# الفصل الثاني: جدول السمبلكس
## *Simplex Table*

1. مفهوم جدول سمبلكس *Simplex*.
2. خطوات حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس.
3. حالة تعظيم الأرباح.
4. حالة تخفيض التكاليف (طريقة *M* الكبيرة *Big-M Technique* ).

# الفصل الثاني: جدول السمبلكس
# *Simplex Table*

كما أوضحنا سابقا قدرة وسهولة استخدام الطريقة البيانية في حل مسائل البرمجة الخطية في حالة وجود متغيرين اثنين واستحالته بالنسبة للطريقة البيانية خاصة في حالة وجودأكثر من متغيرين أي ثلاثة متغيرات فأكثر. وتعد طريقة الحل بجدول السمبلكس Simplexe مجدية في هذا الخصوص لقدرتها على التعامل مع عدد كبير من المتغيرات وبطريقة مبسطة.

وتقوم طريقة السمبلكس Simplexe على فكرة إيجاد التحسن المستمر في دالة الهدف، أي أننا نبدأ من نقطة الأصل (الصفر) ونتحرك باتجاه تحسين دالة الهدف خطوة خطوة إلى أن نصل إلى الحل الأمثل الذي لا يمكن تحسين دالة الهدف بعده على الإطلاق. وتعتمد هذه الطريقة لحل المسائل البرمجة الخطية على قاعدة أساسية تم استنتاجها سابقا في الطريقة البيانية والتي تنص على أن أي حل لمسالة البرنامج الخطي سيكون على أحد أركان منطقة الحلول الممكنة، وبذلك تتجاهل هذه الطريقة الحلول الممكنة الأخرى وتركز على الأركان فقط.

## 1. مفهوم جدول سمبلكس *Simplex*

في حل نماذج البرمجة الخطية أول من قدم هذه الطريقة هو عالم الرياضيات G. Dantzing في سنة 1947،باعتبارها من الطرق الرياضية الكفوءة في معالجة المشكلات التي تتكون من اثنين أو أكثر من المتغيرات؛

إن فكرة هذه الطريقة قائمة على أساس إيجاد الحل المطلوب للمشكلة المدروسة (التي يتم التعبير عنها من خلال النموذج الرياضي في مراحل متسلسلة في إطار جدول السمبلكس الذي يتم تصميمه بما يتلائم ومتطلبات مراحل الحل وإيجاد قيم المتغيرات المجهولة.

يتم في المرحلة الأولى إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن، وفي المرحلة اللاحقة يتم تحسين هذا الحل تمهيدا نحو إيجاد الحل الأفضل الذي قد تكون عملية الحصول عليه تمتد لأكثر من مرحلة واحدة. في المرحلة الأخيرة يتم الحصول على الحل الأمثل والنهائي للمشكلة **(عبد الأمير، 2018، صفحة 01)**.

## 2. خطوات حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس:

تمر عملية حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس بعدة خطوات حتى الوصول إلى نقطة الحل الأمثل كما يلي:

**الخطوة الأولى :**تحويل كل متباينات القيود إلى معادلات (التحول الى الصيغة النموذجية أو القياسية):

تتطلب عملية حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس تحويل هذه البرامج إلى الصيغة القياسية أو النموذجية، حيث لا يمكن إستخدام طريقة السمبلكس إلا بعد الحصول على هذه الصيغة. ويتميز النموذج القياسي بالصفات التالية:

- دالة الهدف تكون في حالة التعظيم أو التقليل؛
- جميع قيود البرنامج الخطي تكون في شكل معادلات؛
- جميع الثوابت (الطرف الأيمن من القيود )تكون قيمها غير سالبة؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

ويتم تحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة النموذجية( القياسية )كما يلي:

- نضيف متغيرة مكملة تسمى أيضا بالمتغيرات وهمية أو متغيرة الراكدة Slack variable ، إلى الطرف الأيسر من القيد نرمز لها ب Sj حيث " j " هو ترتيب المتغيرة، علما أن قيمة هذه المتغيرة أكبر من أو تساوي الصفر .وتتحدد قيمة المتغيرة المكملة لكل قيد حسب درجة إستغلال الطرف الأيمن من القيد من طرف المتغيرات الحقيقية للبرنامج الخطي، ففي حالة إستغلال كامل الطرف الأيمن من القيد، فإن قيمة المتغيرة المكملة في الحل الأمثل ستكون معدومة، أما في حالة عدم إستغلال كامل كمية الطرف الأيمن من القيد، ففي هذه الحالة سوف تكون قيمة المتغيرة المكملة غير معدومة؛
- ينبغي إضافة المتغيرات المكملة إلى دالة الهدف لكن بربح وحدوي قيمته صفر، وبالتالي فالمتغيرات المكملة ليس لها تأثير على دالة الهدف.

لنفترض برنامج خطي يتكون من قيدين إشارتهما من نوع" أقل من أو يساوي"، ودالة هدف في حالة التعظيم . يتم تحويل هذا البرنامج إلى صيغته القياسية بإضافة متغيرة مكملة إلى القيد الأول نرمز لها بـ " $S_1$ "، ومتغيرة مكملة أخرى إلى القيد الثاني نرمز لها بـ" $S_2$"، ونلاحظ أنه كلما تم إضافة متغيرة مكملة يتصاعد ترتيبها .وبعد إضافة المتغيرات المكملة إلى القيود، يتم إضافتها إلى دالة الهدف لكن بمعاملات صفرية. **(ريغي، 2021، صفحة 24)**

### 3. حالة تعظيم الأرباح:

$$\text{Max } Z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\dots+c_nx_n \qquad\qquad \text{Max } Z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\dots+c_nx_n$$

$$s/c\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\dots, x_n\ge 0 \end{cases} \Longrightarrow s/c\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n + S_1 = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n + S_2 = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n + S_L \le b_m \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\dots, x_n\ge 0, S_1\ge 0, S_2\ge 0,\dots,, S_k\ge 0 \end{cases}$$

**الخطوة الثانية :**<u>كتابة الحل الأساسي رقم: 1</u>

| $C_i^B$ | Cj / $X_i^B$ | $C_1$ | $C_2$ | … | $C_n$ | 0 | 0 | … | 0 | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $X_1$ | $X_2$ | … | $X_n$ | $S_1$ | $S_2$ | … | $S_k$ | |
| 0 | $S_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | 1 | 0 | … | 0 | $b_1$ |
| 0 | $S_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | 0 | 1 | … | 0 | $b_2$ |
| … | … | … | … | … | … | … | 0 | … | … | … |
| 0 | $S_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | 0 | 0 | … | 1 | bm |
| | Zj | $Z_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \times C_i^B$ | $Z_2 = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \times C_i^B$ | … | $Z_n = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \times C_i^B$ (j=1,2,…,n) | 0 | 0 | … | 0 | |
| | Cj-Zj | $C_1 - Z_1$ | $C_2 - Z_2$ | … | $C_n - Z_n$ | 0 | 0 | … | 0 | $Z = \sum_{i=1}^{m} b_i C_i^B$ |

حيث:

$X_i^B$:**المتغيرات الأساسية** :يتم إعتبار المتغيرات المكملة متغيرات أساسية في جدول الحل الأساسي رقم واحد، ومع الإستمرار في الحل تتغير هذه المتغيرات (تخرج متغيرات أساسية وتدخل متغيرات غير أساسية مكانها لتصبح متغيرات أساسية).

$a_{11},\dots a_{mn}$:**معدلات التعويض** (Substitution rates) :وهي تشير إلى التغير في قيمة المتغيرات الأساسية عندما يتم إدخال وحدة واحدة من متغيرة غير أساسية إلى الأساس .وتشير الإشارة الموجبة لـ a لانخفاض قيمة المتغيرات غير الأساسية بقيمة a عندما يتم إدخال وحدة واحدة من المتغيرات غير الأساسية إلى الأساس .أما الإشارة السالبة لـ a فتشير لزيادة قيمة المتغيرات الأساسية بقيمة a عندما يتم إدخال وحدة واحدة من المتغيرات غير الأساسية إلى الأساس.

$C_j$: معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

$C_i^B$ :معاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف.

**$b_i$**:قيم الطرف الأيمن من القيود.

**Zj**: مقدار إنخفاض أو إرتفاع الربح( التكلفة )عند إدخال وحدة واحدة من المتغيرة إلى الأساس.

**Zj-Cj**:مقدار صافي الربح( صافي التكلفة )المتحقق من إدخال وحدة واحدة من المتغيرة j إلى الأساس.

وبما أن جميع القيود إشارتها أقل من أو يساوي ، وبالتالي تم إضافة لكل قيد متغيرة مكملة، فإن عدد المتغيرات المكملة k يساوي عدد المتغيرات الأساس m ، لأن جميع المتغيرات المكملة تدخل إلى الأساس في جدول الحل الأساسي رقم 1. ونفس الحالة، مكن أن تحدث عندما تكون جميع القيود عبارة عن معادلات، حيث يتم إضافة لكل قيد متغيرة إصطناعية، وهذه المتغيرات تدخل إلى الأساس في جدول الحل الأمثل.

**الخطوة الثالثة :**<u>الأمثلية</u>:

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع عناصر السطر الأخير من جدول السمبلكس، أي Zj-Cj ، موجبة .وعند تحقق الأمثلية، يتم إستخراج قيم الحل الأمثل كما يلي:

- قيم المتغيرات الموجودة في عمود المتغيرات الأساسية $X_i^B$ تساوي القيم المقابلة لها في عمود الثوابت $b_i$ ؛
- قيم بقية المتغيرات ، أي المتغيرات غير الأساسية، تساوي الصفر؛
- قيمة دالة الهدف هي عبارة عن قيمة Z في السطر الأخير.

واذا لم يتحقق الحل الأمثل فإننا ننتقل إلى الخطوة الرابعة.

**الخطوة الرابعة** <u>:البحث عن الحلول الأساسية الموالية:</u>

في حالة عدم تحقق الأمثلية، يتم كتابة الحل الأساسي الموالي كما يلي:

<u>البحث عن عمود الإرتكاز لتحديد المتغيرة التي تدخل إلى الأساس:</u>

عمود الإرتكاز، قابل أقل قيمة سالبة في السطر الأخير Zj-Cj ، والمتغيرة التي تمثل هذا العمود هي المتغيرة التي تدخل إلى الأساس .وفي حالة وجود متغيرتين على الأقل مرشحتين للدخول إلى الأساس( وحود قيمتين كبيرتين متساويتين على الأقل)، فإنه يتم إختيار إحداهما.

<u>البحث عن سطر الإرتكاز لتحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس:</u>

نقسم كل قيمة من قيم bi في جدول السمبلكس غير الأمثل على القيمة( الموجبة فقط )المقابلة لها في عمود الإرتكاز، والسطر التي تنتمي إليه أصغر قيمة موجبة هو سطر الإرتكاز( في حالة قيمة من قيم bi تساوي الصفر، فإن السطر الذي تنتمي إليه قيمة bi هذه هو سطر الإرتكاز)، والمتغيرة التي تقع في سطر الإرتكاز والموجودة في عمود متغيرات الأساس $X_i^B$ هي المتغيرة التي تخرج من الأساس.

ويمكن أن نصادف حالة وجود متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس(تساوي أصغر قيمتين موجبتين على الأقل من حصائل قسمة قيم bi على القيم المقابلة لها في عمود الإرتكاز)، وهي حالة سنتطرق إليها عند تناول الحالات الخاصة التي يمكن مصادفتها عند حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس.

عنصر الإرتكاز:

هو نقطة تقاطع عمود الإرتكاز وسطر الإرتكاز.

ويتم إعداد جدول الحل الأساسي الموالي كما يلي:

- يتم إستبدال المتغيرة التي تخرج من الأساس بالمتغيرة التي تدخل إلى الأساس وذلك في العمود الذي يحتوي على متغيرات الأساس $X_i^B$
- يتم تحويل عمود الإرتكاز إلى عمود أحادي، بحيث يتحول عنصر الارتكاز إلى القيمة 1 وباقي عناصر العمود إلى قيم معدومة؛
- يتم تحويل سطر الارتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر الارتكاز.
- يتم حساب باقي العناصر على النحو التالي: العنصر المرشح للتغيير نطرح منه حاصل ضرب العنصرين المقابلين له في كل من سطر الارتكاز وعمود الارتكاز مقسوما على قيمة عنصر الارتكاز.

فإذا افترضنا أن A في الجدول التالي هي عنصر الارتكاز:

| | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |

فإن عملية التحويل تكون كما يلي:

| | |
|---|---|
| 1 | B/A |
| 0 | D-$(\frac{B\times C}{A})$ |

**مثال 01**

مصنع يصنع نوعين من المنتجات. يستهلك المنتج الأول 4 ساعات عمل في قسم التصنيع و5 ساعات عمل في قسم التغليف، والمنتج الثاني يستهلك 5 ساعات عمل في قسم التصنيع و3 ساعات عمل في قسم التغليف، بحيث الأول يحقق ربح قدره 25 دج، والثاني 35 دج.

ويعمل العمال في المصنع بواقع 8 ساعات يوميا في قسم التصنيع و 15 ساعة في القسم التغليف .

**المطلوب :** أوجد حجم الإنتاج الأمثل الذي يعظم ربح المؤسسة باستخدام جدول السمبلكس ؟

## الحل:

| المنتج / القسم | المنتج 1 | المنتج 2 | ساعات العمل المتاحة |
|---|---|---|---|
| قسم التصنيع | 2 سا | 4 سا | 80 ساعة |
| قسم التغليف | 3 سا | 1 سا | 60 ساعة |
| الربح (دج) | 50 | 120 | / |

1. **كتابة النموذج الرياضي للمسألة:**

<u>المتغيرات:</u>

$x_1$: عدد الوحدات المنتجة من المنتج 1

$x_2$: عدد الوحدات المنتجة من المنتج 2

<u>دالة الهدف:</u>

$$Max\ Z = 50x_1 + 120x_2$$

<u>القيود:</u>

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 80 \\ 3x_1 + x_2 \leq 60 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. **حل النموذج الرياضي باسخدام جدول السمبلكس:**

<u>تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية:</u>

$$Max\ Z = 50x_1 + 120x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + S_1 = 80 \\ 3x_1 + x_2 + S_2 = 60 \\ x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 50 | 120 | 0 | 0 | R | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | النتيجة | |
| 0 | $S_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 80 | 80/4=20 |
| 0 | $S_2$ | 3 | 1 | 0 | 1 | 60 | 60/1=60 |
| Zj | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Zj-Cj | | -50 | -120 | 0 | 0 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الجديد.

- $X_2$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Zj-Cj**) (عمود الإرتكاز)
- $S_1$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الارتكاز)
- العدد (4) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثاني:

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 50 | 120 | 0 | 0 | R النتيجة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | |
| 120 | $x_2$ | 1/2 | 1 | 1/4 | 0 | 20 |
| 0 | $S_2$ | 5/2 | 0 | -1/4 | 1 | 40 |
| Zj | | 60 | 120 | 30 | 0 | 2400 |
| Zj-Cj | | 10 | 0 | 30 | 0 | |

قيم (Zj-Cj)كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق، ومنه:

$x_1=0$

$x_2=20$

$S_1=0$

$S_2=40$

$Z= 2400$

<u>القرار الإداري:</u>

يجب على صاحب المؤسسة إنتاج 20 وحدة من المنتج الثاني فقط. لتحقيق أقصى ربح ممكن وهو 2400 دج.

**مثال 02:**

مؤسسة تنتج أربع منتجات على آلتين، الوقت اللازم لإنتاج الوحدة من كل منتج والطاقة الإنتاجية لكل آلة موضحة في الجدول التالي:

| الآلة | المنتج 1 | المنتج 2 | المنتج 3 | المنتج 4 | الطاقة الإنتاجية |
|---|---|---|---|---|---|
| الأولى | 2 سا | 3 سا | 4 سا | 2 سا | 720 ساعة |
| الثانية | 3 سا | 2 سا | 1 سا | 2 سا | 600 ساعة |

تحسب تكاليف الإنتاج على أساس زمن تشغيل الألات، تكلفة الساعة على الآلة الأولى هي 10 و.ن وعلى الآلة الثانية 15 و.ن؛ سعر بيع الوحدة من المنتجات ( م 1، م 2، م3، م4) هي على التوالي (85 ون، 90 ون، 75 ون، 65 ون)

**المطلوب :** أوجد حجم الإنتاج الأمثل الذي يعظم ربح المؤسسة باستخدام جدول السمبلكس ؟

## الحل:

**1. كتابة النموذج الرياضي للمسألة:**

<u>المتغيرات:</u>

$X_1$: عدد الوحدات المنتجة من المنتج 1

$X_2$: عدد الوحدات المنتجة من المنتج 2

$X_3$: عدد الوحدات المنتجة من المنتج 3

$X_4$: عدد الوحدات المنتجة من المنتج 4

<u>دالة الهدف:</u>

$$\text{Max } Z = (85-65)x_1 + (90-60)x_2 + (75-55)x_3 + (65-50)x_4$$

<u>القيود:</u>

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 720 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 600 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

**2. حل النموذج الرياضي باستخدام جدول السمبلكس:**

<u>تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية:</u>

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 0S_1 + 0S_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + S_1 = 720 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + S_2 = 600 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

<u>جدول الحل الأولي:</u>

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 20 | 30 | 20 | 15 | 0 | 0 | R النتيجة | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $S_1$ | $S_2$ | | |
| 0 | $S_1$ | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 0 | 720 | 720/3=240 |
| 0 | $S_2$ | 3 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 600 | 600/2=300 |
| Zj | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Zj-Cj | | −20 | −30 | −20 | −15 | 0 | 0 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الجديد.

- $X_2$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Zj-Cj**) (عمود الإرتكاز)
- $S_1$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (3) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثاني:</u>

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 20 | 30 | 20 | 15 | 0 | 0 | $R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $S_1$ | $S_2$ | النتيجة |
| 30 | $x_2$ | 2/3 | 1 | 4/3 | 2/3 | 1/3 | 0 | 240 |
| 0 | $S_2$ | 5/3 | 0 | -5/3 | 2/3 | -2/3 | 1 | 120 |
| Zj | | 20 | 30 | 40 | 20 | 10 | 0 | 7200 |
| Zj-Cj | | 0 | 0 | 20 | 5 | 10 | 0 | |

قيم (Zj-Cj)كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق. ومنه:

$X_1=0$

$X_2=240$

$X_3=0$

$X_4=0$

$S_1=0$

$S_2=120$

$Z= 7200$

القرار الإداري:

يجب على صاحب المؤسسة إنتاج 240 وحدة من المنتج الثاني فقط. لتحقيق أقصى ربح ممكن وهو 7200 دج

**مثال 03:**

تقوم شركة الحجار بإنتاج وبيع نوعين من الفولاذ يمر إنتاجهما على ثلاثة أقسام، وتحقق من خلال ذلك عن الطن الواحد ربحا قدره 300 دج عن النوع الأول و 200 دج عن النوع الثاني . وفيما يلي بقية المعلومات المتعلقة بإنتاج طن واحد من كلا النوعين.

| | النوع 1 | النوع 2 | الطاقة المتاحة |
|---|---|---|---|
| | عدد الساعات اللازمة | عدد الساعات اللازمة | |
| القسم 01 | 6 سا | 6 سا | 420 سا |
| القسم 02 | 3 سا | 6 سا | 300 سا |
| القسم 03 | 4 سا | 2 سا | 240 سا |

**المطلوب** : إيجاد البرنامج الإنتاجي الأمثل من نوعي الفولاذ الذي يعظم ربح المؤسسة باستخدام جدول السمبلكس ؟

## الحل:

1. **كتابة النموذج الرياضي للمسألة:**

المتغيرات:

$X_1$: عدد الأطنان المنتجة من الفولاذ (النوع الأول)

$X_2$: عدد الأطنان المنتجة من الفولاذ (النوع الثاني)

دالة الهدف:

$$\text{Max } Z = 300x_1 + 200x_2$$

القيود:

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 420 \\ 3x_1 + 6x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 240 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2. **حل النموذج الرياضي باستخدام جدول السمبلكس:**

تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية:

$$Max\ Z = 300x_1 + 200x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + S_1 = 420 \\ 3x_1 + 6x_2 + S_2 = 300 \\ 4x_1 + 2x_2 + S_3 = 240 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 300 | 200 | 0 | 0 | 0 | R النتيجة | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 0 | $S_1$ | 6 | 6 | 1 | 0 | 0 | 420 | 420/6=70 |
| 0 | $S_2$ | 3 | 6 | 0 | 1 | 0 | 300 | 300/3=100 |
| 0 | $S_3$ | 4 | 2 | 0 | 0 | 1 | 240 | 240/4=60 |
| Zj | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Zj-Cj | | -300 | -200 | 0 | 0 | 0 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الجديد.

- $X_1$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Zj-Cj)** (عمود الإرتكاز)
- $S_3$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (4) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثاني:

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 300 | 200 | 0 | 0 | 0 | R | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | النتيجة | |
| 0 | $S_1$ | 0 | 3 | 1 | 0 | -3/2 | 60 | 60/3=20 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 9/2 | 0 | 1 | -3/4 | 120 | 120/4,5=26,6 |
| 300 | $x_1$ | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 1/4 | 60 | 60/0,5=120 |
| Zj | | 300 | 150 | 0 | 0 | 75 | 18000 | |
| Zj-Cj | | 0 | -50 | 0 | 0 | 75 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- $X_2$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Zj-Cj)** (عمود الإرتكاز)
- $S_1$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (3) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثالث:</u>

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 300 | 200 | 0 | 0 | 0 | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | النتيجة |
| 200 | $x_2$ | 0 | 1 | 1/3 | 0 | -1/2 | 20 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 0 | -3/2 | 1 | 3/2 | 30 |
| 300 | $x_1$ | 1 | 0 | -1/6 | 0 | 1/2 | 50 |
| Zj | | 300 | 200 | 50/3 | 0 | 50 | 1900 |
| Zj-Cj | | 0 | 0 | 50/3 | 0 | 50 | |

قيم $(Zj-Cj)$ كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق، ومنه:

$x_1=50$

$x_2=20$

$S_1=0$

$S_2=30$

$S_3=0$

$Z=1900$

القرار الإداري:

يجب على شركة الحجار إنتاج 50 طن من الفولاذ (النوع الأول) و 20 طن من الفولاذ (النوع الثاني). لتحقيق أقصى ربح ممكن وهو 1900 دج.

**مثال 04:**

تنتج شركة كهربائية ثلاث أنواع من المنتوجات الكهربائية تمر بثلاث أقسام إنتاجية كما هو موضح في الجدول التالي:

| | ساعات العمل المطلوبة لإنتاج الوحدة الواحدة | | |
|---|---|---|---|
| | قسم التصنيع | قسم التجميع | قسم الرقابة |
| أجهزة التكييف | 5 | 5 | 10 |
| أفران كهربائية | 5 | 10 | 5 |
| مجففات كهربائية | 5 | 5 | 5 |
| الساعات المتاحة | 110 | 180 | 200 |

**المطلوب:** أوجد الحجم الأمثل من المنتجات الثلاث ، إذا كان هامش الربح الوحدوي لأجهزة التكييف 145 دج وللأفران الكهربائية 200 دج و للمجففات الكهربائية 185 دج.

## الحل:

### 1. كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

المتغيرات:

$X_1$: عدد أجهزة التكييف المنتجة.

$X_2$: عدد أجهزة الأفران الكهربائية المنتجة.

$X_3$: عدد أجهزة المجففات الكهربائية المنتجة.

دالة الهدف:

$$Max\ Z = 145x_1 + 200x_2 + 185x_3$$

القيود:

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 110 \\ 5x_1 + 10x_2 + 5x_3 \le 180 \\ 10x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 200 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

**2. حل النموذج الرياضي باستخدام جدول السمبلكس:**

تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية:

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + S_1 = 110 \\ 5x_1 + 10x_2 + 5x_3 + S_2 = 180 \\ 10x_1 + 5x_2 + 5x_3 + S_3 = 200 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \ge 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 145 | 200 | 185 | 0 | 0 | 0 | R النتيجة | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 0 | $S_1$ | 5 | 5 | 5 | 1 | 0 | 0 | 110 | 110/5=22 |
| 0 | $S_2$ | 5 | 10 | 5 | 0 | 1 | 0 | 180 | 180/10=18 |
| 0 | $S_3$ | 10 | 5 | 5 | 0 | 0 | 1 | 200 | 200/5=40 |
| Zj | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Zj-Cj | | -145 | -200 | -185 | 0 | 0 | 0 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الجديد.

- $X_2$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Zj-Cj**) (عمود الإرتكاز)
- $S_2$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (10) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثاني:

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 145 | 200 | 185 | 0 | 0 | 0 | $R$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | النتيجة | |
| 0 | $S_1$ | 5/2 | 0 | 5/2 | 1 | -1/2 | 0 | 20 | 20/2,5=8 |
| 200 | $x_2$ | 1/2 | 1 | 1/2 | 0 | 1/10 | 0 | 18 | 18/0,5=36 |
| 0 | $S_3$ | 15/2 | 0 | 5/2 | 0 | -1/2 | 1 | 110 | 110/2,5=44 |
| Zj | | 100 | 200 | 100 | 0 | 20 | 0 | | |
| Zj-Cj | | -45 | 0 | -85 | 0 | 20 | 0 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- $X_3$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **Zj-Cj**) (عمود الإرتكاز)
- $S_1$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (5/2) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثالث:

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 145 | 200 | 185 | 0 | 0 | 0 | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | النتيجة |
| 185 | $x_3$ | 1 | 0 | 1 | 2/5 | -1/5 | 0 | 8 |
| 200 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | -1/5 | 1/5 | 0 | 14 |
| 0 | $S_3$ | 5 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 90 |
| Zj | | 185 | 200 | 185 | 34 | 3 | 0 | 4280 |
| Zj-Cj | | 40 | 0 | 0 | 34 | 3 | 0 | |

قيم (Zj-Cj)كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق، ومنه:

$x_1=0$

$x_2=14$

$x_3=8$

$S_1=0$

$S_2=0$

$S_3=90$

$Z= 4280$

القرار الإداري:

يجب على شركة المخصصة في الصناعة الكهربائية عدم إنتاج أي وحدة من أجهزة التكييف، و إنتاج 14 وحدة من أجهزة الأفران الكهربائية، 8 وحدات من أجهزة المجففات الكهربائية، لتحقيق أقصى ربح قدره 4280 دج.

**مثال 05:**

يصنع مصنع نوعين من السلع: الأول شوكولاطة، والثاني بسكويت، بحيث:

يمر المنتج الأول بقسم التغليف فقط ويحتاج إلى 3 ساعات عمل للوحدة الواحدة، أما المنتج الثاني يحتاج إلى 1 ساعة في قسم التصنيع ، و 2 ساعة في قسم التغليف.

ويعمل في المصنع عمال بواقع 6 ساعات يوميا في قسم التصنيع ، و18 ساعات في قسم التغليف.

ويحقق النوع الأول ربحا قدره 3 دج للوحدة الواحدة، ويحقق الثاني 30 دج للوحدة الواحدة.

**المطلوب:** أوجد الحل الأمثل لهذا المصنع باستخدام جدول السمبلكس؟

## الحل:

| | شوكولاطة | بسكويت | الساعات العمل المتاحة |
|---|---|---|---|
| قسم التصنيع | / | 1سا | 6 سا |
| قسم التغليف | 3 سا | 2 سا | 18 سا |
| الربح للوحدة الواحدة | 3 دج | 5 دج | / |

### 1. كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

<u>المتغيرات:</u>

$x_1$: عدد الوحدات المنتجة من شكولاطة.

$x_2$: عدد الوحدات المنتجة من بسكويت.

<u>دالة الهدف:</u>

$$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2$$

<u>القيود:</u>

$$\begin{cases} x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

### 2. حل النموذج الرياضي باسخدام جدول السمبلكس:

<u>تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية:</u>

$$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$\begin{cases} x_2 + S_1 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + S_2 = 18 \\ x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 3 | 5 | 0 | 0 | $R$ النتيجة | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | | |
| 0 | $S_1$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 6 | 6/1=6 |
| 0 | $S_2$ | 3 | 2 | 0 | 1 | 18 | 18/2=9 |
| Zj | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Zj-Cj | | -3 | -5 | 0 | 0 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الجديد.

- $X_2$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Zj-Cj)** (عمود الإرتكاز)
- $S_1$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (1) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثاني:

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 3 | 5 | 0 | 0 | $R$ النتيجة | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | | |
| 5 | $x_2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 6 | 6/0=∞ |
| 0 | $S_2$ | 3 | 0 | -2 | 1 | 6 | 6/3=2 |
| Zj | | 0 | 5 | 5 | 0 | 30 | |
| Zj-Cj | | -3 | 0 | 5 | 0 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- $X_1$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **Zj-Cj**) (عمود الإرتكاز)
- $S_2$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (3) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثالث:</u>

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 3 | 5 | 0 | 0 | R النتيجة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | |
| 5 | $x_2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| 3 | $x_1$ | 1 | 0 | -2/3 | 1/3 | 2 |
| Zj | | 3 | 5 | 3 | 1 | 36 |
| Zj-Cj | | 0 | 0 | 3 | 1 | |

قيم (Zj-Cj)كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق. ومنه:

$x_1=2$

$x_2=6$

$S_1=0$

$S_2=0$

$Z= 36$

<u>القرار الإداري:</u>

يجب على شركة إنتاج 2 وحدة من شكولاطة و 6 وحدات من البسكويت.لتحقيق أقصى ربح قدره 36 دج

## 4. حالة تخفيض التكاليف (طريقة *M* الكبيرة *Big-M Technique*) :

**ما هي خطوات الحل بطريقة السمبلكس في حالة تقليل التكاليف ؟**

– تحويل النموذج إلى النموذج القياسي حسب القيود:

رمز المتراجات:

- ✓ إذا كان أقل أو يساوي نضيف متغير وهمي ≤ $+S$
- ✓ إذا كان أكبر أو يساوي نطرح متغير وهمي ونضيف متغير إصطناعي ≥ $-S+R$
- ✓ إذا كان القيد إشارته = نضيف متغير إصطناعي فقط $+R$
- ✓ إضافة كل من المتغيرات الإصطناعية $(R_1, R_2)$ إلى دالة الهدف $Z$ وذلك بضربها في ثابت يعبر عنه بـ $M$ وهي عبارة عن قيمة كبيرة جدا.
- ✓ توجد كل من المتغيرات الإصطناعية $(R_1, R_2)$ بدلالة القيد ويتم التعويض عنه في جدول الحل الإبتدائي الأولي بمعنى (كتابة المتغيرات الإصطناعية في القيود بدلالة بقية المتغيرات)
- ✓ المتغيرات الإصطناعية $(R_1, R_2)$ لا تؤثر على الحل ولكن تؤثر على دالة الهدف.

– إنشاء جدول ويتم ترتيب المعاملات فيها ويسمى جدول الحل الأساسي الأولي وتفرغ فيها جميع المعاملات ويزيد عدد الأعمدة لأن هناك قيم لـ $R$

– ننظر إلى الصف الأخير من الجدول ونختار أقل قيمة سالبة لأننا نريد تقليل التكاليف، ويسمى عمود الإرتكاز (المتغير الداخل)

– يتم قسمة كميات (النتيجة $R$) على المعامل المقابل له في عمود الإرتكاز.

– نختار أقل قيمة موجبة وبالتالي حددنا صف الإرتكاز (المتغير الخارج)

– نقطة الإرتكاز: تتحدد بتقاطع صف الإرتكاز مع عمود الإرتكاز.

– نقسم الصف الإرتكاز على نقطة الإرتكاز لتحديد القيم الجديدة في الصف الجديد للجدول الموالي.

– أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

– ننظر في كل مرة إلى الصف الأخير من الجدول إذا كانت ا أرقام موجبة أو أصفار يعني توصلنا إلى الحل الأمثل، أما إذا كانت القيمة سالبة نعيد تكرار الخطوات مرة اخرى حتى نتوصل إلى الحل الأمثل.

– تكون قيم عمود (النتيجة $R$) هي الحل الأمثل .

– نعوض في دالة الهدف Z لنتأكد من الحل. **(الأسطل، 2016، الصفحات 175-176)**

**مثال 01:**

تلقت شركة متخصصة في صناعة الدهان طلبية قدرها 1000 كلغ من خليط الطلاء يتكون من مادتين. حيث يكلف الكلغ من المادة الأولى 50 دج ومن المادة الثانية 60 دج. كما انه ولأسباب تتعلق بمعيير الجودة فإن الشركة مقيدة بضرورة إستعمال 150 كلغ على الأقل من المادة الأولى.

**المطلوب:** تحديد الكميات الواجب إستعمالها من المادتين لإنتاج الخليط بأقل تكلفة لاستعمال طريقة السمبلكس-؟

## الحل:

1. **الخطوة الأولى: كتابة النموذج الرياضي للمسألة:**

المتغيرات:

$x_1$: عدد (الكلغ ) الواجب إستعمالها من المادة الأولى في الخليط النهائي.

$x_2$: عدد (الكلغ ) الواجب إستعمالها من المادة الثانية في الخليط النهائي.

دالة الهدف:

$$\text{Mix } Z = 50x_1 + 60x_2$$

القيود:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_1 \geq 150 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. **الخطوة الثانية: تحويل النموذج الرياضي إلى نموذج معياري**

القيد الأول: نلاحظ أن القيد الأول على شكل مساواة وبالتالي يبقى في الحاضر على حاله **$x_1 + x_2 = 1000$**

القيد الثاني:لكي يتساوى طرفا القيد فإننا نطرح كمية من الطرف الأيسر من القيد ويسمى المتغير الذي يرمز للكمية المضافة **بالمتغير الزيادة Variade de surplus** ونرمز له بالرمز :S (الطاقة العاطلة الغير مستغلة) وبالتالي يصبح القيد الثاني كما يلي: **$x_1 - S_1 = 150$**

القيد الثالث: شرط عدم السلبية **$x_1 , x_2, S_1 \geq 0$**

ومنه تصبح دالة الهدف كما يلي: **$\text{Mix } Z = 50x_1 + 60x_2 + 0S_1$**

3. **الخطوة الثالثة: إيجاد حل أولي مقبول**

لإيجاد حل أولي مقبول نفرض حالة اللاإنتاج والتي يكون فيها كل من $X_1$ و $X_2$ مساويا للصفر.عندئذ يكون الحل الأولي كما يلي:

القيد الأول: $0+0=1000$ وهذا غير منطقي.

القيد الثاني: $-S_1=150$ وهذا غير منطقي لأنها تخرق شرط عدم السلبية.

وبما انه لا يوجد حل أولي مقبول ، يمكن اللجوء إلى حل أولي وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية (خيالية) للقيود الغير محققة ونرمز لها بالرمز: **R** (هو متغير وهمي لا معنى له إقتصاديا، ينعدم أثناء الوصول إلى الحل الأمثل، إضافته تساعدنا على الحل فقط، ولا يؤثر على الحل لكن يؤثر على دالة الهدف )كما يلي:

$$x_1+x_2+R_1=1000$$

$$x_1-S_1+R_2=150$$

وبما أن المتغيرات الإصطناعية دخيلة على المسألة وتستعمل لإيجاد الحل الأولي فقط فيجب التخلص منها حتى لا تظهر في الحل الأمثل وذلك عن طريق تحميلها بمعامل كبير (رقم كبير جدا) ونرمز لها بالرمز **M**: في دالة الهدف . وبالتالي تكون دالة الهدف في هذه الحالة كما يلي:

$$Mix\ Z=50x_1+60x_2+0S_1+MR_1+MR_2$$

4. **الخطوة الرابعة: نقل معطيات الحل الأولي لجدول السمبلكس**

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 50 | 60 | 0 | M | M | R النتيجة | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $R_1$ | $R_2$ | | |
| M | $R_1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1000 | 1000/1=1000 |
| M | $R_2$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 150 | 150/1=150 |
| Zj | | 2M | M | -M | M | M | 1150M | |
| Cj-Zj | | 50-2M | 60-M | M | 0 | 0 | | |

5. **الخطوة الخامسة: إختبار أمثلية الحل.**

نتوصل إلى الحل الأمثل في حالة تخفيض التكاليف Min عندما يكون جميع قيم السطر الأخير موجبة أو معدومة.

6. **الخطوة السادسة: تحسين الحل**

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 50 | 60 | 0 | M | M | R النتيجة | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $R_1$ | $R_2$ | | |
| M | $R_1$ | 0 | 1 | 1 | 1 | -1 | 850 | 850/1=850 |
| 50 | $x_1$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 150 | 150/-1=-150 |
| Zj | | 50 | M | M-50 | M | -M+50 | 850M+7500 | |
| Cj-Zj | | 0 | 60-M | -M+50 | 0 | 2M-50 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الموالي.

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 50 | 60 | 0 | M | M | R النتيجة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $R_1$ | $R_2$ | |
| 0 | $S_1$ | 0 | 1 | 1 | 1 | -1 | 850 |
| 50 | $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1000 |
| Zj | | 0 | 50 | 0 | 50 | 0 | 50000 |
| Cj-Zj | | 50 | 10 | 0 | M-50 | M | |

قيم (Cj-Zj) كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق، ومنه:

$x_1$=1000

$x_2$=0

$S_1$=850

Z= 50000

<u>القرار الإداري:</u>

يجب على شركة إنتاج 1000 كلغ من المادة الأولى فقط، لتحقيق أدنى تكلفة قدرها 50000 دج.

**مثال 02:**

ليكن لدينا النموذج التالي:

$$\text{Mix } Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ 6x_1 + x_2 \geq 30 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلـوب**: إيجـاد التوليفـة المثلى مـن كـلا المتغيرين لتحقيـق ادنى تكلفـة ممكنـة باسـتخدام جـدول سمبلكس؟

## الحل:

تحويل النموذج الرياضي إلى نموذج معياري

$$\text{Mix } Z = 5x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - S_1 + R_1 = 20 \\ 6x_1 + x_2 - S_2 + R_2 = 30 \\ x_1 , x_2, S_1, S_2 , R_1 , R_2 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 5 | 3 | 0 | 0 | M | M | R | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $R_1$ | $R_2$ | النتيجة | |
| M | $R_1$ | 3 | 2 | -1 | 0 | 1 | 0 | 20 | 20/3=6,66 |
| M | $R_2$ | 6 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 30 | 30/6=5 |
| Zj | | 9M | 3M | -M | -M | M | M | 50M | |
| Cj-Zj | | 5-9M | 3-3M | M | M | 0 | 0 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثاني.

- $x_1$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Cj-Zj**) (عمود الإرتكاز)

- $R_2$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (6) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثاني:</u>

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 5 | 3 | 0 | 0 | M | M | $R$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $R_1$ | $R_2$ | النتيجة | |
| M | $R_1$ | 0 | 3/2 | -1 | 1/2 | 1 | -1/2 | 5 | 5/(3/2)=3,33 |
| 5 | $x_1$ | 1 | 1/6 | 0 | -1/6 | 0 | 1/6 | 5 | 5/(1/6)=30 |
| Zj | | 0 | 3/2M+5/6 | -M | 1/2M-5/6 | M | -1/2M+5/6 | 5M+5 | |
| Cj-Zj | | 5 | -3/2M+13/6 | M | -1/2M+5/6 | 0 | 3/2+5/6 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- $X_2$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Cj-Zj)** (عمود الإرتكاز)
- $R_1$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (3/2) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثالث:</u>

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 5 | 3 | 0 | 0 | M | M | R النتيجة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $R_1$ | $R_2$ | |
| 3 | $x_2$ | 0 | 1 | -2/3 | 1/3 | 2/3 | -1/3 | 10/3 |
| 5 | $x_1$ | 1 | 0 | 1/9 | -2/9 | 1/9 | 2/9 | 40/9 |
| Zj | | 5 | 3 | -13/9 | -1/9 | 23/9 | 1/9 | 290/9 |
| Cj-Zj | | 0 | 0 | 13/9 | 1/9 | M-23/9 | M-1/9 | |

قيم (Cj-Zj)كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق. ومنه:

$x_1=40/9$

$x_2=10/3$

$S_1=0$

$S_2=0$

$Z= 290/9$

**مثال 03:**

ليكن لدينا النموذج التالي:

$$\text{Mix } Z = 5x_1 + 7x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 50 \\ x_1 \geq 20 \\ x_2 \leq 20 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب:** إيجاد التوليفة المثلى من كلا المتغيرين باستخدام طريقة Big M؟

**الحل:**

<u>تحويل النموذج الرياضي إلى نموذج معياري</u>

$$\text{Mix } Z = 5x_1 + 7x_2 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1 + MR_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + R_1 = 50 \\ x_1 - S_2 + R_2 = 20 \\ x_2 + S_3 = 20 \\ x_1 , x_2, S_2, S_3 , R_1 , R_2 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 5 | 7 | 0 | 0 | M | M | R | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_2$ | $S_3$ | $R_1$ | $R_2$ | النتيجة | |
| M | $R_1$ | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 50 | 50/1=50 |
| M | $R_2$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 20 | 20/1=20 |
| 0 | $S_3$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 20 | 20/0=∞ |
| Zj | | 2M | 2M | -M | 0 | M | M | 70M | |
| Cj-Zj | | 5-2M | 7-2M | M | 0 | 0 | 0 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثاني.

- $X_1$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Cj-Zj** (عمود الإرتكاز)
- $R_2$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (1) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثاني:

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 5 | 7 | 0 | 0 | M | M | R | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_2$ | $S_3$ | $R_1$ | $R_2$ | النتيجة | |
| M | $R_1$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | -1 | 30 | 30/2=15 |
| 5 | $x_1$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 20 | 20/0=∞ |
| 0 | $S_3$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 20 | 20/1=20 |
| Zj | | 5 | 2M | M-5 | 0 | M | -M | 30M+100 | |
| Cj-Zj | | 0 | 7-2M | -M+5 | 0 | 0 | 2M | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- $X_2$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **(Cj-Zj** (عمود الإرتكاز)

- $R_1$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (2) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثالث:

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 5 | 7 | 0 | 0 | M | M | R النتيجة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $S_2$ | $S_3$ | $R_1$ | $R_2$ | |
| 7 | $x_2$ | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | -1/2 | 15 |
| 5 | $x_1$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| 0 | $S_3$ | 0 | 0 | -1/2 | 1 | -1/2 | 1/2 | 5 |
| Zj | | 5 | 7 | -3/2 | 0 | 7/2 | 3/2 | 205 |
| Cj-Zj | | 0 | 0 | 3/2 | 0 | M-7/2 | M-3/2 | |

قيم (Cj-Zj) كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق. ومنه:

$x_1=20$

$x_2=15$

$S_2=0$

$S_3=5$

$Z= 205$