج سابقة هو القانون الأخير. أي

$$r_p = -\sqrt{R^2} = -\sqrt{0,98} = (-0,99) = (-99\%)$$

نستنتج أن العلاقة بين القروض المصغرة الممنوحة للشباب ومعدلات البطالة علاقة عكسية قوية جدا.

ملاحظة
وضعنا إشارة سالبة أمام الجذر السابق بناءً على قيمة الميل a فإذا كان سالبا وضعناها، والعكس صحيح

9 - نعم... يمكن تقدير المستوى الذي سيؤول إليه معدل البطالة. لأن لدينا معادلة التقدير. فقط نعوض عدد القروض في X فنحصل على %.

10 - القضاء نهائيا على البطالة (وإن كان هذا غير واقعي) معناه أن 0 = %، إذن يمكن تحديد عدد القروض X بحل معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول الوحيد X.

$$(\hat{Y}_i = 0) \Leftrightarrow \left(\frac{-69,5}{27000} x_i + 0,225 = 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i = \frac{(-0,225) \times 27500}{(-69,5)} = 89,02 \simeq 89$$

أي أنه للقضاء نظريا على البطالة لابد من منح الشباب 89 قرضا مصغراً.

II

لنعتبر الآن أن X هو المتغير التابع و Y هو المتغير المستقل

1- تحديد معادلة انحدار X على Y :

بما أن معادلة انحدار Y على X السابقة "خطية" فإن معادلة انحدار X على Y ستكون خطية كذلك من الشكل :

$$\hat{X}_i = a' Y_i + b'$$

حيث :

$$a' = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{n \sum Y^2 - (\sum Y)^2} = \frac{(-69,5)}{10(0,20545) - (1,33)^2}$$

$$= (-391,33)$$

$$b' = \frac{1}{n}\left[\sum X - a' \sum Y\right] = \frac{1}{10}\left[350 + (391,33)\,1,37\right]$$

$$= 88,61$$

ومنه فإن معادلة انحدار X على Y كمايلي :

$$\hat{X}_i = (-391,33)\, Y_i + 88,61$$

ملاحظة:

إذا كانت العلاقة في انحدار Y على X خطية، فهي كذلك خطية في انحدار X على Y ، وإذا كانت الأولى طردية فإن الثانية أيضا طردية، والعكس صحيح.

2- رسم خط انحدار X على Y في الشكل نفسه:

تماما كما فعلنا في التمرين السابق (انظر السؤال 2 والصفحة 5).

يجب تعديل شكل المعادلة كما يلي:

$$\left(\hat{X}_i = a' Y_i + b'\right) \Leftrightarrow \left(\hat{X}_i - b' = a' Y_i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(Y_i = \frac{1}{a'}\hat{X}_i - \frac{b'}{a'}\right)$$

وعلى ذلك يمكن إعادة صوغ معادلة انحدار X على Y على النحو الآتي:

$$Y_i = \frac{1}{(-391{,}33)} X_i + \frac{88{,}61}{391{,}33} = (-0{,}002)X_i + 0{,}226.$$

ملاحظة:

يلاحظ أن هذه المعادلة الأخيرة تقترب كثيرا من معادلة انحدار Y على X الأولى. وهذا يدل بجلاء على قوة العلاقة بين X و Y.

لرسم خط انحدار X على Y نفرض نقطتين E' و F'، نحدد احداثياتهما من المعادلة الأخيرة، ثم نعينهما على لوحة الانتشار ونوصل بينهما بالمسطرة. [انظر الشكل في الصفحة الموالية مباشرة].

$$E' : X_i = 5 \Rightarrow Y_i = \frac{5}{(-391{,}33)} + \frac{88{,}61}{391{,}33} = 0{,}21$$

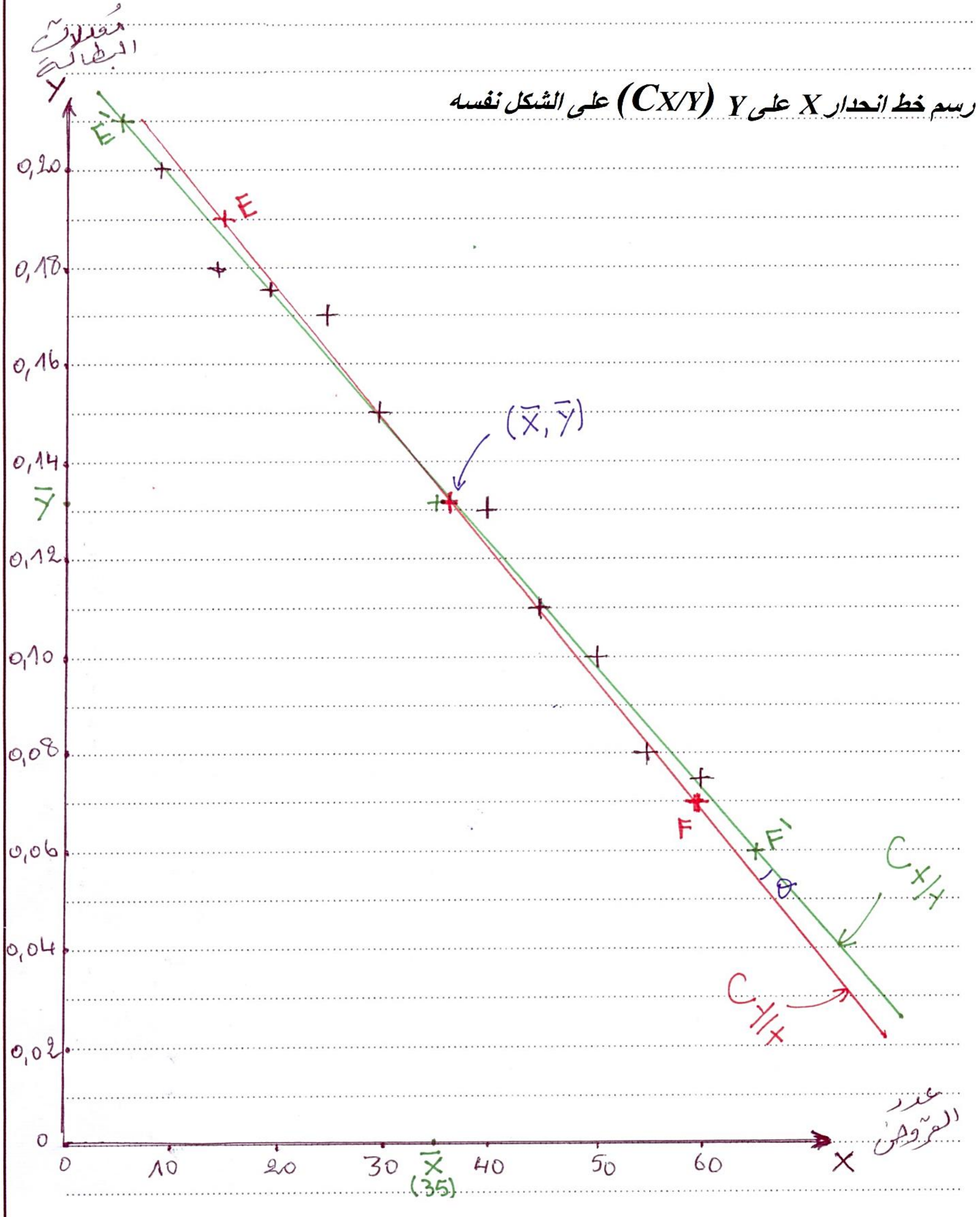
أي: $E'(5,\ 0.21)$

$F' : X_i = 65 \Rightarrow Y = 0{,}06$ $\quad F'(65,\ 0.06)$

3- عند مقارنة خطي الانحدار: يلاحظ أنهما يوشكان على الانطباق حيث نجد أن الزاوية θ المحصورة بينهما صغيرة للغاية. وهذا يؤكد قوة العلاقة بين X و Y.

* ملاحظة: كلما صغرت الزاوية θ قويت العلاقة بين المتغيرين وإذا انعدمت انطبق الخطان، وهذا لا يكون إلا في الارتباط التام.

رسم خط انحدار X على Y $(C_{X/Y})$ على الشكل نفسه



4- تحديد قوة العلاقة بين X و Y باستخدام الميلين a ، a' :

$$r_p = -\sqrt{a\,a'} = -\sqrt{(-0{,}002)(-391{,}33)}$$

$$= -\sqrt{(0{,}98)} = (-0{,}99) = (-99\%)$$

أي أن العلاقة بين معدلات البطالة وعدد القروض المصغرة علاقة قوية جدًا وعكسية. وهي النتيجة ذاتها التي توصلنا إليها سابقا باستخدام القانون السابق لـ r_p في الجزء الأول من هذا التمرين.

ملاحظة:

* وضعنا إشارة (-) أمام الجذر لأن الميلين سالبين، وقد أشرنا إلى ذلك في الصفحة 12.
* إذا كان الارتباط "تاما" فإن $a = \frac{1}{a'}$ وبالتالي فإن $r_p = 1$ أي $a \times a' = 1$ وهذا منطقي.

حل التمرين الثالث:

1- معامل الارتباط المقترح هنا هو "معامل الاقتران" r_a.

* التبرير: لأن كلا الظاهرتين المدروستين نوعيتان من جهة، ولأنهما ثنائيتا الإمكانات من جهة أخرى (ناجح/ راسب. ثانوية A/ ثانوية B).

2- حساب معامل الاقتران r_a:

$$r_a = \frac{n_{11}\cdot n_{22} - n_{12}\cdot n_{21}}{n_{11}\cdot n_{22} + n_{12}\cdot n_{21}} = \frac{95\times 65 - 5\times 35}{95\times 65 + 5\times 35} = \frac{6000}{6350}$$

$$= 0{,}945 = 94{,}5\%$$

* نستنتج أن هناك ارتباطا قويا واقترانا كبيرا بين النجاح والانتماء الى احدى هاتين الثانويتين.

حل التمرين الرابع:

1- معامل الارتباط الذي نقترحه هنا هو معامل "ارتباط الرتب" أو ما يسمى معامل "سبيرمان" r_s.

التبرير: لأن المتغيرين ترتيبيان، ويمكن ترتيبهما.

2- حسابه:

المترشح	الشفهي	الكتابي	d_i	d_i^2
1	1	2	-1	1
2	2	1	1	1
3	3	3	0	0
4	4,5	4	0,5	0,25
5	4,5	5	-0,5	0,25
6	6	6	0	0
7	7	7	0	0
8	8	8	0	0
المجموع	/	/	/	2,5

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6\,(2,5)}{8\,(8^2-1)} = 0,99$$

$$= 0,97 = 97\%$$

- الاستنتاج:

نستنتج أن العلاقة بين الامتحانين الشفهي والكتابي قوية جدًّا طردية: أي أنه كلما كان تقدير المترشح أعلى في أحد الامتحانين، كان تقديره في الامتحان الآخر عاليا.

حل التمرين الخامس:

تحديد مقدار التوافق بين ظاهرة التدخين والانتساب لمهنة ما:

يمر الحل بخطوتين اثنتين:

✓ الخطوة الأولى: حساب قيمة الإحصاءة χ^2.

✓ الخطوة الثانية: حساب معامل التوافق r_c.

* حساب قيمة الإحصاءة χ^2: يمكن حساب χ^2 بإحدى طريقتين:

الطريقة الأولى: باستخراج التكرارات النظرية E_{ij} ومن ثم الاعتماد عليها في حساب قيمة χ^2، وذلك على النحو الآتي:

مثلاً بالنسبة للخانة الأولى (السطر 1، العمود 1) نحسب E_{11} كما يلي.

$$E_{11} = \frac{n_{1.} \times n_{.1}}{n_{..}} = \frac{130 \times 55}{200} = 35,75$$

حيث:

$n_{1.}$: هو المجموع الحدي للسطر الأول.

$n_{.1}$: " " " للعمود "

$n_{..}$: " " الكلي (200)

وهكذا بالنسبة لبقية الخانات، فنحصل على جدول يضم التكرارات الحقيقية O_{ij} والتكرارات النظرية E_{ij} كما يلي:

التدخين \ المهنة	A		B		C		المجموع
	O_{ij}	E_{ij}	O_{ij}	E_{ij}	O_{ij}	E_{ij}	/
يدخن	30	35,75	80	61,75	20	32,50	130
لا يدخن	25	19,25	15	33,25	30	17,50	70
المجموع	55		95		50		200

نحسب χ^2 بتطبيق القانون الآتي:

$$\chi^2 = \sum\sum\left[\frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}\right] = \frac{(30 - 35,75)^2}{35,75} + \frac{(80 - 61,75)^2}{61,75} + \dots +$$

$$= 31,7893$$

وبعد ذلك نحسب معامل التوافق r_c حيث:

$$r_c = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{31,7893}{31,7893 + 200}} = \sqrt{0,1371} = 0,3703$$

$$= 37,03\%$$

أي أن هناك توافقا بنسبة 37 % بين ظاهرة التدخين والانتساب لمهنة من المهن A ، B ، C.

الطريقة الثانية لحساب χ^2 :

يمكن حساب قيمة الإحصاءة χ^2 بطريقة أخرى دون حساب التكرارات النظرية E_{ij} وذلك بتطبيق القانون الآتي:

$$\chi^2 = n\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij})^2}{(\sum_{i=1}^{k} R_i)(\sum_{j=1}^{c} C_j)}\right] - n$$

حيث:

n: حجم العينة، أو مجموع التكرارات.

O_{ij}: التكرار الحقيقي في الخانة ij.

$\sum R_i$: المجموع الحدي للسطر (التي تقع الخانة ij O_{ij})

$\sum C_j$ " " للعمود (" " " ")

لنطبق هذا القانون على مثالنا السابق:

$$\chi^2 = 200\left[\frac{(30)^2}{(130)(55)} + \frac{(80)^2}{(130)(95)} + \cdots + \frac{(30)^2}{(70)(50)}\right] - 200$$

$= 200\,[1,1589] - 200$

$= 231,7893 - 200$

$= 31,7893.$

وهي القيمة ذاتها التي وجدناها بالطريقة السابقة. بعدها، نعوض هذه القيمة في قانون معامل التوافق كما فعلنا سابقا، فنجد $r_c = 37,03\%$.

- انتهى حل سلسلة التمارين رقم 09 في الإحصاء - الارتباط والانحدار.

الدكتور عبالسعيد السهالي.