

Chapitre 1

Calcul de sections en béton armé soumises à la flexion simple

Chapitre 1

Calcul de sections en béton armé soumises à la flexion simple

1.1 Définition

Un élément est soumis à la flexion simple si dans toute section de cet élément, les sollicitations se réduisent à un moment fléchissant M_f et un effort tranchant T (l'effort normal $N = 0$) (Fig. 1.1).

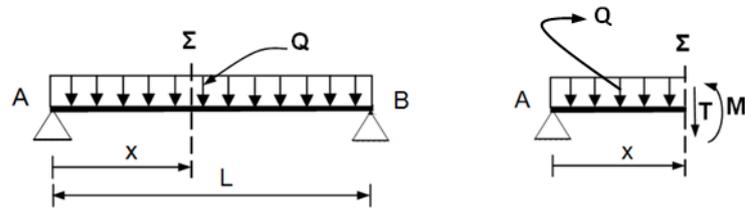


Fig. 1.1 : Schéma mécanique d'une poutre, plus le schéma d'une partie de cette poutre située à gauche d'une section considérée.

Les éléments d'une structure soumise à la flexion simple sont principalement les poutres, qu'elles soient isostatiques ou continues.

En béton armé, **l'action du moment fléchissant** conduit au dimensionnement des **aciers longitudinaux** et **l'action de l'effort** tranchant conduit au dimensionnement des **aciers transversaux** (cadres, épingles ou étriers).

Ces deux calculs sont menés séparément, dans ce chapitre, on présente les calculs relatifs au moment fléchissant en considérant les deux états limites (l'E.L.U et l'E.L.S), et en étudiant les sections rectangulaires et en T avec ou sans armatures comprimées.

1.2 Calcul des armatures longitudinales à l'E.L.U.

1.2.1 Hypothèses de calcul

1. Hypothèse de Navier-Bernoulli (les sections droites restent planes pendant la déformation) ;
2. Pas de glissement relatif entre l'acier et le béton ;

3. La résistance du béton en traction est négligée ;
4. La section d'acier est concentrée en son centre de gravité.
5. **Béton**: diagramme rectangulaire simplifié relatif aux déformations - contraintes en compression.
- **Acier**: diagramme bilinéaire de calcul (traction et compression).
6. **Déformations limites**: suivant la méthode des «trois pivots» qui impose en flexion simple d'atteindre l'un des pivots A ou B (Fig. 1.2):
 - **Pivot A**: $\epsilon_{st} = 10\text{‰}$ et $0 \leq \epsilon_{bc} \leq 3,5\text{‰}$.
 - **Pivot B**: $0 \leq \epsilon_{st} \leq 10\text{‰}$ et $\epsilon_{bc} = 3,5\text{‰}$.

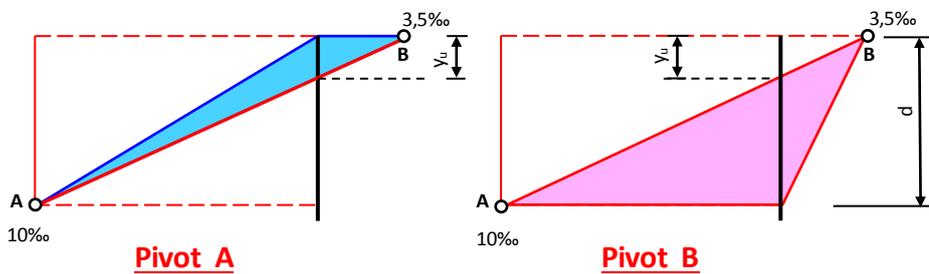


Fig. 1.2 : Diagramme des déformations limites d'une section soumise à la flexion simple

• **Positions particulières de l'axe neutre**

L'hypothèse de continuité des déformations dans la section (pas de glissement des armatures par rapport au béton) conduit à l'équation suivante :

$$\frac{y_u}{\epsilon_{bc}} = \frac{d - y_u}{\epsilon_{st}} \dots\dots\dots(4.1)$$

De cette relation on peut déduire l'équation suivante :

$$\frac{y_u}{d} = \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{bc} + \epsilon_{st}} \dots\dots\dots(4.2)$$

En posant : $\alpha_u = \frac{y_u}{d}$ (α_u : position relative de la fibre neutre par rapport a la fibre

la plus comprimée), on peut écrire que : $\alpha_u = \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{bc} + \epsilon_{st}} \dots\dots\dots(4.3)$

Valeurs particulières de α_u

➤ Voir Fig. 1.3.

- Si la droite des déformations passe par les pivots **A** et **B** alors :

$$\alpha_u = \alpha_{AB} = \frac{3.5}{3.5+10} = 0.2591$$

- Si $\alpha_u = 0.167 \Rightarrow$ **pivot A** ($\epsilon_{bc} = 2 \text{ ‰}$ et $\epsilon_{st} = 10 \text{ ‰}$) ;
- Si $0 \leq \alpha_u < 0.167 \Rightarrow$ **pivot A** ($0 \leq \epsilon_{bc} < 2 \text{ ‰}$ et $\epsilon_{st} = 10 \text{ ‰}$) : le béton travaille mal et la section est surdimensionnée en béton;
- Si $0.167 \leq \alpha_u \leq 0.259 \Rightarrow$ **pivot A** ($2 \text{ ‰} \leq \epsilon_{bc} \leq 3.5 \text{ ‰}$ et $\epsilon_{st} = 10 \text{ ‰}$) ;
- Si $0.259 \leq \alpha_u \leq \alpha_l \Rightarrow$ **pivot B** ($\epsilon_{bc} = 3.5 \text{ ‰}$ et $10 \text{ ‰} \geq \epsilon_{st} \geq \epsilon_l$) avec :

$$\epsilon_l = \epsilon_e = f_e / (\gamma_s \cdot E_s) \quad \text{et} \quad \alpha_l = \frac{3.5}{3.5 + (\epsilon_l \cdot 1000)}$$

- Si $\alpha_l \leq \alpha_u \leq 1 \Rightarrow$ **pivot B** ($\epsilon_{bc} = 3.5 \text{ ‰}$ et $\epsilon_l \geq \epsilon_{st} \geq 0$) : l'acier travaille insuffisamment, ce qui conduit à de grandes sections d'armatures.

Conclusion : pour utiliser au mieux les caractéristiques du béton et de l'acier, il est préconisé :

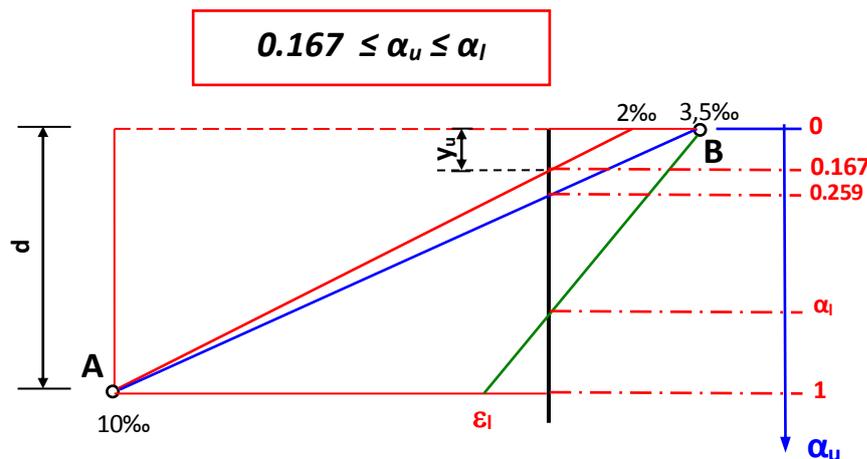


Fig. 1.3: Positions particulières de l'axe neutre

1.2.2 Section rectangulaire

1.2.2.1 Section sans aciers comprimés

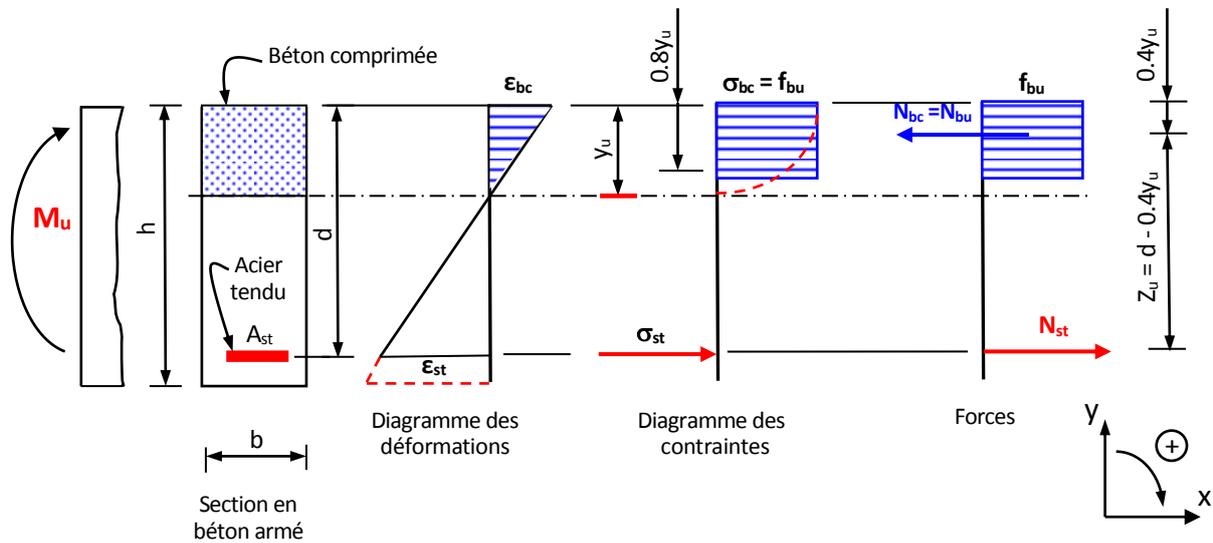


Fig. 1.4 : Diagrammes contrainte-déformation parabolique-rectangle et rectangulaire simplifié dans la section de béton comprimé

Equations d'équilibre :

- Voir (Fig. 1.4)

➤ $\sum F_x = 0$

$\Rightarrow N_{st} - N_{bc} = 0 \Rightarrow N_{st} = N_{bc} \dots\dots\dots (4.5)$

• $N_{bc} = N_{bu} = 0.8 y_u \cdot b \cdot f_{bu} \dots\dots\dots (4.6)$

• $N_{st} = A_{st} \cdot \sigma_{st} \dots\dots\dots (4.7)$

➤ En remplaçant (4.6) et (4.7) dans (4.5), on obtient :

$0.8 y_u \cdot b \cdot f_{bu} = A_{st} \cdot \sigma_{st} \dots\dots\dots(4.8)$

➤ $\sum M_A = 0$ (la somme des moments est calculé par rapport au C.d.G. des aciers tendus)

$\Rightarrow M_u - N_{bu} \cdot Z_u = 0 \dots\dots\dots (4.9)$

• $Z_u = d - 0.4y_u$ (**bras de levier**)..... (4.10)

- Avec (4.6), (4.9) et (4.10) on obtient :

$$M_u - (0.8 y_u \cdot b \cdot f_{bu}) \cdot (d - 0.4 y_u) = 0$$

$$\Rightarrow M_u = (0.8 y_u \cdot b \cdot f_{bu}) \cdot (d - 0.4 y_u) \dots\dots\dots (4.11)$$

- Avec (4.5) ,(4.7) et (4.9),on obtient :

$$M_u = A_{st} \cdot \sigma_{st} \cdot Z_u \dots\dots\dots (4.12)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{st} = M_u / (\sigma_{st} \cdot Z_u)} \dots\dots\dots (4.13)$$

- Rappelons qu'au paragraphe 4.2.1 on a posé :, $\alpha_u = y_u/d$
donc : $Z_u = (1 - 0.4 \alpha_u) \cdot d \dots\dots\dots (4.14)$

- En posant : $\beta_u = Z_u/d$

$$\text{Soit } \boxed{\beta_u = 1 - 0.4 \alpha_u (\text{bras de levier réduit})} \dots\dots\dots (4.15)$$

- L'équation (4.13) devient :

$$\boxed{A_{st} = M_u / (\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d)} \dots\dots\dots (4.16)$$

- L'équation (4.11) devient : $M_u = 0.8 \alpha_u \cdot (1 - 0.4 \alpha_u) \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bu} \dots\dots\dots(4.17)$

- En posant : $\mu_{bu} = M_u / (b \cdot d^2 \cdot f_{bu})$ (μ_{bu} : Moment ultime réduit)

$$\text{On a : } \boxed{\mu_{bu} = 0.8 \alpha_u \cdot (1 - 0.4 \alpha_u)} \dots\dots\dots(4.18)$$

$$\text{et } \boxed{\alpha_u = 1.25 \cdot (1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_{bu}})} \dots\dots\dots(4.19)$$

Étapes de calcul à l'E.L.U.R. pour déterminer la section d'armature A d'une section rectangulaire sans armatures comprimées :

1. Calcul des contraintes limites :

1.1 Béton : $f_{bu} = \frac{0.85 f_{cj}}{\theta \gamma_b}$

1.2 Acier : $f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$

2. Calcul des moments réduits

2.1 Moment ultime réduit μ_{bu}

$$\mu_{bu} = M_u / (b \cdot d^2 \cdot f_{bu})$$

2.2 Moment ultime réduit limite μ_l

- $\mu_l = 0.8 \alpha_1 \cdot (1 - 0.4 \alpha_1)$

avec $\alpha_1 = \frac{3.5}{3.5 + (\epsilon_1 \cdot 1000)}$ et $\epsilon_1 = f_e / (\gamma_s \cdot E_s)$

3. Comparaison des moments réduits

- $\mu_{bu} \leq \mu_l$?

- $\mu_{bu} \leq \mu_l \Rightarrow A_{sc} = 0$ (section sans armatures comprimées), suivre les étapes 4, 5, 6 et 7.

- $\mu_{bu} > \mu_l \Rightarrow A_{sc} \neq 0$ (section avec armatures comprimées), voir le paragraphe 4.2.2.2.

4. Calcul de la position relative de la fibre neutre

$$\alpha_u = 1.25 \cdot (1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_{bu}})$$

5. Calcul du bras de levier réduit

$$\beta_u = 1 - 0.4 \alpha_u$$

6. Détermination de la contrainte de calcul de l'acier tendu (σ_{st})

Selon le cas, pivot A ou pivot B

7. Calcul de la section d'acier

$$A_{st} = M_u / (\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d)$$

1.2.2.2 Section avec aciers comprimés

Lorsque, dans une section rectangulaire dont les dimensions sont imposées, on trouve que $\mu_{bu} > \mu_l$, le moment M_u peut être équilibré en renforçant la partie comprimée de la section au moyen d'armatures de section A_{sc} .

Principe de calcul des sections d'armatures (Fig. 1.5)

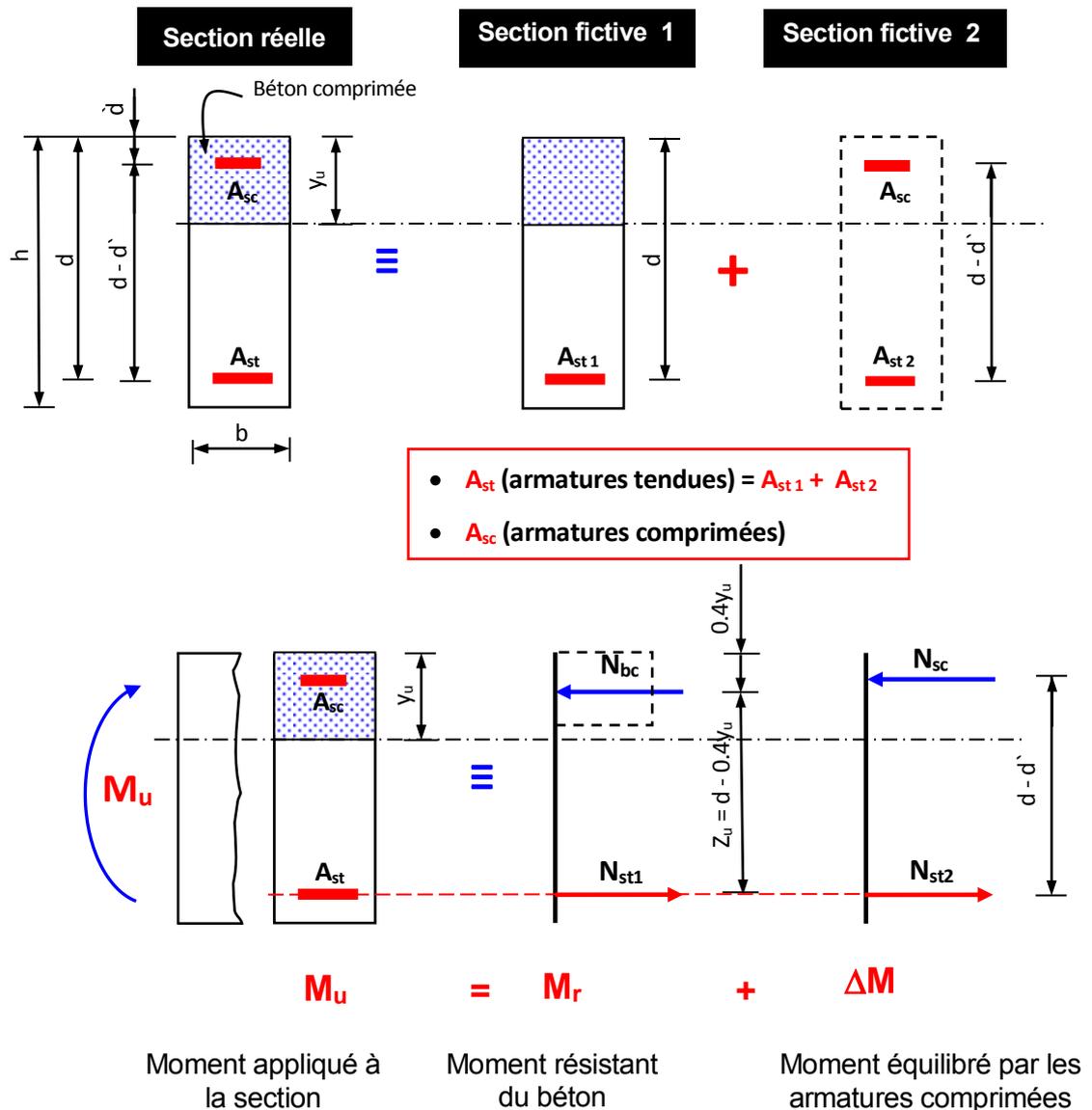


Fig. 1.5 : Principe de calcul à l'ELU d'une section rectangulaire avec aciers comprimés

- **M_r (Le moment résistant du béton) :** est le moment ultime que peut équilibrer la section sans lui ajouter les aciers comprimés.

- ΔM (Le moment résiduel) : est la différence entre le moment ultime sollicitant la section et le moment résistant du béton.

- $N_{st} = N_{st1} + N_{st2}$ (4.20)

➤ **Calcul du moment résistant du béton M_r :**

$$\mu_l = M_r / (b \cdot d^2 \cdot f_{bu}) \text{(4.21)}$$

avec μ_l : le moment ultime réduit limite

$$\Rightarrow M_r = \mu_l \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bu} \text{(4.22)}$$

➤ **Calcul du moment résiduel ΔM :**

$$\Delta M = M_u - M_r \text{(4.23)}$$

➤ **Calcul des armatures tendues de la section fictive 1 (A_{st1}):**

$$A_{st1} = M_r / (\sigma_{st} \cdot \beta_l \cdot d) \text{ (voir paragraphe 4.2.2.1),}$$

On a : $\varepsilon_{st} = \varepsilon_l \Rightarrow \sigma_{st} = f_{su}$ (voir Fig. 2.3 et Fig. 4.3)

Donc : $A_{st1} = M_r / (f_{su} \cdot \beta_l \cdot d)$ (4.24)

➤ **Calcul des armatures tendues de la section fictive 2 (A_{st2}):**

$$\Delta M = N_{st2} \cdot (d - d')$$
(4.25)

$$N_{st2} = f_{su} \cdot A_{st2}$$
(4.26)

En remplaçant (4.26) dans (4.25), on a:

$$\Delta M = f_{su} \cdot A_{st2} \cdot (d - d') \Rightarrow A_{st2} = \Delta M / (f_{su} \cdot (d - d'))$$
(4.27)

➤ **Calcul des armatures comprimées de la section fictive 2 (A_{sc}):**

$$N_{sc} = N_{st2}$$
(4.28)

$$\Delta M = N_{sc} \cdot (d - d')$$
(4.29)

$$N_{sc} = \sigma_{sc} \cdot A_{sc}$$
(4.30)

En remplaçant (4.30) dans (4.29), on a :

$$\Delta M = \sigma_{sc} \cdot A_{sc} \cdot (d - d')$$

$$\Rightarrow A_{sc} = \Delta M / (\sigma_{sc} \cdot (d - d')) \dots \dots \dots (4.31)$$

❖ **Détermination de la contrainte de l'acier comprimé (σ_{sc}) :**

- En se basant sur le principe des triangles semblables (Fig. 1.6), on a :

$$\frac{\varepsilon_{sc}}{3.5 \cdot 10^{-3}} = \frac{y_u - d'}{y_u} \Rightarrow \varepsilon_{sc} = 3.5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{\alpha_1 \cdot d - d'}{\alpha_1 \cdot d} \right) \dots \dots \dots (4.32)$$

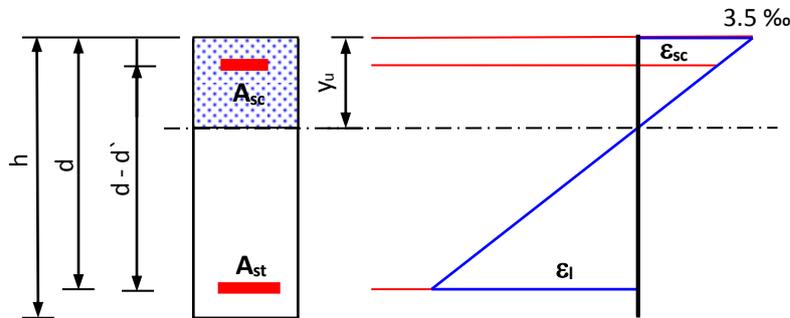
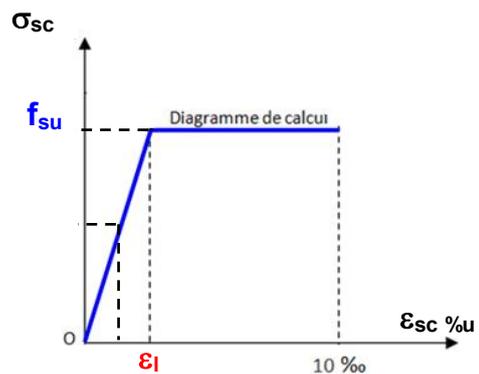


Fig. 1.6 : Diagramme de déformation

- En connaissant ε_{sc} on peut déterminer σ_{sc} :

➤ Si $\varepsilon_{sc} < \varepsilon_l \Rightarrow \sigma_{sc} = \varepsilon_{sc} \cdot E_{sc}$

➤ Si $\varepsilon_{sc} > \varepsilon_l \Rightarrow \sigma_{sc} = f_{su}$



- Finalement, on remplace la valeur de σ_{sc} dans la relation (4.31) pour déterminer la section des armatures A_{sc} .

➤ La section totale des armatures tendues A_{st} : $A_{st} = A_{st1} + A_{st}$

1.2.3 Section en T

Les poutres en béton armé d'un bâtiment ou d'un pont supportent souvent des dalles, le règlement BAEL autorise de considérer qu'une certaine largeur du hourdis fasse partie intégrante des poutres, alors la section droite de la poutre a la forme d'un té (Fig. 1.7).

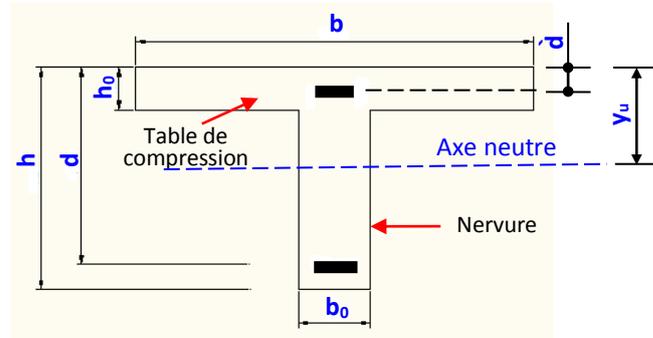


Fig. 1.7 : Élément en béton armé de section en forme d'un té

4.2.3.1 Largeurs des tables de compression des poutres en T

La largeur de hourdis à prendre en compte de chaque côté d'une nervure, à partir de son parement, ne doit pas dépasser **la plus faible** des valeurs ci-après (Fig. 1.8):

- **la moitié** de la distance entre les faces voisines de deux nervures consécutives;
- **le dixième** de la portée de la travée;
- **les deux tiers** de la distance de la section considérée à l'axe de l'appui extrême le plus rapproché.

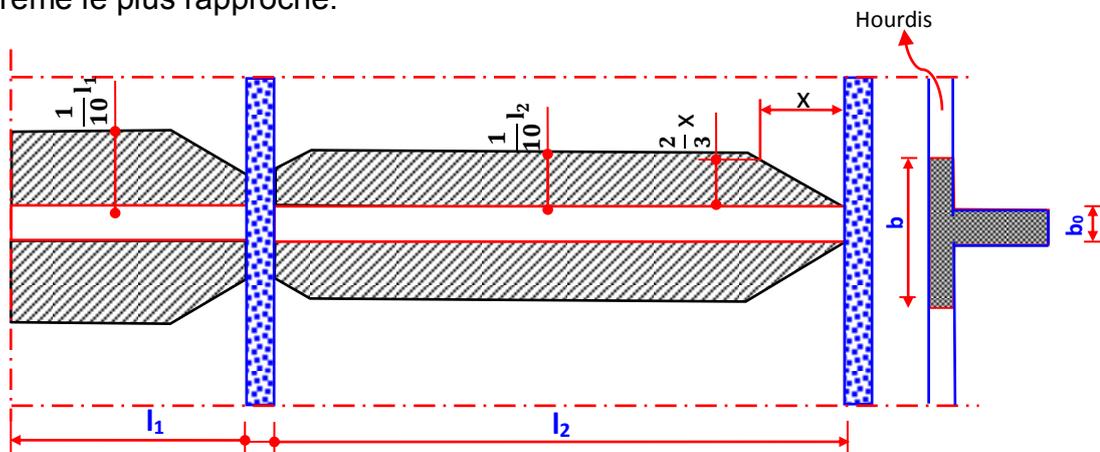


Fig. 1.8 : Largeur de la table de compression

1.2.3.2 Section sans aciers comprimés

Dans l'étude d'une section en T, il est nécessaire de savoir si la partie comprimée n'intéresse que la table, ou si elle intéresse également la nervure, c'est-à-dire on doit chercher la position de la fibre neutre. Pour cela on calculera le moment M_t équilibré par la table.

➤ **Le moment équilibré par la table seule M_t :**

$$M_t = b \cdot h_0 \cdot \left(d - \frac{h_0}{2} \right) \cdot f_{bu} \dots\dots(4.33)$$

Deux cas peuvent se présenter :

➤ **Le premier cas : $M_t \geq M_u$**

➤ Le diagramme rectangulaire est dans la table seule, on calcule la section comme une section rectangulaire de hauteur utile d et de largeur b (celle de la table) (Fig. 1.9) (voir le paragraphe 4.2.2).

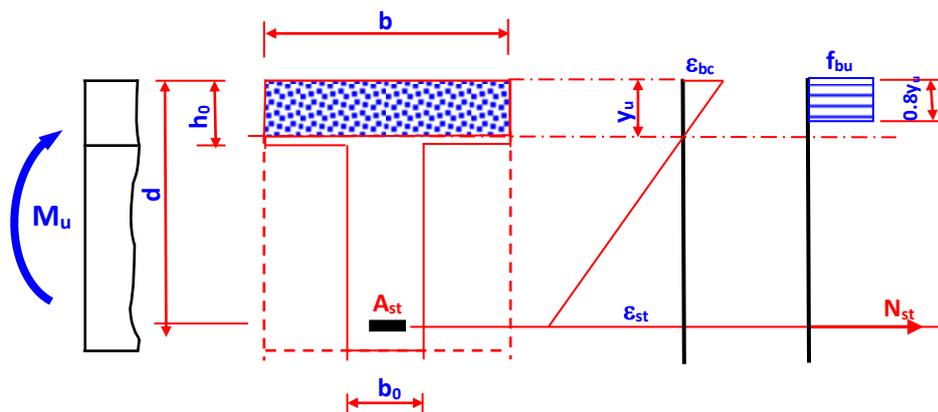


Fig. 1.9: Principe de calcul à l'ELU d'une section en T, avec : $M_t \geq M_u$

➤ **Le deuxième cas : $M_t < M_u$**

La compression intéresse la table et une partie de la nervure, c'est le cas qui correspond réellement à celui d'une poutre en T.

Pour la détermination des sections d'acier, le principe de calcul se base sur la décomposition de la section en T en deux sections fictives (voir Fig. 1.10).

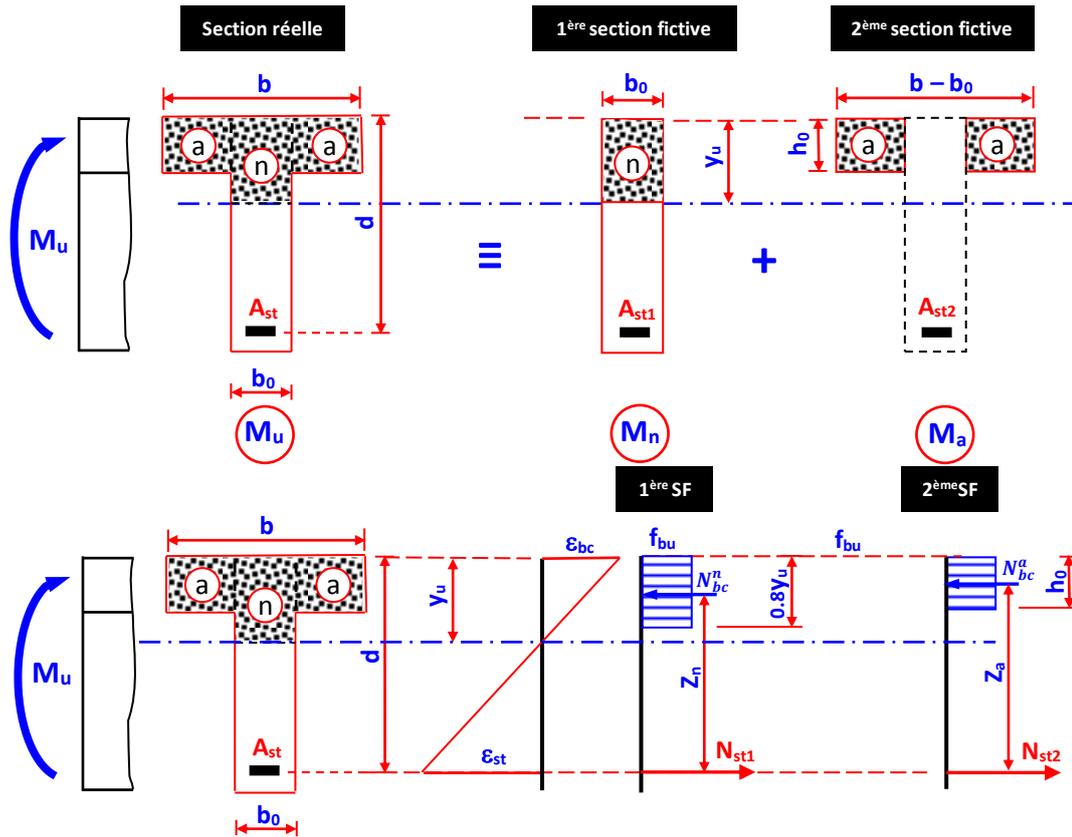


Fig. 1.10: Principe de calcul à l'ELU d'une section en T, avec : $M_t < M_u$

Avec :

M_n : moment de l'effort de compression N_{bc}^n agissant sur la partie comprimée de la nervure par rapport au C.D.G des armatures tendues.

M_a : moment de l'effort de compression N_{bc}^a agissant sur les ailes de la section par rapport au C.D.G des armatures tendues.

$$\bullet M_u = M_n + M_a = N_{bc}^n \cdot Z_n + N_{bc}^a \cdot Z_a \dots\dots\dots(4.34)$$

$$\bullet A_{st} = A_{st1} + A_{st2} \dots\dots\dots(4.35)$$

➤ **Calcul de M_a**

$$M_a = N_{bc}^a \cdot Z_a = [(b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu}] \cdot \left(d - \frac{h_0}{2}\right) \dots\dots\dots(4.36)$$

➤ **Calcul de M_n**

$$M_n = M_u - M_a \dots\dots(4.37)$$

➤ **Calcul de la première section fictive**

1. $\mu_{bu} = M_n / (b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu})$;
2. Calcul du moment ultime réduit limite μ_l ;
3. Comparaison des moments réduits : $\mu_{bu} \leq \mu_l$?
 - $\mu_{bu} \leq \mu_l \Rightarrow A_{sc} = 0$ (section sans armatures comprimée)
 - $\mu_{bu} > \mu_l \Rightarrow A_{sc} \neq 0$ (section avec armatures comprimée)
4. **Si $\mu_{bu} \leq \mu_l$:**
 - Calcul de $\alpha_u \rightarrow$ nature du pivot $\rightarrow \sigma_{st}$
 - Calcul de β_u
 - Calcul de A_{st1} : $A_{st1} = M_n / (\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d) \dots\dots\dots(4.38)$

➤ **Calcul de la deuxième section fictive**

$$N_{st2} = N_{bc}^a \Rightarrow A_{st2} \cdot f_{su} = (b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu}$$

$$A_{st2} = (b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu} / f_{su} \dots\dots\dots(4.39)$$

➤ **Calcul de la section totale des armatures tendues**

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2}$$

1.2.3.3 Section avec aciers comprimés

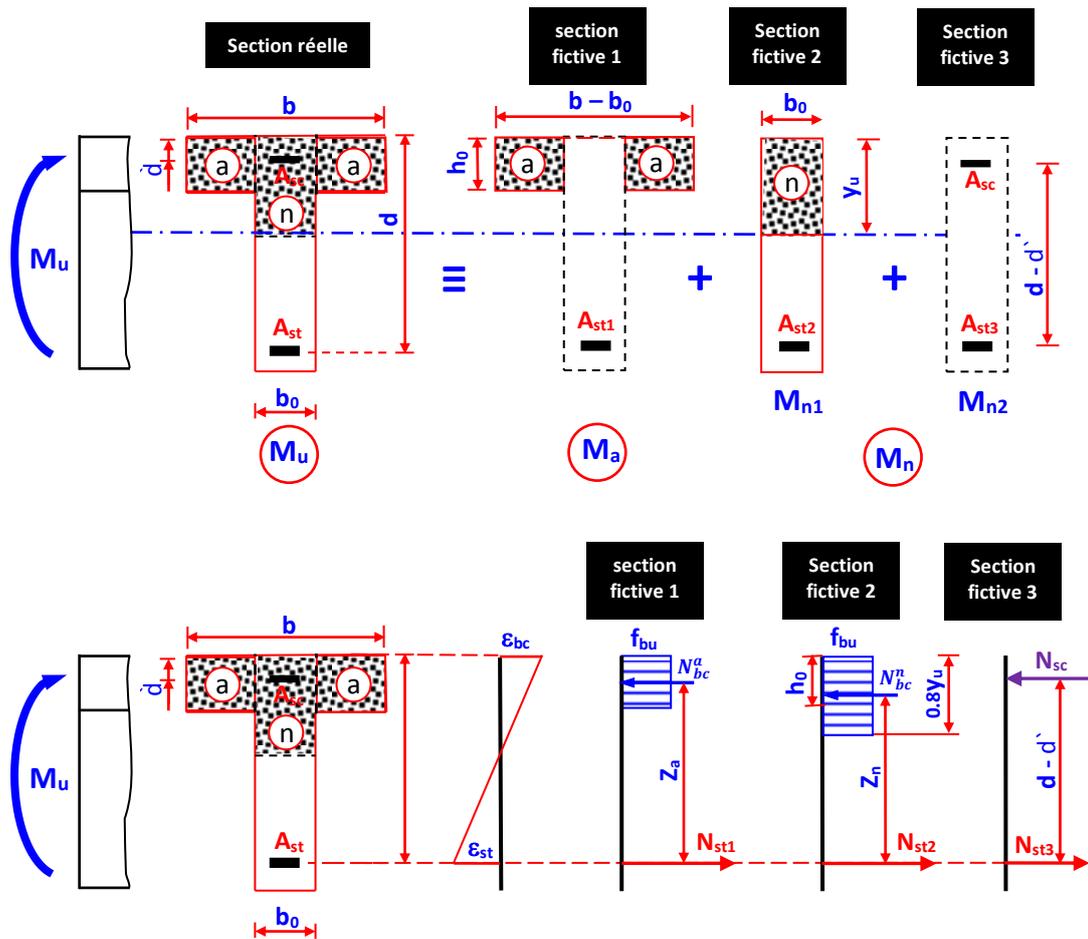


Fig. 1.11 : Principe de calcul à l'ELU d'une section en T avec aciers comprimés

- Voir Fig. 1.11.
- $M_u = M_a + M_n$
- $M_n = M_{n1} + M_{n2} \Rightarrow M_u = M_a + M_{n1} + M_{n2}$
- $A_{st} = A_{st1} + A_{st2} + A_{st3}$

➤ **Calcul de M_a et de M_n :**

Il est fait selon la même méthode suivie dans le cas de la section sans aciers comprimés.

➤ **Calcul de la section fictive 1**

- $M_a = N_{bc}^a \cdot Z_a = N_{st1} \cdot Z_a = A_{st1} \cdot f_{su} \cdot Z_a = A_{st1} \cdot f_{su} \cdot (d - \frac{h_0}{2})$

- $A_{st1} = \frac{M_a}{f_{su} \cdot (d - \frac{h_0}{2})} \dots\dots\dots(4.40)$

➤ **Calcul de la section fictive 2**

- On a comme données μ_l , α_l et β_l
- Calcul du moment résistant du béton M_r :

$$M_r = \mu_l \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bu} = M_{n1}$$

- Calcul du moment résiduel M_{n2} :

$$M_{n2} = M_n - M_{n1}$$

- Calcul des armatures tendues de la section fictive A_{st2} :

- $A_{st2} = M_{n1} / (f_{su} \cdot \beta_l \cdot d) \dots\dots\dots(4.41)$

➤ **Calcul de la section fictive 3**

❖ **Section théorique des armatures comprimées (A_{sc}):**

- $M_{n2} = \sigma_{sc} \cdot A_{sc} \cdot (d - d') \Rightarrow A_{sc} = M_{n2} / (\sigma_{sc} \cdot (d - d')) \dots\dots\dots(4.42)$

- $\epsilon_{sc} = 3.5 \cdot 10^{-3} \cdot (\frac{\alpha_1 \cdot d - d'}{\alpha_1 \cdot d})$

- $\epsilon_{sc} \rightarrow \sigma_{sc} \rightarrow A_{sc}$

❖ **Section théorique des armatures tendues (A_{st3}):**

- $M_{n2} = N_{st3} \cdot (d - d') \dots\dots\dots(4.43)$

- $N_{st3} = f_{su} \cdot A_{st3} \dots\dots\dots(4.44)$

- En remplaçant (4.44) dans (4.43), on a: $M_{n2} = f_{su} \cdot A_{st3} \cdot (d - d')$

$$\Rightarrow A_{st3} = M_{n2} / (f_{su} \cdot (d - d')) \dots\dots\dots(4.45)$$

➤ **Section théorique totale des armatures tendues :**

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2} + A_{st3}$$

➤ **Section théorique des armatures comprimées : A_{sc}**

1.3 Les justifications vis-à-vis de l'E.L.S

Il s'agit des états limites de service vis-à-vis de la durabilité de la structure. Les justifications vis-à-vis de l'ELS s'effectuent :

- soit par la vérification des contraintes ;
- ou par le calcul de la section d'armature comparée à celle obtenue à l'ELUR.

L'expérience a montré que lorsque la fissuration est considérée peu préjudiciable (FPP) ou préjudiciable (FP), le dimensionnement se fait à l'ELU et la vérification à l'ELS, alors que pour le cas de la fissuration très préjudiciable (FTP), il faut faire le dimensionnement à l'ELS et la vérification à l'ELU.

Dans ce cours, on se limitera à la vérification des contraintes, c'est-à-dire, on doit s'assurer du non-dépassement des contraintes limites de calcul à l'ELS:

- de compression du béton,
- de traction des aciers suivant le cas de fissuration étudié.

1.3.1 Hypothèses de calcul

Rappel : (voir chapitre 2 - BA I)

- Les sections droites restent planes après déformation ;
- Il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton ;
- Le béton tendu est négligé ;

- Le béton et l'acier sont considérés comme matériaux linéairement élastiques (figure 1.12);
- Le Coefficient d'équivalence n est pris égal à **15** ($n = \frac{E_s}{E_b}$), donc une section A_s des aciers est équivalente à une section fictive $n \cdot A_s$, c'est-à-dire **15. A_s** , par conséquent la contrainte de l'acier est n fois plus forte que celle du béton situé à la même distance y de l'axe neutre :

$$\sigma_{st} = n \sigma_{bt} \text{ et } \sigma_{sc} = n \sigma_{bc} \text{ donc } \sigma_{bt} = \sigma_{st}/n \text{ et } \sigma_{bc} = \sigma_{sc}/n$$

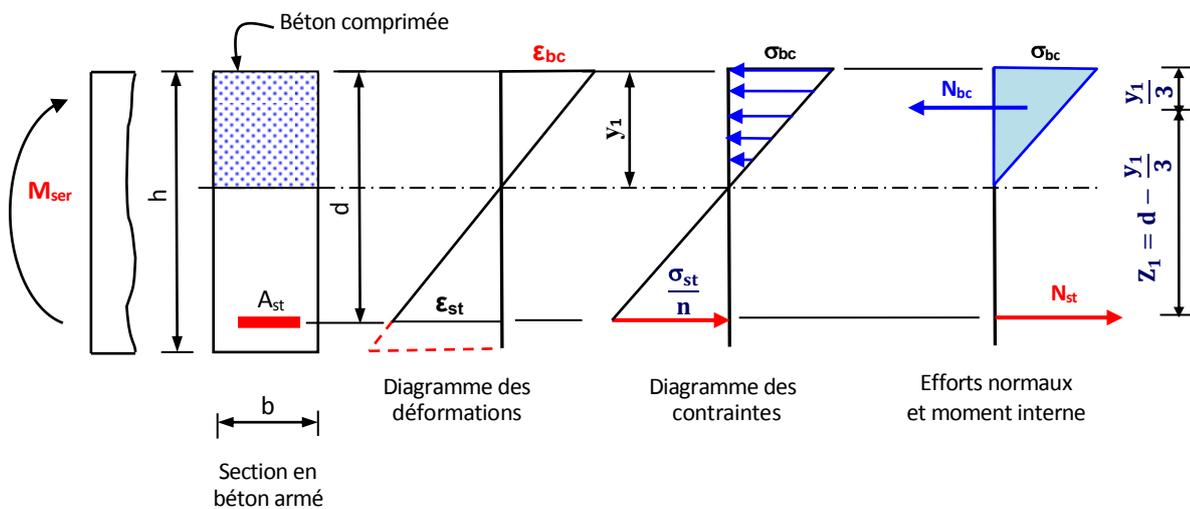


Fig. 1.12 : Déformations et contraintes à l'ELS

- La contrainte de compression du béton, symbole σ_{bc} , est limitée à:

$$\overline{\sigma}_{bc} = 0.6 f_{cj} \quad (\text{voir chapitre 2})$$

- La contrainte de traction des aciers, symbole σ_{st} , est limitée suivant les cas de fissuration (voir chapitre 2):

– fissuration peu préjudiciable (FPP) : $\overline{\sigma}_{st} = f_e$

– fissuration préjudiciable (FP) : $\overline{\sigma}_{st} = \min\left(\frac{2}{3} f_e, \max\left(\frac{1}{2} f_e, 110 \sqrt{\eta f_{tj}}\right)\right)$

– fissuration très préjudiciable (FTP) : $\overline{\sigma}_{st} = \min\left(0.8 \left(\frac{2}{3} f_e, \max\left(\frac{1}{2} f_e, 110 \sqrt{\eta f_{tj}}\right)\right)\right)$

1.3.2 Combinaisons d'actions

La combinaison d'action pour le calcul à l'état limite de service dans le cas courant est donné par: **G + Q**

1.3.3 Caractéristiques géométriques

1.3.3.1 Position de l'axe neutre

a. Pour une section rectangulaire homogénéisée

Le moment statique par rapport à un axe passant par le centre de gravité de la section (l'axe neutre) est nul.

➤ Pour une section rectangulaire avec armatures comprimées ($A_{sc} \neq 0$) (Fig. 1.13):

$$M_{s/GX} = 0 \Rightarrow b \frac{y_1^2}{2} + nA_{sc} (y_1 - d') - nA_{st}(d - y_1) = 0 \dots\dots\dots(4.46)$$

Les valeurs de y_1 sont obtenues en résolvant cette équation de deuxième degré à une inconnue.

y_1 : la distance entre la fibre la plus comprimée de la section et l'axe neutre.

➤ Pour une section rectangulaire sans armatures comprimées ($A_{sc} = 0$), l'équation (4.46) devient :

$$b \frac{y_1^2}{2} - nA_{st}(d - y_1) = 0 \dots\dots(4.47)$$

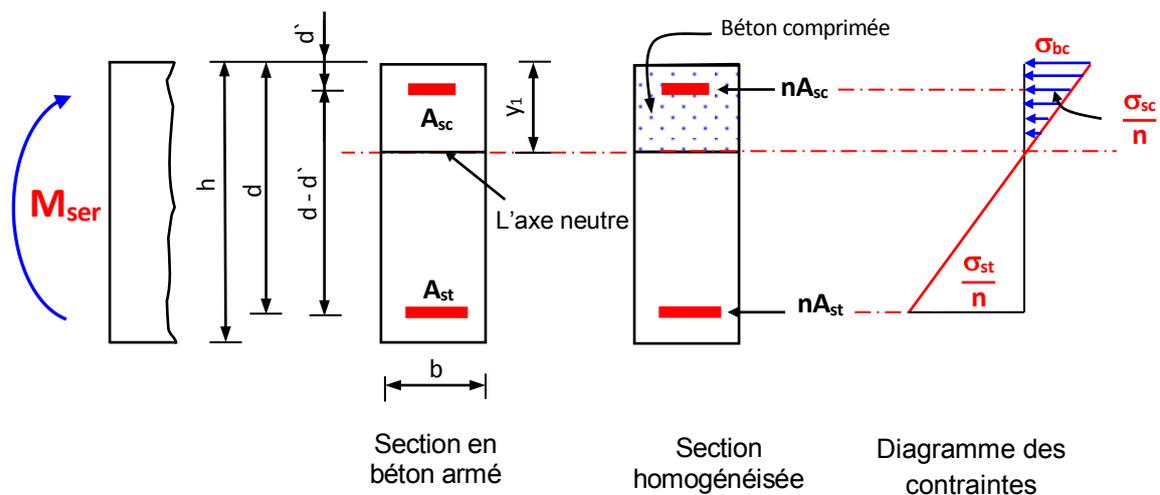


Fig. 1.13 : Section rectangulaire avec armatures comprimées.

b. Pour une section en T homogénéisée

La position de l'axe neutre est déterminée en calculant le moment statique par rapport à l'axe situé à la distance h_0 de la fibre la plus comprimée (Fig. 1.14).

$$H = \frac{b}{2} h_0^2 + n \cdot A_{sc}(h_0 - d') - n \cdot A_{st}(d - h_0) \dots\dots\dots (4.48)$$

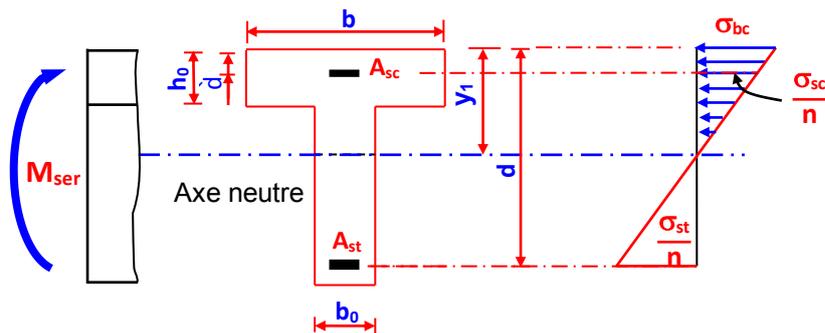


Fig. 1.14 : Section en T avec armatures comprimées.

On distingue deux cas :

- **1^{er} cas :** $H \geq 0 \Rightarrow y_1 \leq h_0$, l'axe neutre tombe dans la table \Rightarrow comportement en section rectangulaire de largeur b,
- **2^{ème} cas :** $H < 0 \Rightarrow y_1 > h_0$, l'axe neutre tombe dans la nervure \Rightarrow comportement comme une section en T.

1^{er} cas :

L'axe neutre est dans la table, dans ce cas, y_1 est déterminé par l'équation des moments statiques :

$$b \frac{y_1^2}{2} + n A_{sc}(y_1 - d') - n A_{st}(d - y_1) = 0$$

2^{ème} cas :

L'axe neutre est dans la nervure, dans ce cas, y_1 est déterminé par l'équation des moments statiques par rapport à l'axe neutre:

$$b \frac{y_1^2}{2} - (b - b_0) \frac{(y_1 - h_0)^2}{2} + n A_{sc}(y_1 - d') - n A_{st}(d - y_1) = 0 \dots\dots(4.49)$$

1.3.3.2 Moment d'inertie par rapport à l'axe neutre

a. Pour une section rectangulaire homogénéisée

➤ Pour une section rectangulaire avec armatures comprimées ($A_{sc} \neq 0$) (Fig. 4.12)

$$I_x = b \frac{y_1^3}{3} + nA_{sc}(y_1 - d')^2 + nA_{st}(d - y_1)^2 \dots\dots\dots (4.50)$$

➤ Pour une section rectangulaire sans armatures comprimées ($A_{sc} = 0$)

$$I_x = b \frac{y_1^3}{3} + nA_{st}(d - y_1)^2 \dots\dots\dots (4.51)$$

b. Pour une section en T homogénéisée

1^{er} cas :

L'axe neutre est dans la table, dans ce cas, le moment d'inertie est donné comme suit :

$$I_x = b \frac{y_1^3}{3} + nA_{sc}(y_1 - d')^2 + nA_{st}(d - y_1)^2 \dots\dots\dots (4.52)$$

2^{ème} cas :

L'axe neutre est dans la nervure, dans ce cas, le moment d'inertie est donné comme suit :

$$I_x = b \frac{y_1^3}{3} - (b - b_0) \frac{(y_1 - h_0)^3}{3} + nA_{sc}(y_1 - d')^2 + nA_{st}(d - y_1)^2 \dots\dots\dots (4.53)$$

1.3.4 Calcul des contraintes du béton et de l'acier

D'après les hypothèses adoptées à l' E.L.S, le béton et l'acier sont considérés comme matériaux linéairement élastiques, par conséquent, les contraintes normales maximales dans la section sont comme suit :

- **Contrainte de compression du béton :**

$$\sigma_{bc} = \frac{M_{ser}}{I_x} y_1$$

- **Contrainte de compression des aciers:**

$$\sigma_{sc} = n \frac{M_{ser}}{I_x} (y_1 - d')$$

- **Contrainte de traction des aciers:**

$$\sigma_{st} = n \frac{M_{ser}}{I_x} (d - y_1)$$

1.3.5 Vérification des contraintes

Les valeurs de σ_{bc} , σ_{sc} et σ_{st} sont comparées avec les contraintes limites :

$$\overline{\sigma}_{bc}, \overline{\sigma}_{sc} \text{ et } \overline{\sigma}_{st}$$

1.3.6 Détermination des sections d'armatures et dimensionnement

Les éléments de structures en B.A. soumis à un moment de flexion simple M_{ser} sont généralement calculés à l'état limite de service dans les cas suivants:

- fissuration préjudiciable (**F.P.**),
- fissuration très préjudiciable (**F.T.P.**)

On doit mentionner qu'en cas de fissuration préjudiciable ou très préjudiciable l'état limite d'ouverture des fissures (σ_s limité) est toujours l'état-limite déterminant. Le calcul à l'état-limite ultime est donc **inutile**.

Pour les calculs à l'état-limite de service, on se réfère à la notion de **moment résistant**. Celui-ci, noté M_{rb} , est défini comme le moment pour lequel l'état-limite de compression du béton ($\sigma_{bc} = \overline{\sigma}_{bc}$) et l'état-limite d'ouverture des fissures ($\sigma_{st} = \overline{\sigma}_{st}$) sont atteints simultanément (figure 4.12).

4.3.6.1 Section rectangulaire

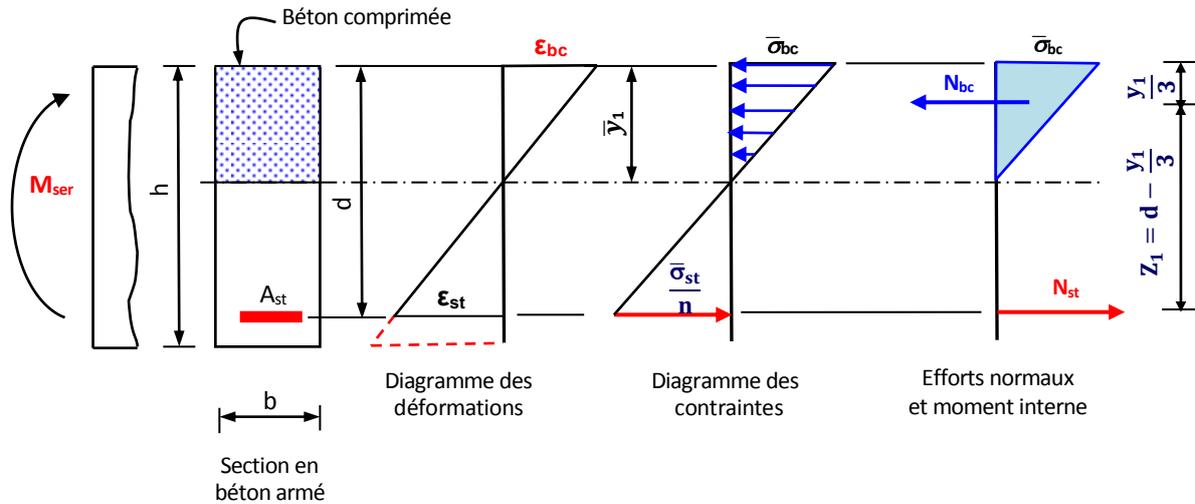


Fig. 1.15 : Section rectangulaire à l'ELS, pour le calcul du moment résistant du béton M_{rb} .

A travers le diagramme des contraintes de la section homogénéisée (Fig. 1.15), on

tire la relation :

$$\frac{\sigma_{bc}}{\frac{\sigma_{st}}{n}} = \frac{y_1}{d - y_1}, \quad \frac{y_1}{d} = \frac{n \cdot \sigma_{bc}}{n \cdot \sigma_{bc} + \sigma_{st}}$$

On a donc :

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\bar{y}_1}{d} = \frac{n \cdot \bar{\sigma}_{bc}}{n \cdot \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_{st}}$$

La résultante des efforts de compression dans le béton est :

$$N_{bc} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \bar{\sigma}_{bc} \cdot \bar{y}_1$$

Elle est appliquée à la distance $\frac{\bar{y}_1}{3}$ de la fibre la plus comprimée, d'où :

$$M_{rb} = N_{bc} \cdot (d - \frac{\bar{y}_1}{3}) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \bar{\sigma}_{bc} \cdot \bar{y}_1 \cdot (d - \frac{\bar{y}_1}{3}) = \frac{1}{2} \cdot \bar{\sigma}_{bc} \cdot b \cdot d^2 \cdot \bar{\alpha}_1 \cdot (1 - \frac{\bar{\alpha}_1}{3})$$

D'où le moment résistant béton réduit :

$$\mu_{rb} = \frac{1}{2} \cdot \bar{\alpha}_1 \cdot (1 - \frac{\bar{\alpha}_1}{3}) = \frac{M_{rb}}{b \cdot d^2 \cdot \bar{\sigma}_{bc}}$$

Et :

$$M_{rb} = \mu_{rb} \cdot b \cdot d^2 \cdot \bar{\sigma}_{bc}$$

Calcul des armatures :

1. Cas où $M_{ser} \leq M_{rb}$:

Ce cas veut dire physiquement que , $\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc}$ et $\sigma_{st} = \bar{\sigma}_{st}$.

La section d'aciers tendus est donnée par :

$$A_{st} = \frac{M_{ser}}{\beta_1 \cdot d \cdot \bar{\sigma}_{st}}$$

La valeur de $\beta_1 = \frac{z_1}{d}$ est tirée d'une figure spéciale en fonction de $\frac{M_{ser}}{b \cdot d^2 \cdot \bar{\sigma}_{st}}$. En pratique, à défaut d'une évaluation plus précise, on utilise une valeur approchée par défaut de z_1 qui conduit à une section A_{st} par excès.

On prend : $\beta_1 = \bar{\beta}_1$

avec $\bar{\beta}_1 = \frac{\bar{z}_1}{d}$ et $\bar{z}_1 = d \cdot \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_1}{3}\right)$	et $\bar{\alpha}_1 = \frac{15 \cdot \bar{\sigma}_{bc}}{15 \cdot \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_{st}}$
---	---

2. Cas où $M_{ser} > M_{rb}$:

On a $\sigma_{bc} > \bar{\sigma}_{bc}$, on peut :

- soit modifier les dimensions, en augmentant d de préférence ;
- soit disposer des armatures comprimées $A_{sc} \neq 0$.

Cas d'une section rectangulaire avec aciers comprimés :

On décompose la section réelle en deux sections fictives (Fig. 1.16) (voir paragraphe 4.2.2.2)

- une section fictive 1, de largeur b , sans aciers comprimés,
- une section fictive 2, sans béton, munie de la section A_{sc} (A') d'aciers comprimés.

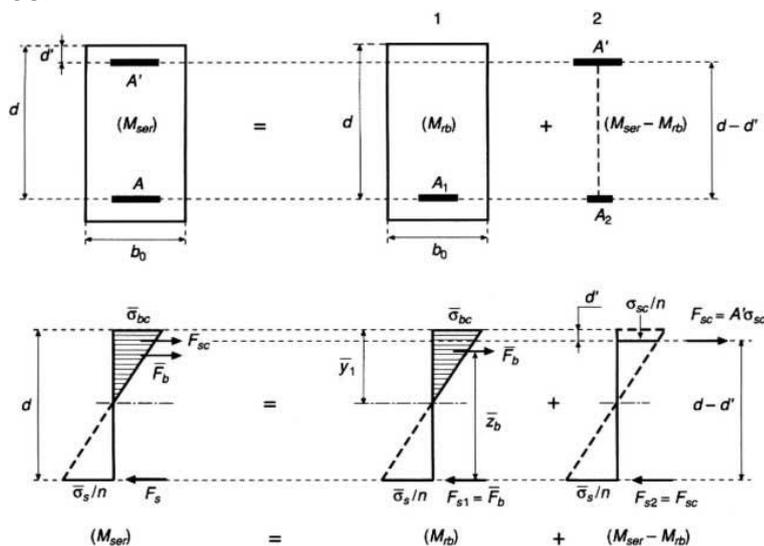


Fig. 1.16 : Principe de calcul à l'ELS, d'une section en T avec armatures comprimées

✚ Le béton comprimé seul peut équilibrer un moment au plus égal à M_{rb} . Les armatures comprimées sont déterminées pour équilibrer le complément : $M_{ser} - M_{rb}$

✚ La section d'acier comprimé strictement nécessaire est :

$$A_{sc} = \frac{M_{ser} - M_{rb}}{\sigma_{sc} \cdot (d - \acute{d})}$$

avec : $\sigma_{sc} = 15 \bar{\sigma}_{bc} \frac{\bar{\alpha}_1 - \delta}{\bar{\alpha}_1}$, et $\delta = \frac{\acute{d}}{d}$

La section d'aciers tendus est donnée par :

avec $\bar{\beta} = (1 - \frac{\bar{\alpha}_1}{3})$

$$A_{st} = \frac{M_{rb}}{\bar{\beta} \cdot d \cdot \bar{\sigma}_{st}} + A_{sc} \frac{\sigma_{sc}}{\bar{\sigma}_{st}}$$

1.3.6.1 Section en T

a. Section sans armatures comprimées

Moment équilibré par la table seule, par rapport aux aciers tendus (Fig. 1.17) :

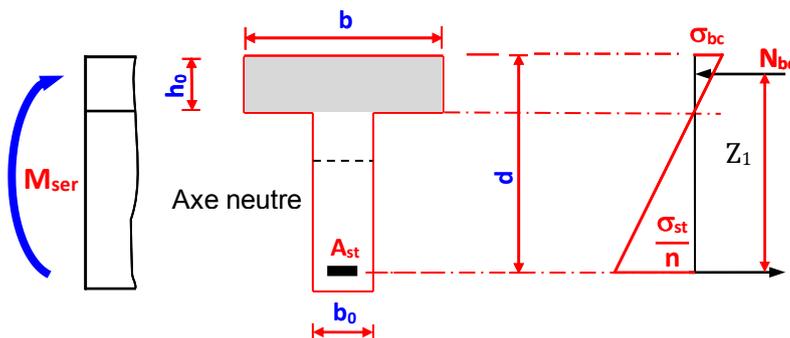


Fig. 1.17 : Diagramme des contraintes (seule la table est comprimée).

- $M_{bt} = N_{bt} \cdot Z_1 = N_{bt} \cdot (d - \frac{h_0}{3})$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sigma_{bc} \cdot b \cdot h_0 \cdot (d - \frac{h_0}{3})$$

- σ_{bc} en fonction de σ_{bc} (triangles semblables) :

- $\sigma_{bc} = \frac{\sigma_{st}}{n} \cdot \frac{h_0}{(d-h_0)}$ (choix de $\sigma_{st} = \bar{\sigma}_{st}$, en générale pour avoir $\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc}$)

Par suite :

$$M_{bt} = \frac{b \cdot h_0^2 \cdot (d - \frac{h_0}{3}) \cdot \bar{\sigma}_{st}}{30 (d - h_0)}$$

On distingue deux cas :

1. **l'axe neutre est dans la table** : méthode de calcul identique à une section rectangulaire de largeur b ;
2. **l'axe neutre est dans la nervure** : voir la méthode exposée dans les organigrammes.

1.4 Condition de non-fragilité

La condition de non fragilité conduit à placer une section minimale d'armatures tendues pour une dimension de coffrage donnée.

- **Pour les pièces de section rectangulaire** soumises à la flexion simple (A.4.2), on a:

$$A_{st} \geq A_{min} \quad \text{avec : } A_{min} = 0.23 bd \frac{f_{t28}}{f_e}$$

b et d : sont les dimensions de la section.

- **Pour les pièces de section en T** soumises à la flexion simple (Fig. 1.18):

$$A_{min} = \frac{I_{Gz}}{(d - \frac{h_0}{3})v} \frac{f_{t28}}{f_e}$$

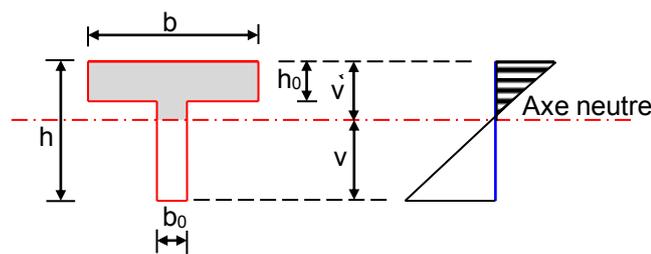


Fig. 1.18 : Diagramme des contraintes pour une section en T

$$I_{Gz} = b_0 \frac{h^3}{3} + (b - b_0) \frac{h_0^3}{3} - [b_0 h + (b - b_0) h_0] v'^2$$

$$v' = \frac{b_0 h^2 + (b - b_0) h_0^2}{2[b_0 h + (b - b_0) h_0]}$$

$$v = h - v'$$