الفصل الأول: البرمجة الخطية
Linear programming (LP)

1. مفهوم البرمجة الخطية.
2. إستخدامات البرمجة الخطية.
3. شروط إستخدام البرمجة الخطية.
4. صياغة نموذج البرمجة الخطية.
5. حل نموذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية.

- حالة تعظيم الأرباح باستخدام الرسوم البيانية.
- حالة تقليل التكاليف باستخدام الرسوم البيانية.

الفصل الأول: البرمجة الخطية
Linear programming (LP)

تقدمت وسائل التحليل الرياضي للمشاكل الإدارية والاقتصادية تقدما كبيرا وتعتبر البرمجة الخطية إحدى هذه الوسائل وقد استخدمت كلمة *Programming* كأداة تهدف إلى استغلال الموارد المتاحة للمؤسسة من قوة عاملة ومواد أولية... الخ لتحقيق اكبر عائد ممكن.

وتهدف البرمجة الخطية إلى الإجابة بأسلوب التحليل الرياضي على بعض الأسئلة وحل المشاكل بما يحقق اكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة في ظل القيود والمحددات القائمة.

وعموما فان أداء أي عمل بأفضل الوسائل يعني في حد ذاته البحث عن الحدود الدنيا أو القصوى. فعندما تتعلق المشكلة بالتكاليف فإن الهدف عادة يكون الوصول إلى الحد الأدنى وإذا تعلق الأمر بالأرباح فان الهدف يكون هو الوصول إلى الحد الأقصى.

1. مفهوم البرمجة الخطية:

هي أداة رياضية تساهم في مساعدة المديرين عل اتخاذ قرارات إدارية تتعلق باستخدام الموارد المتاحة بهدف تحقيق أقصى عائد ممكن أو أقل تكلفة ممكنة. و لكن لا يعتبر هذا الاستخدام الوحيد لها فلا يكاد يخلو مجال من مجالات استخدام رياضيات المؤسسة إلا ونجد البرمجة الخطية تمثل جزء مباشر ًا أو غير مباشر من أسلوب الحل. **(عرب، 2008)**

البرمجة الخطية هي تكتيك رياضي يهتم بحل مشاكل الصناعة على وجه العموم فيما يتعلق بتصغير وتعظيم الدوال الخطية بوجود قيود أطرافها متساوية وأقل من وأكبر من، ويرجع حل هذه المعادلات للعالم (George B. Dantzig 1947) ويستخدم تكتيك البرمجة الخطية لحل المشاكل العسكرية والمدنية والصناعية بالإضافة إلى تخطيط المدن ومجالات أخرى. **(الشيخ، 2009، صفحة 25)**

2. إستخدامات البرمجة الخطية:

إن إستخدامات البرمجة الخطية قد اتسعت لتشمل معظم نواحي الحياة سواء أكان ذلك في القطاع العام أو الخاص، في مؤسسة إنتاجية أو خدمية، وهادفة للربح أم غير هادفة، والأمثلة الآتية تعطي فكرة سريعة عن أوجه استخدام البرمجة الخطية:

– أحد مدراء المصانع يرغب في وضع جدول إنتاج وتحديد سياسة المخزون بالشكل الذي يعمل على إشباع الطلب في المستقبل وكذلك تقليل أو تخفيض مجموع تكلفة الإنتاج والتخزين إلى حدها الأدنى. علما أن هذا المدير قد فرضت عليه قيود متعلقة بالطلب وكذلك الطاقة الإنتاجية المتاحة؛

– محلل مالي يريد أن يحدد مكونات المحفظة المالية وبالشكل الذي يؤدي إلى زيادة العائد على الإستثمار. ويمكن تصور المبلغ الكلي المخصص للإستثمار والمبلغ المخصص للإستثمار في كل من الأسهم والسندات، كقيود على المحلل؛

– يرغب مدير التسويق في المؤسسات في تحديد كيفية توزيع ميزانية الإعلان المحددة بين البدائل المتعلقة بوسائل الإعلان المختلفة مثل: الراديو، والتلفزيون، الجرائد، والمجلات...الخ بحيث أن هذا التوزيع يؤدي إلى إختيار وسائل الإعلان التي تؤدي إلى تعظيم تأثير الإعلان (زيادة الطلب). حيث تمثل الميزانية وتوفر وسائل الإعلان المختلفة قيودا على مدير التسويق؛

– إحدى المؤسسات لها مخازن في مناطق متعددة وترغب في سد احتياجات مناطق مختلفة من محتويات هذه المخازن. وهنا نواجه مشكلة إشباع طلبات المناطق من المخازن المختلفة وبأقل تكلفة ممكنة. والقيود هنا هي احتياجات المناطق والكميات المعروضة أو المتوفرة في المخازن. **(الطراونة و عبيدات، 2009، صفحة 77)**

3. شروط إستخدام البرمجة الخطية:

يعتمد أسلوب البرمجة الخطية على مجموعة من الشروط أو الفرضيات الواجب توفرها من أجل التعبير عن المشكلة المواجهة رياضيا وأهمها:

– **العلاقة الخطية:** يجب أن تكون العلاقات بين العوامل والمتغيرات في المسألة خطية. ومن هذا الشرط تستمد البرمجة الخطية أسمها. ويعني ذلك أن تكون دالة الهدف والقيود المفروضة على المسالة على هيئة معادلات أو متراجحات من الدرجة الأولى؛

– **الشكل الكمي للمتغيرات:** يجب أن يكون من الممكن التعبير عن العوامل في المسألة في شكل كمي؛

– **عنصر التأكد:** يجب أن يتوفر عنصر التأكد من مختلف المعطيات التي تشكل المسألة، أي أن يكون المستقبل معروف بشكل تام ومن ثم تكون العلاقات معلومة ومؤكدة أيضا، كما يعني هذا أن نموذج البرمجة الخطية هو نموذج محدد؛

– **علاقة التأثير بين المجاهيل:** ويعني ذلك أن يكون هناك تأثير متبادل بين المجاهيل التي تشكل النموذج الرياضي والتي نسعى إلى تحديد قيمتها، حيث أن أي تغير في إحداها سيؤدي حتما إلى إحداث تغير في المجاهيل الأخرى بالزيادة و/أو النقصان؛

– **توفر البدائل:** يجب أن تكون هناك إستخدامات متعددة أو متنافسة للموارد المتاحة وهذا يعني وجود عدد من المجاهيل (متغيرين على الأقل) والتي تشكل الغاية من حل النموذج الرياضي للبرنامج الخطي. ويعني ذلك أنه بإمكان المؤسسة مثلا: إنتاج السلعة A أو السلعة B أو السلعة C أو كل هذه السلع مجتمعة أو بنسب معينة لأن وجود إستعمال وحيد للموارد المتاحة يلغي وجود البدائل ومن ثم المسألة ككل. **(كلية العلوم الإقتصادية، 2016)**

4. صياغة نموذج البرمجة الخطية :

إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة إنشاء نموذج البرمجة الخطية . و نعني بالنموذج هو التعبير عن علاقات واقعية بعلاقات رياضية مفترضة و مبنية على دراسة الواقع و تحليله وتبعا لصيغة المسألة يمكن تقييم النموذج إما بيانيا أو رياضيا. و بعد الانتهاء من تكوين النموذج الملائم يجب التأكد من مطابقته للمشكلة قيد الدراسة ثم الإنتقال إلى المرحلة التالية و المتمثلة في تقييمه و تحليله للتعرف على تأثيرات العوامل المختلفة في المشكلة و الوصول إلى الحل المناسب، ولكن ليس لكل مشكلة يمكن حلها بأسلوب البرمجة الخطية حيث يتطلب حل المشكلة بأسلوب البرمجة الخطية أن تتوافر الشروط التالية **(نصير، 2017)**:

– **تحديد دالة الهدف:** وهو الهدف المنشود والذي نرغب في تحقيقه وإمكانية التعبير عن هذا الهدف في صورة دالة خطية والحصول على قيمة رقمية له ومحاولة تعظيم هذه القيمة وإيجاد النهاية العظمى لها إذا كان الهدف المنشود ربحا أو تقليل القيمة وإيجاد النهاية الصغرى إذا كان الهدف تكلفة أي الوصول إلى أدنى تكلفة ممكنة ، وتتكون دالة الهدف من المتغيرات، أما المعامل الخاص بكل متغير هو عبارة عن ربح الوحدة الواحدة في حالة تعظيم دالة الهدف أو يكون المعامل عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة الهدف.

– **تحديد القيود(الموارد):** أي إمكانية التعبير عن العلاقة بين المتغيرات القرارية والإمكانيات المتاحة في صورة قيود خطية وهي توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة في شكل متراجحات أو معادلات خطية أو خليط منها وتسمى بالقيود الهيكلية.

– **شرط عدم السلبية:** إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة. **(نصير، 2017)**

مثال 01:

يقوم صاحب مطعم بعمل شطائر اللحم يتكون من لحم بقر ولحم ماعز ،يحتوي لحم البقر على 80 % لحم صافي و20 % دهون ويكلف 24 دج لكل‌كيلو الواحد في حين أن لحم الماعز على يحتوي 68 % لحم صافي و 32 % دهون ويكلف 18 دج لكل‌كيلو الواحد . **المطلوب:** ما هي كمية (وزن) اللحم من كل نوع الذي يجب أن يستخدمه صاحب المحل في كل كيلو من شطائر اللحم إذا علمت أنه يجب تخفيض التكاليف والمحافظة علي نسبة الدهون بحيث لا تزيد عن25 % ؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: وزن لحم البقر المستخدم فيالكيلو الواحد

x_2: وزن لحم البقر المستخدم فيالكيلو الواحد

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = 24x_1 + 18x_2$$

القيود:

$$\begin{cases} 0{,}20\,x_1 + 0{,}32\,x_2 \le 0{,}25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 , x_2 \ge 0 \end{cases}$$

مثال 02:

تقوم شركة الأوراس للنجارة بصناعة منتوجين هما: الطاولات والكراسي، وتقوم ببيعها في الأسواق المحلية، حيث تحقق ربحا عن كل وحدة قدرها: 300 دج و 200 دج على التوالي.

وتسخر الشركة أقسامها الإنتاجية الثلاثة (نجارة ، تلحيم، طلاء) لإنتاج هذه المنتوجات، حيث يمر كل منتوج أثناء عملية الإنتاج على الأقسام الثلاثة حتى يصبح قابلا للبيع.

ويوضح الجدول التالي الوقت الذي يستغرقه كل منتوج في كل قسم بالإضافة إلى الطاقة المتاحة في كل قسم.

القسم	المنتوج		ساعات العمل المتاحة
	طاولة	كرسي	في كل قسم
النجارة	6 سا	6 سا	420 سا
التلحيم	3 سا	6 سا	300 سا
الطلاء	4 سا	2 سا	240 سا
الربح	300 دج	200 دج	

المطلوب: صياغة البرمجة الخطية والذي تعظم به الأرباح؟

الحل:

المتغيرات:

X_1: عدد الطاولات التي يجب إنتاجها وبيعها من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن.

X_2: عدد الكراسي التي يجب إنتاجها وبيعها من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن.

دالة الهدف : $Max\ Z = 300x_1 + 200x_2$

القيود:

قيد قسم النجارة: $6x_1 + 6x_2 \leq 480$

قيد قسم التلحيم: $3x_1 + 6x_2 \leq 300$

قيد قسم الطلاء: $4x_1 + 2x_2 \leq 240$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

مثال 03:

صائغ مجوهرات يصنع قلائد و أساور . هامش الربح للقلادة 32 دج وللسوار 24 دج . تتطلب القلائد ساعتين لقطع الأحجار و 7ساعات للتثبيت و 6ساعات للتلميع . والأساور تتطلب 5 ساعات لقطع الأحجار و7 ساعات للتثبيت و3 ساعات للتلميع. ويتوفر لدى الصائغ 40 ساعة لقطع الأحجار و 70 ساعة للتثبيت و 48 ساعة للتلميع. **المطلوب**: إيجاد التوليفة المثلى من الإنتاج والتي تعظم بها الأرباح ؟

الحل:

المتغيرات:

X_1: عدد القلائد التي يجب إنتاجها وبيعها من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن.

X_2: عدد الأساور التي يجب إنتاجها وبيعها من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن.

دالة الهدف:

$$Max\ Z = 32x_1 + 24x_2$$

القيود:

قيد القطع: $2x_1 + 5x_2 \leq 40$

قيد التثبيت: $7x_1 + 7x_2 \leq 70$

قيد التلميع: $6x_1 + 3x_2 \leq 48$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

مثال 04:

تقوم شركة مناجم بتشغيل ثلاثة مناجم فرعية تابعة لها، ويفصل الخام من كل منجم إلى نوعين قبل الشحن، ويبين الجدول التالي الطاقة الإنتاجية اليومية للمناجم، وكذلك التكلفة اليومية.

المنجم	نوعية الخام		تكلفة التشغيل 1000 دج/يوم
	خام عالي الجودة طن/يوم	خام قليل الجودة طن/يوم	
المنجم 01	4	4	20
المنجم 02	6	4	22
المنجم 03	1	6	18

ولقد إلتزمت الشركة بتسليم 54 طن من خام العالي الجودة، و65 طن من قليل الجودة في نهاية كل أسبوع، كما أن للشركة تعاقدات مع العمال تضمن لها تواجد العمال بطول اليوم أو جزء من اليوم أثناء فتح المنجم . **المطلوب:** حدد عدد الأيام التي يجب أن يعملها كل منجم خلال الأسبوع المقبل للوفاء بالتزمات الشركة بأقل تكلفة ممكنة؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: عدد الأيام التي سيعمل فيها العمال المنجم 01 خلال الأسبوع المقبل .

x_2: عدد الأيام التي سيعمل فيها العمال المنجم 02 خلال الأسبوع المقبل.

x_3: عدد الأيام التي سيعمل فيها العمال المنجم 03 خلال الأسبوع المقبل.

دالة الهدف: $\text{Min } Z = 20x_1 + 22x_2 + 18x_3$

القيود:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54 & \text{قيد الطلب من خام العالي الجودة:} \\ 4x_1\ 4x_2 + 6x_3 \geq 65 & \text{قيد الطلب من خام قليل الجودة:} \\ x_1, x_2, x_3 \leq 7 & \text{قيد عدد الأيام} \\ x_1, x_2 \geq 0 & \text{شرط عدم السلبية} \end{cases}$$

5. حل نموذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية:

يتصف أسلوب الحل البياني بسهولته و وضوحه إلا أنه يعتبر أسلوبا مفيدا و صالحا للمشاكل التي تحتوي على متغيرين فقط، مثال ذلك :إنتاج سلعتين، و يتم التوصل إلى الحل باعتماد الطريقة البيانية من خلال تطبيق الخطوات التالية:

- تحديد النموذج الرياضي (دالة الهدف و القيود)؛
- تمثيل القيود بيانيا، على معلم متعامد و متجانس ؛
- تحديد منطقة الحلول الممكنة؛
- المفاضلة بين الحلول البديلة لاختيار البديل الأمثل. **(سالم، 2017)**

- **حالة تعظيم الأرباح باستخدام الرسوم البيانية:**

مثال 01:

ونعرض هذه الطريقة بالمثال الواقعي لتسهيل الشرح. افترض أن شركة ما متخصصة في صناعة: (حقائب النوم، وخيام) . وكل حقيبة نوم تستلزم 2 ساعة للقطع و 5 ساعات للخياطة و 1 ساعة للطلي ضد الماء، وكل خيمة تتطلب 1 ساعة للقطع و 5 ساعات للخياطة و 3 ساعات للطلي ضد الماء. وإذا علمت أن موارد الشركة هي 14 ساعة للقطع و 40 ساعة للخياطة و 18 ساعة للطلي ضد الماء في اليوم . وأن هامش الربح 50 دج في الحقيبة نوم الواحدة و30 دج في الخيمة الواحدة. **المطلوب:** إيجاد التوليفة المثلى من كلا المنتوجين لتحقيق أقصى ربح ممكن باستخدام الطريقة البيانية؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: عدد الوحدات المنتجة من حقائب النوم والتي تحقق أقصى ربح ممكن .

x_2: عدد الوحدات المنتجة من الخيام والتي تحقق أقصى ربح ممكن .

دالة الهدف: $Max\ Z = 50x_1 + 30x_2$

القيود:

قيد قسم القطع: $2x_1 + x_2 \leq 14$

قيد قسم الخياطة: $5x_1 + 5x_2 \leq 40$

قيد قسم الطلي ضد الماء: $x_1 + 3x_2 \leq 18$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

تحويل المتراجحات إلى معادلات:

قيد قسم القطع: $2x_1 + x_2 = 14$ ---------- 1

قيد قسم الخياطة: $5x_1 + 5x_2 = 40$ ---------- 2

قيد قسم الطلي ضد الماء: $x_1 + 3x_2 = 18$ ---------- 3

إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

$2x_1 + x_2 = 14$ / (0,14) (7,0)

x_1	0	7
x_2	14	0

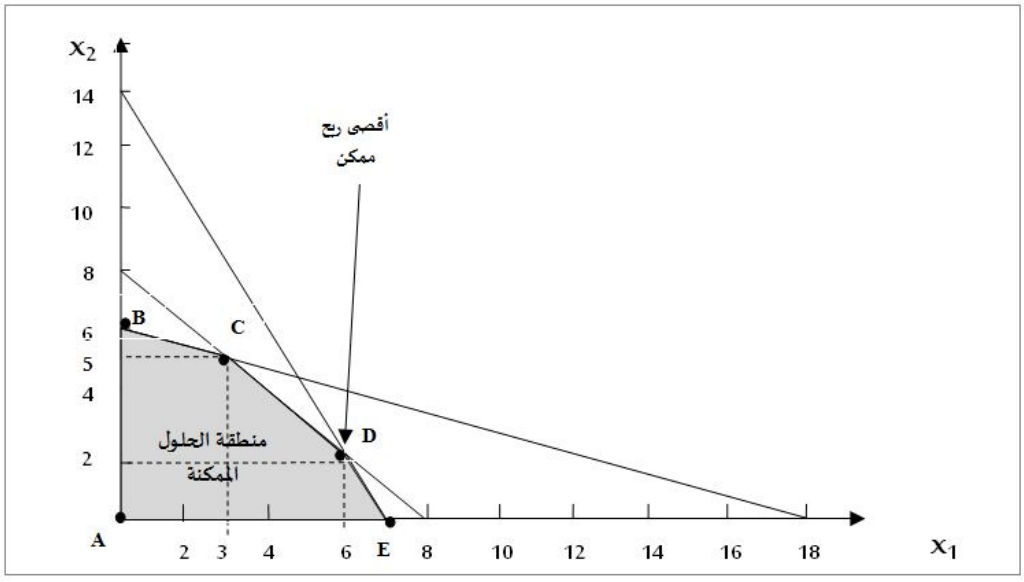
$5x_1 + 5x_2 = 40$ / (0,8) (8,0)

x_1	0	8
x_2	8	0

$x_1 + 3x_2 = 18$ / (0,6) (18,0)

x_1	0	18
x_2	6	0

التمثيل البياني:



إيجاد نقاط التقاطع المستقيمات مع بعضها:

- تقاطع المستقيم 2 مع 3:

$5x_1 + 5x_2 = 40$

$x_1 + 3x_2 = 18 \times(-5)$

$= 5x_1 + 5x_2 = 40$

$-5x_1 - 15x_2 = -90$

$= -10x_2 = -50$

$= \boxed{x_2 = 5}$

$\boxed{x_1 = 3}$

ومنه:

أي: نقطة التقاطع هي: (3 , 5)

- تقاطع المستقيم 1 مع 2:

$2x_1 + x_2 = 14 \times(-5)$

$5x_1 + 5x_2 = 40$

$= -10x_1 - 5x_2 = -70$

$5x_1 + 5x_2 = 40$

$= -5x_1 = -30$

$= \boxed{x_1 = 6}$

$\boxed{x_2 = 2}$

ومنه:

أي: نقطة التقاطع هي: (2 , 6)

إيجاد الحل الأمثل في نقاط الأركان:

النقطة	الإحداثيات	$\mathbf{Max\ Z = 50x_1 + 30x_2}$	النتيجة (الربح)
A	(0 , 0)	50(0)+30(0)	0 دج
B	(0 , 6)	50(0)+30(6)	180 دج
C	(3 , 5)	50(3)+30(5)	300 دج
D	(6 , 2)	50(6)+30(2)	360 دج
E	(7 , 0)	50(7)+30(0)	350 دج

القرار الإداري:

يجب على صاحب الشركة إنتاج 6 وحدات من حقائب النوم و 2 وحدة من الخيام وذلك لتحقيق أقصى ربح ممكن هو: 360 دج.

مثال 02:

ورشة للخياطة تقوم بإنتاج منتوجين: سراويل و معاطف، يمر كلا المنتوجين على ماكنتين: ماكنة الخياطة و ماكنة المكواة، لإنتاج وحدة واحدة من السراويل فإنه يلزم استخدام ساعتين من الزمن على ماكنة الخياطة و ساعة عمل واحدة على ماكنة المكواة، بينما تحتاج الوحدة الواحدة من المعاطف إلى ساعة عمل واحدة على كل من الماكنتين، و لأسباب تقنية فإن الماكنة الأولى لا تعمل أكثر من 10 ساعات في اليوم، بينما الماكنة الثانية لا تعمل أكثر من 6 ساعات يوميا.

ولأسباب متعلقة بالطلب السوقي، لا يمكن إنتاج أكثر من 4,5 وحدات من المنتوج الأول (سراويل) يوميا، وكذلك لا يمكن إنتاج أكثر من 4 وحدات يوميا من المنتوج الثاني (معاطف).

الوحدة الواحدة من السراويل تساهم بربح قدره 1,5 دج، بينما تساهم الوحدة الواحدة من المنتوج الثاني (معطف) بـ 1 دج. **المطلوب:** إيجاد التوليفة المثلى من كلا المنتوجين لتحقيق أقصى ربح ممكن باستخدام الطريقة البيانية؟

الحل:

المتغيرات:

X_1: عدد الوحدات المنتجة من السراويل والتي تحقق أقصى ربح ممكن .

X_2: عدد الوحدات المنتجة من المعاطف والتي تحقق أقصى ربح ممكن .

دالة الهدف:

$$Max\ Z = 1{,}5x_1 + x_2$$

القيود:

قيد قسم الخياطة: $2x_1 + x_2 \leq 10$

قيد قسم الكي: $x_1 + x_2 \leq 6$

قيد خاص بالطلب السوقي من السراويل: $x_1 \leq 4{,}5$

قيد خاص بالطلب السوقي من المعاطف: $x_2 \leq 4$

شرط عدم السلبية $x_1 , x_2 \geq 0$

تحويل المتراجحات إلى معادلات: (1)

قيد قسم الخياطة: $2x_1 + x_2 = 10$ .....

قيد قسم الكي: $x_1 + x_2 = 6$ ..... (2)

قيد خاص بالطلب السوقي من السراويل: $x_1 = 4{,}5$ ..... (3)

قيد خاص بالطلب السوقي من المعاطف: $x_2 = 4$ ..... (4)

إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

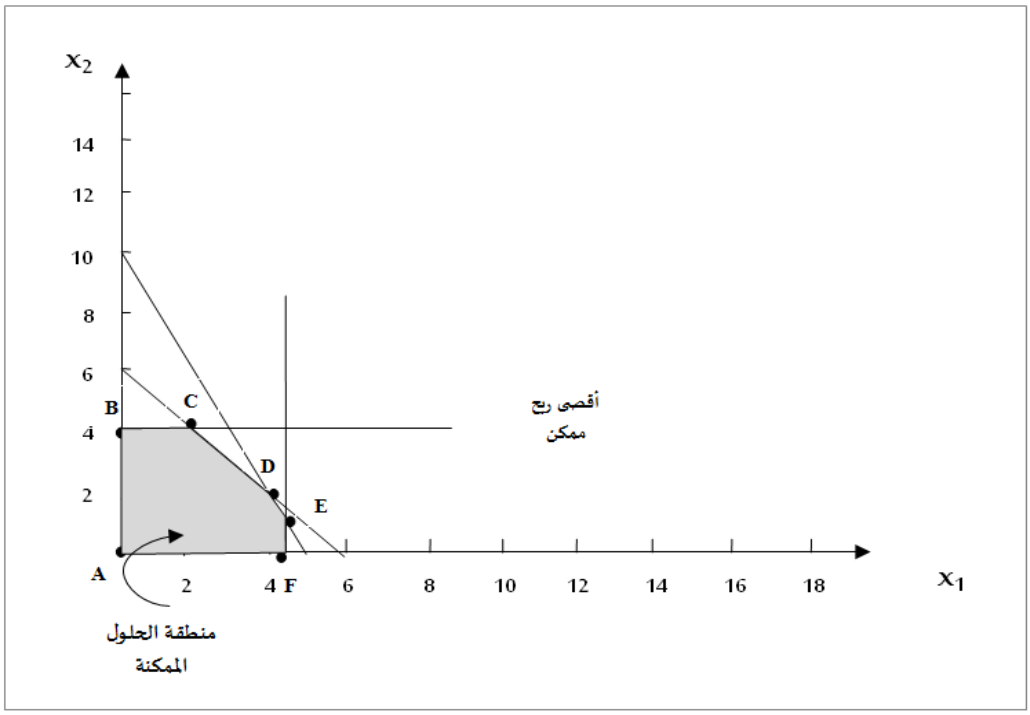
$2x_1 + x_2 = 10$ / (0 ,10) (5,0)

x_1	0	5
x_2	10	0

$x_1 + x_2 = 6$/ (0 ,6) (6,0)

x_1	0	6
x_2	6	0

التمثيل البياني:



إيجاد نقاط التقاطع المستقيمات مع بعضها:

– <u>النقطة C: تقاطع المستقيم 2 مع 4:</u>

$2x_1 + x_2 = 10$

$x_2 = 4$

$=2x_1 + (4) = 10$

$=2\,x_1 = 6$

$= \boxed{x_1 = 3}$

أي: نقطة التقاطع هي: C(3,4)

– النقطة D: تقاطع المستقيم 1 مع 2:

$2\,x_1 + x_2 = 10$

$x_1 + x_2 = 6 \times (-2)$

$= 2x_1 + x_2 = 10$

$-2x_1 - 2\,x_2 = -12$

$= -\,x_2 = -2$

$= \boxed{x_2 = 2}$

ومنه: $\boxed{x_1 = 4}$

أي: نقطة التقاطع هي: D(4,2)

– النقطة E: تقاطع المستقيم 1 مع 3:

$2\,x_1 + x_2 = 10$

$x_1 = 4{,}5$

$=2\,(4{,}5) + x_2 = 10$

$= \boxed{x_2 = 1}$

أي: نقطة التقاطع هي: E(4,5,1)

إيجاد الحل الأمثل في نقاط الأركان:

النقطة	الإحداثيات	$\mathbf{Max\ Z = 1{,}5x_1 + x_2}$	النتيجة (الربح)
A	(0 , 0)	1,5(0)+ (0)	0 دج
B	(0 , 4)	1,5(0)+ (4)	4 دج
C	**(3 , 4)**	**1,5(3)+ (4)**	**8,5 دج**
D	(2 , 4)	1,5(2)+ (4)	7 دج
E	(4,5 , 1)	1,5(4,5)+ (1)	7,75 دج
F	(4,5 , 0)	1,5(4,5)+ (0)	6,75 دج

القرار الإداري:

يجب على صاحب ورشة الخياطة إنتاج 3 وحدات من سراويل و 4 وحدات من المعاطف وذلك لتحقيق أقصى ربح ممكن هو: 8,5 دج.

– حالة تقليل التكاليف باستخدام الرسوم البيانية:

مثال 01:

في إحدى المستشفيات الخاصة، طلب من المسؤول عن المطبخ أن تكون وجبة الإفطار الصباحية تستجيب للمتطلبات الغذائية اليومية من البروتين، الفيتامين و الحديد، و تكون بأقل تكلفة ممكنة؛ و بعد الاتصال بمتخصصين في التغذية تم التوصل إلى المعطيات التالية:

المتطلبات الغذائية اليومية	الوجبة		الحد الأدنى (وحدة/100غ)
	الوجبة 01 (وحدة/100غ)	الوجبة 02 (وحدة/100غ)	
البروتين	2	2	10
الفيتامين	2	1	7
الحديد	1,33	2	8
تكلفة (دج/100غ)	3	4	

المطلوب: إيجاد التوليفة المثلى من كلا الوجبتين بأقل تكلفة ممكنة باستخدام الطريقة البيانية؟

الحل:

المتغيرات:

x_1: عدد الوحدات (الوجبة 01) والتي تحقق أقل تكلفة ممكنة .

x_2: عدد الوحدات (الوجبة 02) والتي تحقق أقل تكلفة ممكنة .

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 4x_2$$

القيود:

قيد مادة البروتين: $2x_1 + 2x_2 \geq 10$

قيد مادة الفيتامين: $2x_1 + x_2 \geq 7$

قيد مادة الحديد: $1{,}33x_1 + 2x_2 \geq 8$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

تحويل المتراجحات إلى معادلات:

قيد مادة البروتين: $2x_1 + 2x_2 = 10$ ---------- (1)

قيد مادة الفيتامين: $2x_1 + x_2 = 7$ ---------- (2)

قيد مادة الحديد: $1{,}33x_1 + 2x_2 = 8$ ---------- (3)

إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

$2x_1 + 2x_2 = 10$ / (0 ,5) (5,0)

x_1	0	5
x_2	5	0

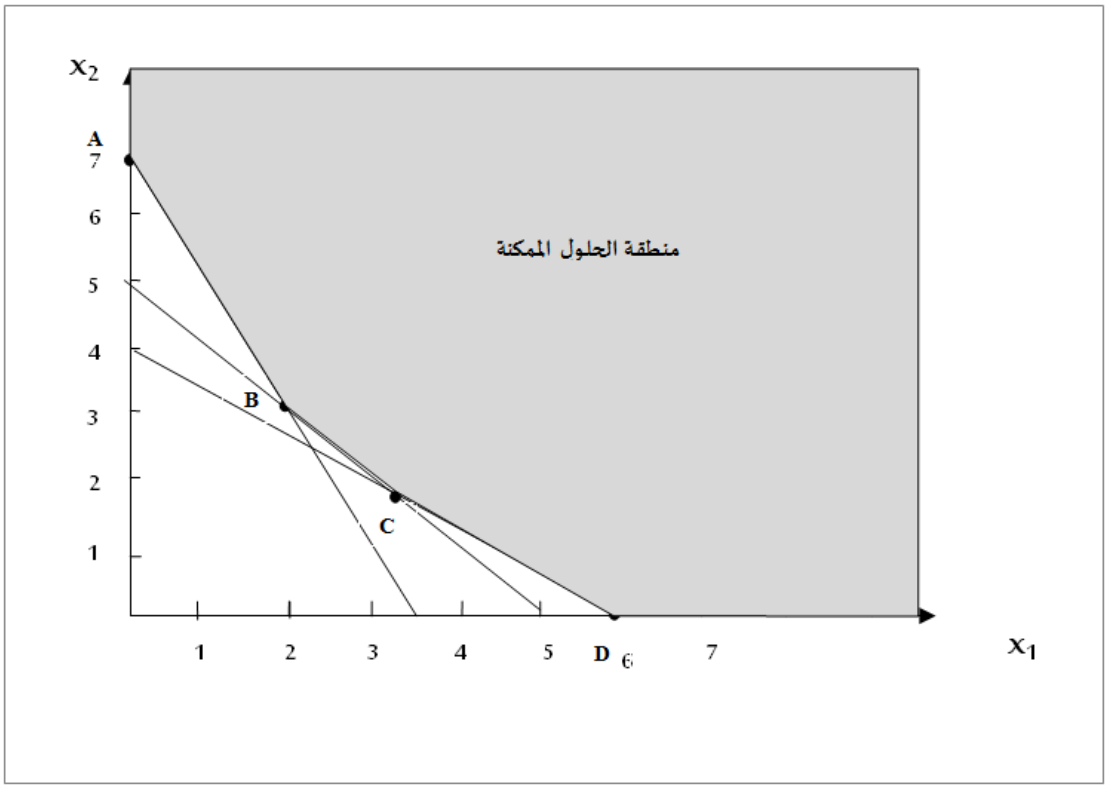
$2x_1 + x_2 = 7$ /(0 ,7) (3,5,0)

x_1	0	3,5
x_2	7	0

$1{,}33x_1 + 2x_2 = 8$

x_1	0	6
x_2	4	0

التمثيل البياني:



إيجاد نقاط التقاطع المستقيمات مع بعضها:

- النقطة B: تقاطع المستقيم 1 مع 2:

$2x_1 + 2x_2 = 10$

$2x_1 + x_2 = 7 \times (-1)$

$= 2x_1 + 2x_2 = 10$

$-2x_1 - x_2 = -7$

$= -x_2 = -3$

$= \boxed{x_2 = 3}$

$\boxed{x_1 = 2}$ ومنه:

أي: نقطة التقاطع هي: B(2,3)

- النقطة C: تقاطع المستقيم 1 مع 3:

$2x_1 + 2x_2 = 10$

$1{,}33x_1 + 2x_2 = 8 \times (-1)$

$= 2x_1 + 2x_2 = 10$

$-1{,}33x_1 - 2x_2 = -8$

$= 0{,}67x_1 = 2$

$= \boxed{x_1 = 3}$

$\boxed{x_2 = 2}$ ومنه:

أي: نقطة التقاطع هي: C(3,2)

إيجاد الحل الأمثل في نقاط الأركان:

النقطة	الإحداثيات	$\mathbf{Min\ Z = 3x_1 + 4x_2}$	النتيجة (التكلفة)
A	(0 , 7)	3(0)+ 4(7)	28 دج
B	(2 , 3)	3(2)+ 4(3)	18 دج
C	**(3 , 2)**	3(3)+ 4(2)	**17 دج**
D	(6 , 0)	3(6)+ 4(0)	18 دج

القرار الإداري:

يجب على مسؤول المطبخ إعداد 3 وجبات من (الوجبة 01) و 2 وجبة من (الوجبة 02) وذلك لتحقيق أقل تكلفة ممكنة قدرها: 17دج.

مثال 02:

ينوي صاحب إحدى مزارع الدواجن شراء نوعين من أنواع الغذاء المخصص للدواجن، ومزجها معا للحصول على خلطة جيدة وغذاء لدواجنه بنفس الوقت. كل نوع من النوعين المكونين للخلطة يحتوي بشكل كلي أو جزئي على مكونات اللازمة لتسمين الدواجن. فكل 1 كلغ من النوع الأول مثلا يحتوي على 10 غ من المكون A و 5غ من المكون B . وكذلك فإن كل 1 كلغ من النوع الثاني يحتوي على 5 غ من المكون A و 10غ من المكون B . علما بأن 1 كلغ من النوعين الأول والثاني يكلف ما مقداره 20 دج . ويرغب صاحب المزرعة في استخدام البرمجة الخطية لتحديد مزيج الخلطة الذي يؤدي إلى أقل التكاليف والتي تضمن توفير الإحتياجات الشهرية الدنيا الواجب توفرها. والجدول التالي يبين المعلومات ذات العلاقة بهذه المشكلة.

المكونات	مكونات (1 كلغ) من الغذاء بـ (غ)		الحد الأدنى لاحتياجات الصوص الواحد (غ)
	النوع الأول	النوع الثاني	
A	10	5	50
B	5	10	40
تكلفة 1 كلغ	20 دج	20دج	

الحل:

المتغيرات:

x_1: عدد الكيلوغرامات التي اشتريت من النوع الأول.

x_2: عدد الكيلوغرامات التي اشتريت من النوع الثاني.

دالة الهدف:

$$Mix\ Z = 20x_1 + 20x_2$$

القيود:

قيد المكون A: $10x_1 + 5x_2 \geq 50$

قيد المكون B: $5x_1 + 10x_2 \geq 40$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

تحويل المتراجحات إلى معادلات:

قيد المكون A: $10x_1 + 5x_2 = 50$ ..... (1)

قيد المكون B: $5x_1 + 10x_2 = 40$ ..... (2)

إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

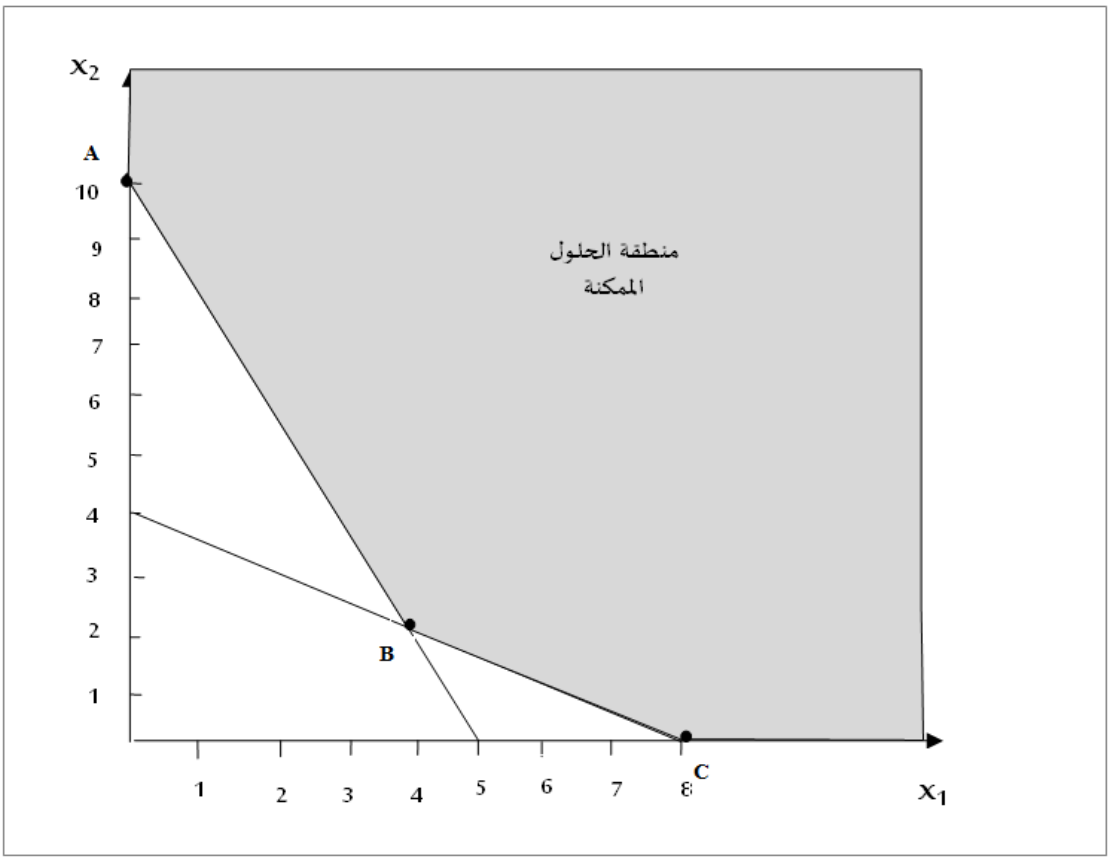
$10x_1 + 5x_2 = 50$ / (0,10) (5,0)

x_1	0	5
x_2	10	0

$5x_1 + 10x_2 = 40$ / (0,4) (8,0)

x_1	0	8
x_2	4	0

التمثيل البياني:



إيجاد نقاط التقاطع المستقيمين:

– النقطة B:

$10x_1 + 5x_2 = 50$

$5x_1 + 10x_2 = 40 \times(-2)$

$= 10x_1 + 5x_2 = 50$

$-10x_1 - 20x_2 = -80$

$= -15x_2 = -30$

$= x_2 = 2$

$x_1 = 4$

ومنه:

أي: نقطة التقاطع هي: B(4,2)

إيجاد الحل الأمثل في نقاط الأركان:

النقطة	الإحداثيات	$Min\ Z = 20x_1 + 20x_2$	النتيجة (التكلفة)
A	(0 , 10)	20(0)+ 20(10)	200 دج
B	**(4 , 2)**	**20(4)+ 20(2)**	**120 دج**
C	(8 , 0)	20(8)+ 20(0)	160 دج

القرار الإداري:

يجب على صاحب المزرعة شراء 4 كلغ من المكون الغذائي الأول و3كلغ من المكون الغذائي الثاني ، والذي يكلفه 120 دج (أقل تكلفة ممكنة).