الفصل الخامس: مسائل النقل
Transportation problems

1. **مسائل النقل في حالة تخفيض التكاليف.**
   - طريقة الزاوية الشمالية الغربية *North-West Corner*.
   - طريقة التكلفة الدنيا *Least-Cost*.
   - طريقة فوجل التقريبية (الجزاء) *Vogel's Approximation* *(Penalty Method)*.
2. **مسائل النقل في حالة تعظيم الأرباح.**
   - الزاوية الشمالية الغربية.
   - طريقة أعلى عائد (وهي المقابلة لأدنى تكلفة في حالة التدنئة).

الفصل الخامس: مسائل النقل
Transportation problems

يعتبر تقليل تكلفة نقل المنتجات مواقع الإنتاج والتخزين إلى مراكز الطلب جزء ًا أساسي ًا من الحفاظ على الربحية للشركات التي تتعامل مع توزيع المنتجاتنظر ًا لأن تكاليف النقل لا يمكن التحكم فيها بشكل عام ، فإن تقليل التكلفة الإجمالية يتطلب اتخاذ أفضل قرارات توجيه المنتج. من هذا المنطلق تسعى مؤسسات الأعمال المختلفة إلى استخدام الوسائل والأساليب الحديثة والمتطورة بهدف تخفيض تكاليف النقل إلى أدنى مستوى ممكن. تمت صياغة هذه المشكلة الأساسية لأول مرة كمشكلة برمجة خطية في أوائل الأربعينيات من القرن الماضي وهي معروفة على نطاق واسع بمشكلة النقل**(Sewel, 2005, p. 1)**

1. مسائل النقل في حالة تخفيض التكاليف:

وكمثال: لنفرض أن شركة ما تمتلك مصنعان في مواقع مختلفة في جميع أنحاء البلاد حيث ينتجان أدوات معينة. يمتلك شريك المبيعات الخاص بهم ثلاثة مستودعات مركزية حيث يقومون بشحن هذه الأدوات إلى عملائهم المختلفين. يمكن للمصانع إنتاج عدد معين من الأدوات في الأسبوع لكل منها ، كما أن الطلب المتوقع لكل مستودع معروف أيض ًا. يوجد تكلفة شحن من كل مصنع إلى كل مستودع.

السؤال المطروح: ما هو المصنع الذي يجب أن ينتج ويشحن منتوجاته ؟ كم عدد الأدوات التي يجب تصنيعها ؟ ولأي مستودع يجب شحنها لتلبية الطلب في كل موقع بأقل تكلفة؟**(IMSL, 2020, p. 1)**

صياغة نموذج مسألة النقل:

نموذج النقل هو نوع خاص من مشاكل الشبكات لشحن سلعة من المصدر (على سبيل المثال: المصانع) إلى الوجهات (على سبيل المثال : المستودع). يتعامل نموذج النقل بالحصول على خطة الحد الأدنى للتكلفة لنقل سلعة من عدد من المصادر (m) إلى عدد من الوجهات (n).

لنفرض أن: s_i هو عدد وحدات التوريد المطلوبة عند المصدر i $(i=1,2,3,\ldots,m)$، d_j هو عدد وحدات المطلوبة (الطلب) في الوجهة j $(j=1,2,3,\ldots,n)$ ويمثل c_{ij} تكلفة الوحدة الواحدة لنقل الوحدات من المصادر i إلى الوجهة j.

باستخدام طريقة البرمجة الخطية لحل مشكلة النقل ، نحدد قيمة الوظيفة الموضوعية التي تقلل من تكلفة النقل وأيض ًا تحديد عدد الوحدات التي يمكن نقلها من المصدر i إلى الوجهة j. إذا كان x_{ij} هو عدد الوحدات المشحونة من المصدر i إلى الوجهة j. **(Shraddha, 2017, p. 270)**

ومنه النموذج الرياضي لمشكلة النقل فيمكن كتابته بالشكل التالي:

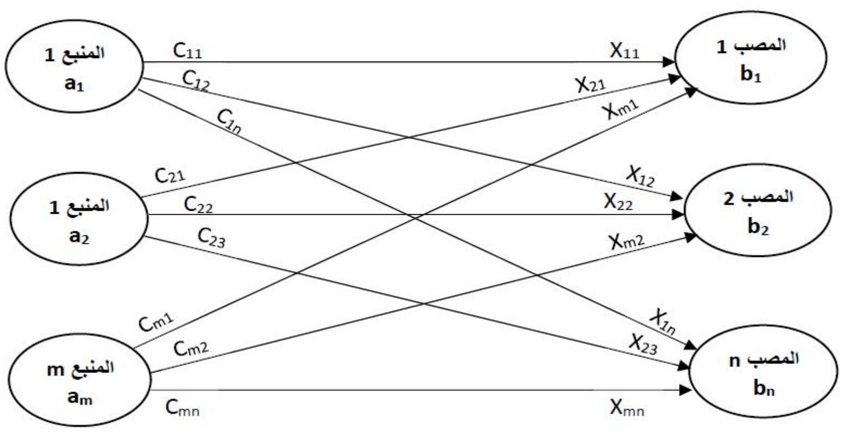
$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$
$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \ ,\ \ i = 1,2,3 \dots m.$$
$$\sum\nolimits_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \ ,\ \ j = 1,2,3 \dots n.$$
$$x_{ij} \geq 0$$

يمكن تمثيل جدول التكاليف للوحدات من المراكز الإنتاجية إلى المراكز التسويقية كما يلي:

مراكز العرض	مراكز الطلب					العرض Supply
	1	2	3	....	N	
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2
3	C_{31} X_{31}	C_{23} X_{23}	C_{33} X_{33}	...	C_{3n} X_{3n}	a_3
...	...	...	...	...	...	...
M	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	...	C_{mn} X_{mn}	
Demand الطلب	b_1	b_2	b_3	...	b_n	$\sum a_i = b_j$

كما يشترط نموذج النقل بشكله الأولي ضرورة المساواة بين عدد الوحدات في المراكز الإنتاجية وعدد الوحدات المطلوبة في المراكز التسويقية (مراكز الطلب)، ليكون جدول النقل في حالة توازن، أي أن: (مجموع العرض = مجموع الطلب)، أما إذا لم تتحقق المساواة يتم إضافة سطر أو عمود وهمي ليستوعب الفارق بين كمية العرض والطلب وتكون تكاليف النقل فيها صفر.

الشكل 01: تمثيل مشكلة النقل بيانيا.



المصدر: ريغي هشام. (2021). **محاضرات وتطبيقات في مادة رياضيات المؤسسة.**

مطبوعة منشورة. جامعة ميلة. الجزائر.

إيجاد الحل الأولي(الإبتدائي) لمشكلة النقل

لغرض إيجاد الحل الأولي لمشكلة النقل هناك ثلاث طرق رئيسية:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية North-West Corner
- طريقة التكلفة الدنيا Least-Cost
- طريقة فوجل التقريبية(الجزاء) Vogel's Approximation (Penalty Method).

- **طريقة الزاوية الشمالية الغربية North-West Corner Method :** يقصد بالزاوية الشمالية الغربية أو خانة في الجدول إلى الأعلى وإلى اليسار، وهي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي، وتعتبر هذه الطريقة من أسهل وأبسط الطرق وأكثرها شيوعا، حيث لا يستخدم فيها أي منطق علمي لتوزيع الكميات المتوفرة من المراكز الانتاجية إلى مراكز الطلب، بالمقابل فإنها تهمل عنصر التكاليف عند التوزيع، وتتطلب جداول كثيرة للوصول إلى الحل الأمثل.

يتم الحل وفقا لهذه الطريقة بعد التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن كما يلي:

- نبدأ بالخلية العليا اليسرى(الزاوية الشمالية الغربية) لجدول النقل، ثم نخصص أكبر عدد من الوحدات لتلك الخلية،ويكون هذا العدد المخصص الأقل في سطر الكمية المعروضة المتوفرة أو الأقل في عمود متطلبات الطلب.
- ننقص كمية العرض في السطر، وكمية الطلب في العمود بنفس كمية الوحدات التي خصصت للخلية.
- إذا أصبح العرض في السطر مساويا الآن للصفر، نتحرك إلى الأسفل في العمود إلى الخلية التالية، أما إذا أصبح كل من العرض في السطر والطلب في العمود مساويين للصفر، نتحرك إلى الأسفل خلية واحدة ثم إلى اليمين خلية أخرى.
- نخصص للخلية التالية والمحددة في الخطوة الثالثة، أكبر عدد ممكن الوحدات، ثم نعود حتى نصل إلى حل أولي مقبول. **(بهلولي، 2020، صفحة 116)**

مثال 01:

تنتج شركة ثلاثة أنواع من السلع الكهربائية، وتقوم بتجهيز ثلاثة مراكز تسويقية (الطلب)، و يوضح الجدول التالي تكاليف نقل الوحدة الواحدة وكذا الكميات المعروضة والمطلوبة.

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض **Supply**
	1	2	3	
1	7	3	10	22
2	4	6	0	24
3	5	8	9	14
Demand الطلب	18	22	20	60

المطلوب: إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

الحل:

بعد التأكد من أن الكميات المعروضة مساوية للكميات المطلوبة(في هذا المثال متساوية وتساوي 60)نتبع الخطوات التالية:

– نبدأ بالطلب الأول وقيمته 18 وحدة والعرض الأول وقيمته 22 وحدة، وبالتالي العرض الأول يغطي الطلب الأولى وبتكلفة نقل 7 دج، مع بقاء 4 وحدات من العرض الأول.

– ننتقل للطلب الثاني وقيمته 22 وحدة يتم تلبيتها 4 وحدات من العرض الأول المتبقي وبتكلفة نقل 3 دج، أما 18 وحدة الأخرى تلبى بالعرض الثاني المقدر ب 24 وحدة بتكلفة نقل 6 دج، مع بقاء 6 وحدات من العرض الثاني بعد تلبية الطلبين الأول والثاني.

– ثم ننتقل للطلب الثالث وقيمته 20 وحدة التي يتم تلبيته ب 6 وحدات المتبقية من العرض الثاني بتكلفة نقل 0 دج، وإكمالها بالعرض الثالث 14 وحدة بتكلفة نقل 9 دج.

ويمكن تمثيل الخطوات السابقة في جدول الحل الأولي بحيث أن ما داخل المربعات الصغيرة هي تكاليف النقل والأخرى الكميات:

مراكز العرض	مراكز الطلب 1	2	3	العرض Supply
1	[7] 18	[3] 4	[10]	22
2	[4]	[6] 18	[0] 6	24
3	[5]	[8]	[9] 14	14
Demand الطلب	18	22	20	60

ثم نحسب قيمة التكاليف الكلية من دالة الهدف بضرب الكميات في تكلفة الوحدة الواحدة للنقل، ومنه تكون تكلفة النقل الأولية وفقا لهذه الطريقة:

$$MinZ=(18\times7)+(4\times3)+(18\times6)+(6\times0)+(14\times9)=372\ DA$$

مثال 02:

يقوم الديوان الوطني للتمور بتسويق تمور إنطلاقا من ثلاثة موانئ رئيسية إلى ثلاثة دول، حيث أن الكميات الممكن تصديرها حسب الموانئ هي:

- ميناء الجزائر : يمكن أن يصدر 80 طن.
- ميناء وهران : يمكن أن يصدر 40 طن.
- ميناء جيجل : يمكن أن يصدر 60 طن.

و كانت الكميات المطلوبة لكل دولة:

- الو م أ: حجم الطلب 70 طن.
- كندا : حجم الطلب 70 طن.
- استراليا : حجم الطلب 40 طن.

و الجدول الموالي يلخص تكاليف النقل للقنطار الواحد:

	أستراليا	كندا	الو م أ	
	7	6	5	ميناء الجزائر
	11	5	9	ميناء وهران
	8	12	13	ميناء جيجل

المطلوب:

1. أكتب البرنامج الرياضي للمسألة؟
2. إيجاد الحل مثل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

الحل:

1. <u>كتابة البرنامج الرياضي للمسألة</u>:

دالة الهدف : بما أن الهدف هو البحث عن أفضل توليفات للنقل بين الموانئ و مراكز الاستقبال بأقل التكاليف فإن دالة الهدف في هذه المسألة هي دالة تدنئة للتكاليف و يمكن صياغة المعادلة بالشكل الرياضي العام:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \ ,\ \ i = 1,2,3 \dots m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \ ,\ \ j = 1,2,3 \dots n.$$

$$x_{ij} \geq 0$$

و يمكن ترجمتها حسب مثالنا إلى الشكل:

✓ دوال الطلب تكون بالشكل:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j / \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3$$

✓ دوال العرض تكون بالشكل:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = a_i / \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = a_3$$

كميات العرض والطلب غير سالبة:

$$x_{ij} \geq 0$$

2. إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

بعد التأكد من أن الكميات المعروضة مساوية للكميات المطلوبة(في هذا المثال متساوية = 180)نتبع الخطوات التالية:

– نبدأ بالطلب الأول وقيمته 70 طن والعرض الأول وقيمته 80 طن، وبالتالي العرض الأول يغطي الطلب الأولى وبتكلفة نقل 5 دج، مع بقاء 10 طن من العرض الأول.

– ننتقل للطلب الثاني وقيمته 70 طن يتم تلبيتها 10 طن من العرض الأول المتبقي وبتكلفة نقل 6 دج، أما 60 طن الأخرى تلبى بالعرض الثاني المقدر ب 40 طن بتكلفة نقل 5 دج، و 20طن من العرض الثالث وبتكلفة 12 دج.

– ثم ننتقل للطلب الثالث وقيمته 40 طن التي يتم تلبيته ب 40 طن المتبقية من العرض الثالث بتكلفة نقل 8 دج.

ويمكن تمثيل الخطوات السابقة في جدول الحل الأولي بحيث أن ما داخل المربعات الصغيرة هي تكاليف النقل والأخرى الكميات:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض Supply
	الو م أ	كندا	أستراليا	
ميناء الجزائر	5 **70**	6 **10**	7	80
ميناء وهران	9	5 **40**	11	40
ميناء جيجل	13	12 **20**	8 **40**	60
الطلب Demand	70	70	40	180

ثم نحسب قيمة التكاليف الكلية من دالة الهدف بضرب الكميات في تكلفة الوحدة الواحدة للنقل، ومنه تكون تكلفة النقل الأولية وفقا لهذه الطريقة:

$$MinZ=(70\times5)+(10\times6)+(40\times5)+(20\times12)+(40\times8)=1170\ DA$$

– **طريقة التكلفة الدنيا Least-Cost:**

طريقة التكلفة الدنيا هي طريقة أخرى تستخدم للحصول على الحل المبدئي العملي لمشكلة النقل. هنا ، يبدأ التخصيص بالخلية ذات التكلفة الدنيا. يتم اختيار الخلايا الأقل تكلفة على الخلية الأعلى تكلفة بهدف الحصول على أقل تكلفة للنقل.

تعطي طريقة التكلفة الدنيا نتائج أفضل من طريقة الركن الشمالي الغربي لأنها تأخذ في الاعتبار تكلفة الشحن أثناء إجراء التخصيص ، في حين أن طريقة الزاوية الشمالية الغربية تراعي فقط متطلبات التوافر والعرض والتخصيص يبدأ من الزاوية اليسرى القصوى بغض النظر عن تكلفة الشحن. **(Business, 2022, p. 1)**

ولفهم طريقة التكلفة الأقل من خلال المشكلة المثال أدناه:

مثال 03:

تقوم المؤسسة الوطنية للمياه المعدنية بالجزائر بتموين المناطق الشمالية للوطن بمنتوجاتها من المياه المعدنية عن طريق وحداتها الثلاث الأكثر شهرة وهي:

- وحدة موزاية ، تنتج قارورات مياه المسماة (موزاية) بطاقة قصوى هي 55.10^3 قارورة شهريا؛
- وحدة سعيدة ، تنتج قارورات مياه المسماة (سعيدة) بطاقة قصوى هي 45.10^3 قارورة شهريا؛
- وحدة باتنة ، تنتج قارورات مياه المسماة (باتنة) بطاقة قصوى هي 20.10^3 قارورة شهريا.

يتم التسويق في إتجاه النواحي الشمالية الثلاث وهي:

- الناحية الغربية مقرها وهران، تقدر كميات طلبها بـ 50.10^3 قارورة شهريا؛

- الناحية الشرقية مقرها قسنطينة، تقدر كميات طلبها بـ 30.10^3 قارورة شهريا؛
- الناحية الوسطى مقرها البليدة، تقدر كميات طلبها بـ 40.10^3 قارورة شهريا.

دراسات المحاسبة التحليلية بينت أن تكلفة القارورة الواحدة المنقولة من كل وحدة إنتاج إلى كل مقر ناحية من النواحي بالدينار كما يلي:

الغرب	الشرق	الوسط	
5	4	1	موزاية
3	7	5	سعيدة
9	8	10	باتنة

تبحث المؤسسة عن خطة لتموين مختلف النواحي بمنتوجاتها بأقل تكلفة ممكنة. **(راتول، 2006، صفحة 110)**

المطلوب:

1. أثبت أن هذه المسألة تخضع لمسائل النقل؟
2. شكل جدول المسألة باستخدام طريقة التكلفة الدنيا؟

الحل:

1. كتابة البرنامج الرياضي للمسألة:

دالة الهدف: هدف المؤسسة هو إيجاد الكميات الواجب توجهها من كل منبع إلى كل مصب بغية تدنئة التكاليف الكلية التي تتحملها المؤسسة وبالتالي فإنه توجد دالة الهدف هي على الشكل التالي:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} C_{ij}\, x_{ij}$$

مجموع الطلب يساوي مجموع العرض:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 55 + 45 + 20 = 120$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 50 + 40 + 30 = 120$$

كميات العرض والطلب غير سالبة:

$$x_{ij} \geq 0$$

2. تشكيل جدول المسألة باستخدام طريقة التكلفة الدنيا:

بعد التأكد من أن الكميات المعروضة مساوية للكميات المطلوبة(في هذا المثال متساوية $=120.10^3$ قارورة مياه معدنية) نتبع الخطوات التالية:

– نبدأ بالطلب الأول وقيمته 40.10^3 قارورة والعرض الأول وقيمته 55.10^3 قارورة ، وبالتالي العرض الأول يغطي الطلب الأولي وبأقل تكلفة نقل 1 دج، مع بقاء 15.10^3 قارورة من العرض الأول.

– بقاء 15.10^3 قارورة من العرض الأول توزع على مركز الطلب الثاني (لأنه أقل تكلفة)

– ننتقل للطلب الثاني وقيمته المتبقية 15.10^3 قارورة ،يتم تلبيتها من العرض الثاني بـ 15.10^3 قارورة وبتكلفة نقل 7 دج، أما 30.10^3 قارورة متبقيةالأخرى المتبقية من العرض الثاني تلبي مركز الطلب الثالث المقدر ب 50.10^3 قارورة بتكلفة نقل 3 دج، و 20.10^3 قارورة من العرض الثالث تلبي بها مركز الطلب الثالث وبتكلفة أقل تقدر بـ 9 دج.

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض Supply	باقي	باقي
	الوسط	الشرق	الغرب			
موزاية	1 / 40	4 / 15	5	55	15	0
سعيدة	5	7 / 15	3 / 30	45	30	0
باتنة	10	8	9 / 20	20	0	
Demand الطلب	40	30	50	120		
باقي	0	15	20			
باقي		0	0			

ثم نحسب قيمة التكاليف الكلية من دالة الهدف بضرب الكميات في تكلفة الوحدة الواحدة للنقل، ومنه تكون تكلفة النقل الأولية وفقا لهذه الطريقة:

$$MinZ=(40\times1)+(15\times4)+(15\times7)+(30\times3)+(20\times9)=475.10^3\ DA$$

– **طريقة فوجل التقريبية(الجزاء) Vogel's Approximation (Penalty Method):**

مشكلة النقل هي مشكلة الحياة الحقيقية حيث يتم نقل السلع من المصانع إلى مستودعات البيع بالتجزئة بحيث يجب تقليل تكلفة النقل الإجمالية. في البحوث العمليات ، تعتبر مسائل النقل فئة خاصة من مسائل البرمجة الخطيةحيث ت ُعرف طريقة فوجل التقريبية (VAM) بالطريقة الفعالة لحل مشاكل النقل .إن مفهوم تكلفة الجزاء (الاختلاف بين أصغر تكلفة في الصف أو العمود) تجعل هذه

الطريقة أكثر فاعلية من الطرق الأخرى مثل: طريقة الزاوية الشمالية الغربية North-West Corner و طريقة التكلفة الدنيا Least-Cost وما إلى ذلك. ولكن طريقة التحديد تكلفة الجزاء ليست منطقية في بعض الحالات. **(Ashraful, 2014, p. 182)**.

وتتلخص خطوات إيجاد الحل الأساسي الأولي بهذه الطريقة فيما يلي:

- الخطوة 1: موازنة مشكلة النقل المحددة إذا كان (إجمالي العرض> إجمالي الطلب) أو (إجمالي العرض < إجمالي الطلب)؛
- الخطوة 2: حدد تكلفة الجزاء لكل صف وعمود عن طريق طرح أقل تكلفة للخلية في الصف أو العمود من أقل تكلفة خلية التالية في نفس الصف أو العمود؛
- الخطوة 3: حدد الصف أو العمود الذي يحتوي على أعلى تكلفة جزاء، ونخصص أكبر عدد ممكن من الوحدات إلى الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة في السطر أو العمود الذي تم اختياره؛
- الخطوة 4: قم بتخصيص أكبر قدر ممكن للخلية الممكنة بأقل تكلفة نقل في الصف أو العمود مع أعلى تكلفة جزاء؛
- الخطوة 5: كرر الخطوات 2 و 3 و 4 حتى يتم استيفاء جميع المتطلبات؛
- الخطوة 6: حساب تكلفة النقل الإجمالية للتخصيص الممكنة. **(Serdar, 2011, p. 373)**

مثال 04:

أوجد الحل الأولي لمشكلة النقل السابقة (مثال03) باستخدام طريقة فوجل ؟

الحل:

1. نجد الفروقات الأولى في التكلفة للأسطر والأعمدة كما هو مبين في الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب 1	2	3	العرض Supply	الفرق 1	الفرق 2	الفرق 3
1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$ /	55	3	1	1
2	$\boxed{5}$ /	$\boxed{7}$ /	$\boxed{3}$ 45	45	2	4	/
3	$\boxed{10}$ /	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{9}$ 5	20	1	1	1
Demand الطلب	40	30	50	120			
الفرق 1	4	3	2				
الفرق 2	/	3	2				
الفرق 3	/	4	4				

2. نلاحظ أن أكبر فرق سطريا وعموديا هو الموجود في العمود الأول، وعليه نبحث على أقل تكلفة في العمود مع الكمية (d_1) فنجد أن للخلية (S_1,d_1)أقل تكلفة وقيمتها هي 1 ، نقارن احتياجات مركز الطلب (d_1) مع الكمية المتاحة في المصدر(S_1) ثم نختار أقل الكميتين $min(40,55)= 40$ هذه العملية تؤدي إلى تلبية كل إحتياجات المركز(d_1) (تشطيب الخليتين المتبقيتين من الجدول) بينما تبقى قيمة عرض مقدارها 15 في المصدر(S_1) ، ثم نعيد حساب الفروق الثانية بين التكاليف مرة أخرى مع تجاهل تكاليف الخلايا المملوءة والمشطبة.
3. نلاحظ أن أكبر فرق يقابل السطر الثاني، وأصغر تكلفة على مستوى هذا السطر هي 3 في الخلية (S_2,d_3) نقارن احتياجات مركز الطلب (d_3) مع ما هو متاح من الكميات لدى المصدر(S_2) ثم نختار أقل الكميتين$min(50,45)=45$ يتم تخصيص 45 للخلية(S_2,d_3) وبالتالي جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر (S_2) قد نفذت(يتم شطب الخليتين المتبقيتين) وبقي احتياج مقداره 5 وحدات للمركز(d_3) لم يلبى بعد، حساب الفروق الثالثة بين التكاليف مرة أخرى.
4. نلاحظ أن أكبر فرق هو 4 على مستوى العمودين الثاني والثالث، إلا أننا نختار العمود الثاني لأنه يقابل أقل تكلفة وتقدر قيمتها ب 4 في الخلية (S_1,d_2) نقارن احتياجات مركز الطلب (d_2)مع ما هو متبقي من الكميات لدى المصدر (S_1) ، ثم نختار أقل الكميتين $min(15,30)= 45$ ونخصصها للخلية (S_1,d_2) وبالتالي جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر (S_1) قد نفذت (يتم شطب الخلية المتبقية)وبقي طلب مقداره 15 وحدة في العمود الثاني(d_3) لم يلبى بعد.
5. عند هذه المرحلة من الحل لا نحتاج لحساب الفرق في التكلفة للأسطر والأعمدة بسبب وجود مصدر عرض واحد (S_3) والذي لم تنفذ كل الكميات المتوفرة لديه، إذن نبحث عن أقل تكلفة في السطر (S_3) والتي تساوي 8 تقابل العمود(d_2) ، إذن سيتم تخصيص 15 وحدة لتلبية كل احتياجات مركز الطلب (d_2)، ويبقى عرض مقداره 5 وحدات يخصص للخلية (S_3,d_3) ، ويتم بذلك تلبية كل إحتياجات المركز (d_3) ، وبذلك يصبح نموذج النقل في صيغته النهائية كما يلي:

مراكز العرض	مراكز الطلب		
	1	2	3
1	1 **40**	4 **15**	5 /
2	5 /	7 /	3 **45**
3	10 /	8 **15**	9 **5**
Demand الطلب	40	30	50

عدد الخلايا الداخلة في الحل يساوي إلى m+n-1 ويساوي 5، وبموجب الجدول أعلاه تكون تكلفة النقل الإجمالية كما يلي:

$$MinZ=(40\times1)+(15\times4)+(45\times3)+(15\times8)+(5\times9)=400.10^3\ DA$$

نلاحظ أن الطريقتين الأخيرتين قد حققتا اقتصادا في مجموع التكاليف قدره 75 وحدة نقدية مقارنة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

مثال 05:

لنفرض أنه لدينا مؤسسة اقتصادية لها 3 وحدات إنتاجية متواجدة في ثلاث مناطق مختلفة، كما أنها تتوفر على 5 مراكز توزيع ، حيث أن هذه المؤسسة تنتج المنتج P على مستوى مراكز الإنتاج، ثم تقوم بتوزيعه على مراكز التوزيع الخمسة.

تعرض مراكز الإنتاج (المنبع)كميات معينة من الإنتاج: a_1، a_2، a_3، أما مراكز التوزيع (المصب) فتقوم بطلب كميات معينة من الإنتاج: b_1، b_2، b_3، b_4، b_5، كما هو موضح في الجدولين أدناه.

مركز الإنتاج	O_1	O_2	O_3
الطاقة الإنتاجية (العرض d_i)	$a_1=240$	$a_2=160$	$a_3=260$

مركز التوزيع	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
الطلب (b_j)	$b_1=120$	$b_2=130$	$b_3=145$	$b_4=125$	$b_5=140$

عملية نقل المنتج P من مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مراكز التوزيع الخمسة يترتب عليها تحمل تكلفة النقل C_{ij}.

C_{ij} تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج P من مراكز الإنتاج i إلى مركز التوزيع j .

تكلفة النقل الوحدوية يقدمها الجدول أدناه:

C_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	100	800	100	500	400
O_2	500	500	300	600	700
O_3	200	900	500	900	800

المطلوب:

أوجد الحل الأولي لمشكلة النقل باستخدام طريقة فوجل ؟

الحل:

1. نجد الفروقات الأولى في التكلفة للأسطر والأعمدة كما هو مبين في الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب 1	2	3	4	5	العرض Supply	الفرق 1	الفرق 2	الفرق 3	الفرق 4
1	[100] /	[800] /	[100] **145**	[500] /	[400] **95**	240	0	300	100	/
2	[500] /	[500] **130**	[300] /	[600] **30**	[700] /	160	200	200	100	100
3	[200] **120**	[900] /	[500] /	[900] **95**	[800] **45**	260	300	300	100	100
Demand الطلب	120	130	145	125	140	660				
الفرق 1	100	300	200	100	300					
الفرق 2	/	300	200	100	300					
الفرق 3	/	300	/	100	300					
الفرق 4	/	400	/	300	100					

2. نقوم بحساب الفرق بين أدنى تكلفتين على مستوى جميع الأسطر و الأعمدة فنحصل على القيم: (100-100=0، 300-500=200، 500-200=300) على مستوى الأسطر الثلاث، ونحصل على القيم: (200-100=100، 800-500=300، 300-100=200، 600-500=100، 700-400=300) على مستوى عمدة؛

3. نقوم باختيارأكبر فرق بين الأعمدة و الأسطر، نلاحظ في هذا المثال أن 300 هي أكبر فرق و قد تكررت في السطر الأخير و العمودين الثاني و الخامس، و هنا يتم اختيار أكبر فرق بينها و الذي يوافق أدنى تكلفة، و هو السطر الثالث و الذي يوافق 200 التي تعبر عن أدنى تكلفة في الجدول؛

4. تعبر الخلية 200 عن تكلفة تزويد المصب الأول بالمنتج من المنبع الثالث، لذلك يتم تزويد طلبه المتمثل في 120 وحدة من 260 وحدة (عرض المنبع الثالث)، و بذلك يتم إشباع المصب الأول (العمود الأول)، و يتبقى للمنبع الثالث كمية معروضة تقدر بـ 140 وحدة؛

5. و هكذا يتم إلغاء العمود الأول من جدول النقل لكونه مشبعا، و يتم تحيين (*actualisation*) الجدول بإعادة حساب الفرق بين التكاليف المتبقية، فنحصل على القيم: 300، 200، 300 في الأسطر الثلاث، و تبقى القيم: 300، 200، 100، 300 في الأعمدة الأربعة المتبقية، نقوم باختيار أكبر فرق (300) و الذي يوافق أدنى تكلفة (100)؛

6. تمثل الخلية 100 عن تكلفة نقل المنتجات من المنبع الأول إلى المصب الثالث، لذلك يتم تزويد هذا الأخير بكل طلبه المتمثل في 145 وحدة من أصل 240 وحدة معروضة لدى المنبع الأول، و هكذا يتم إشباع العمود الثاني، و إلغاؤه، و يبقى للمنبع الأول كمية معروض تقدر بـ 95 وحدة. **(بلجيلالي، 2018، صفحة 100)**

و بإتباع نفس الخطوات في كل مرة، نحصل على النتائج النهائية التالية:

مراكز العرض	مراكز الطلب					العرض Supply
	1	2	3	4	5	
1	100 /	800 /	100 **145**	500 /	400 **95**	240
2	500 /	500 **130**	300 /	600 **30**	700 /	160
3	200 **120**	900 /	500 /	900 **95**	800 **45**	260
Demand الطلب	120	130	145	125	140	660

عدد الخلايا الداخلة في الحل يساوي إلى m+n-1 ويساوي 7، وبموجب الجدول أعلاه تكون تكلفة النقل الإجمالية كما يلي:

$$MinZ=(145\times100)+(95\times400)+(130\times500)+(30\times600)+(120\times200))$$
$$+(95\times900))+(45\times800)=281000\ DA$$

2. مسائل النقل في حالة تعظيم الأرباح:

إن حل مسائل النقل في حالة التعظيم لا تختلف كثيرا عن الحل في حالة التدنئة كما تم عرضه سابقا، يتم إيجاد الحل الأساسي الأول تحت نفس الشروط ، وإما بطريقة :

- الزاوية الشمالية الغربية؛
- أو طريقة أعلى عائد(وهي المقابلة لأدنى تكلفة في حالة التدنئة).

ثم يتم إختبار الحل إما بـ :

- بطريقة التخطي؛
- أو بطريقة التوزيع المعدل.

غير أن الإختلاف يكمن في إختيار الخلايا التي تدخل الحل إذ على العكس في حالة التدنئة، فإن الخلية المرشحة للدخول إلى الحل هي التي تعطي أكبر عائد حدي موجب .وتجدر الإشارة هنا أيضا أن الخلايا الداخلة في الحل في أي جدول على طول سيرورة الحل يجب أن تساوي : m+n-1 . **(راتول، 2006، صفحة 146)**

- **طريقة أعلى عائد (وهي المقابلة لأدنى تكلفة في حالة التدنئة)**

مثال 06:

المؤسسة الوطنية للصناعات الإلكترونية لها ثلاث وحدات لإنتاج التلفزيونات من نفس الطراز وهي:

- وحدة البليدة؛
- وحدة سيدي بلعباس؛

- وحدة تيزي وزو.

هذه الوحدات مكلفة بتموين مخازنها الرئيسية المتواجدة في كل من:

- الجزائر؛
- وهران؛
- قسنطينة.

التي تمون بدورها السوق الوطنية. الكميات التي تكون الوحدات قادرة على إنتاجها وتسويقها وكذا الكميات التي تطلبها المخازن الرئيسية أسبوعيا والربح المحصل عليه من كل جهاز مرسل من كل وحدة إلى كل مخزن (بالآلاف الدينارات)، معروض في الجدول التالي:

العرض Supply	مخزن وهران	مخزن قسنطينة	مخزن الجزائر	
200	1	3	9	وحدة البليدة
150	0,5	3	6	وحدة تيزي وزو
250	8	0,5	4	وحدة سيدي بلعباس
600	100	220	280	**Demand** الطلب

المطلوب: أوجد شبكة النقل التي يجب على المؤسسة تبنيها والتي تسمح لها بالحصول على أعلى ربح ممكن باستخدام طريقة أعلى ربح؟

الحل:

بعد التأكد من أن الكميات المعروضة مساوية للكميات المطلوبة (في هذا المثال متساوية = 600) وبالتالي يمكن إيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة أعلى ربح باتباع الخطوات التالية:

- أعلى ربح في الجدول هو 9 آلاف دج ، خلية (S_1,d_1)، العرض 200 والطلب 280 ، أكبر قيمة يمكن توجيهها هي :200 ، يستنفذ العرض ، ويبقى الطلب قيمته 80 وحدة.
- أعلى ربح في السطر الثاني هو 6 آلاف دج ، خلية (S_2,d_1)، العرض 150 والطلب 80 وحدة المتبقية، القيمة المتبقية من الطلب تلبى من العرض الثاني بـ: 80 وحدة ، يبقى العرض المتبقي 70 وحدة.
- العرض المتبقي والتي قيمته 70 وحدة توجه إلى الطلب الثاني لأنه يحقق أعلى ربح 3 آلاف دج.
- وبالتالي يبقى الطلب الثاني لم يلبى بمقدار 150 وحدة.
- العرض الثالث يلبي الطلب الثالث بالكامل بمقدار 100 وحدة لأنه يحقق أعلى ربح 8 آلاف دج.
- العرض الثالث يبقى لديه 150 وحدة والتي يلبي بها الطلب الثاني بالكامل.

ويمكن تمثيل الخطوات السابقة في جدول الحل الأولي بحيث أن ما داخل المربعات الصغيرة هي أرباح النقل والأخرى الكميات:

العرض Supply	مراكز الطلب			مراكز العرض
	مخزن وهران	مخزن قسنطينة	مخزن الجزائر	
200	1 /	3 /	9 200	وحدة البليدة
150	0,5 /	3 70	6 80	وحدة تيزي وزو
250	8 100	0.5 150	4 /	وحدة سيدي بلعباس
600	100	220	280	Demand الطلب

عدد الخلايا الداخلة في الحل يساوي إلى m+n-1 ويساوي 5، وبموجب الجدول أعلاه يكون أعلى ربح النقل الإجمالي كما يلي:

$$MaxZ=(200\times9)+(80\times6)+(70\times3)+(150\times0,5)+(100\times8)= 3365000\ DA$$

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

الجدول أدناه يقدم تكاليف النقل الوحدوية لنقل منتج معين من 03 مراكز إنتاج إلى 04 مراكز توزيع، بالإضافة إلى عرض كل مركز إنتاج و طلب كل مركز توزيع.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	12	13	04	06	500
O_2	06	04	10	11	700
O_3	10	09	12	04	800
b_i	400	900	200	500	

المطلوب:

انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكـل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؟

2. قدم نموذج النقل الموافق لجدول النقل المتوصل إليه؟

3. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؟

4.أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؟

5. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؟

حل التمرين الأول:

1. تشكيل جدول النقل:

مراكز العرض	مراكز الطلب 1	2	3	4	العرض Supply
1	12 x_{11}	13 x_{12}	4 x_{13}	6 x_{14}	500
2	6 x_{21}	4 x_{22}	10 x_{23}	11 x_{24}	700
3	10 x_{31}	9 x_{32}	12 x_{33}	4 x_{34}	800
Demand الطلب	400	900	200	500	2000

2- صياغة نموذج النقل:

$$Min\ Z = 12x_{11}+13x_{12}+4x_{13}+6x_{14}+6x_{21}+4x_{22}+10x_{23}+11x_{24}+10x_{31}+9x_{32}+12x_{33}+4x_{34}$$

قيود العرض:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=500$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=700$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=800$$

قيود الطلب:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=400$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{23}=900$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=200$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=500$$

قيود عدم سلبية المتغيرات: $x_{ij} \geq 0$

3- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

مراكز العرض	مراكز الطلب 1	2	3	4	العرض Supply	الفرق 1	الفرق 2
1	12 / 400	13 / 100	4 / /	6 / /	500	100	0
2	6 / /	4 / 700	10 / /	11 / /	700	0	/
3	10 / /	9 / 100	12 / 200	4 / 500	800	700	0
Demand الطلب	400	900	200	500	2000		

Min Z =12 (400)+13 (100)+4 (0)+6 (0) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (0)+9 (100)+12 (200)+4 (500) = 14200

3- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا:

مراكز العرض	مراكز الطلب 1	2	3	4	العرض Supply	الفرق 1	الفرق 2
1	12 / 300	13 / /	4 / 200	6 / /	500	300	0
2	6 / /	4 / 700	10 / /	11 / /	700	0	/
3	10 / 100	9 / 200	12 / /	4 / 500	800	300	100
Demand الطلب	400	900	200	500	2000		

Min Z =12 (300)+13 (0)+4 (200)+6 (0) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (100)+9 (200)+12 (0)+4 (500) = 10400

4- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	الفرق
O_1	12 /	13 /	04 200	06 300	~~500~~ ~~300~~ 0	2 6
O_2	06 /	04 700	10 /	11 /	~~700~~ 0	2 2 2
O_3	10 400	09 200	12 /	04 200	~~800~~ ~~600~~ ~~400~~	5 5 1
b_i	~~400~~ 0	~~900~~ ~~200~~ 0	~~200~~ 0	~~500~~ ~~200~~ 0	2000	
الفرق	4 4 4	5 5 5	6	2 2 7		

$$Min\ Z = 12(0)+13(0)+4(200)+6(300)+6(0)+4(700)+10(0)+11(0)+10(400)+9(200)+12(0)+4(200) = 12000$$

<u>التمرين الثاني:</u>

الجدول أدناه يقدم معطيات لمسألة نقل ما.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	20	17	15	10	130
O_2	16	14	18	13	50
O_3	12	15	11	19	100
b_i	40	40	80	120	

المطلوب:

1. انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؟
2. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا؟
3. أوجد الحل الأمثل لنموذج النقل المتوصل إليه باستخدام طريقة عوامل الضرب؟

<u>حل التمرين الثاني</u>:

1- تشكيل جدول النقل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20 X_{11}	17 X_{12}	15 X_{13}	10 X_{14}	130
O_2	16 X_{21}	14 X_{22}	18 X_{23}	13 X_{24}	50
O_3	12 X_{31}	15 X_{32}	11 X_{33}	19 X_{34}	100
b_i	40	40	80	120	280

2- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20 10	17 /	15 /	10 120	~~130~~ ~~10~~ 0
O_2	16 10	14 40	18 /	13 /	~~50~~ ~~10~~ 0
O_3	12 20	15 /	11 80	19 /	~~100~~ ~~20~~ 0
b_i	~~40~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	~~40~~ 0	~~80~~ 0	~~120~~ 0	280

6 (10)+14 (40) +18 (0)+13 (0)+12 (20)+15 (0) +11 (80)+19 (0) 1)+17(0)+15(0)+10 (120)+10Min Z =20 (
= 3240

3- إيجاد الحل الأمثل لنموذج النقل المتوصل إليه:

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $U_i=0$ مع $C_{ij} = U_i + V_j$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow 20 = 0 + V_1 \Rightarrow V_1 = 20$$

$$C_{14} = U_1 + V_4 \Rightarrow 10 = 0 + V_4 \Rightarrow V_4 = 10$$

$$C_{21} = U_2 + V_1 \Rightarrow 16 = U_2 + 20 \Rightarrow U_2 = -4$$

$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow 14 = -4 + V_2 \Rightarrow V_2 = 18$$
$$C_{31} = U_3 + V_1 \Rightarrow 12 = U_3 + 20 \Rightarrow U_3 = -8$$
$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow 11 = -8 + V_3 \Rightarrow V_3 = 19$$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

$$C'_{12} = C_{12} - V_2 - U_1 \Rightarrow C'_{12} = 17 - 18 - 0 \Rightarrow C'_{12} = -1$$
$$C'_{13} = C_{13} - V_3 - U_1 \Rightarrow C'_{13} = 15 - 19 - 0 \Rightarrow C'_{13} = -4$$
$$C'_{23} = C_{23} - V_3 - U_2 \Rightarrow C'_{23} = 18 - 19 - (-4) \Rightarrow C'_{23} = 3$$
$$C'_{24} = C_{24} - V_4 - U_2 \Rightarrow C'_{24} = 13 - 10 - (-4) \Rightarrow C'_{24} = 7$$
$$C'_{32} = C_{32} - V_2 - U_3 \Rightarrow C'_{32} = 15 - 18 - (-8) \Rightarrow C'_{32} = 5$$
$$C'_{34} = C_{34} - V_4 - U_3 \Rightarrow C'_{34} = 19 - 10 - (-8) \Rightarrow C'_{34} = 17$$

الحل المتوصل إليه ليس أمثلا، لذا نختار الخلية الأشد سالبية و هي الخلية X_{13} و التي تتم دراسة مسارها:

10+	0
-20	+80

بما أن أقل قيمة هي 10=(min : 10, 80)، إذا ستأخذ الخلية الفارغة X_{13} هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:

0	10
03	07

و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20 /	17 /	15 10	10 120	130
O_2	16 10	14 40	18 /	13 /	50
O_3	12 30	15 /	11 70	19 /	100
b_i	40	40	80	120	280

6 (10)+14 (40) +18 (0)+13 (0)+12 (30)+15 (0) +11 (70)+19 (0) 1Min Z =20 (0)+17(0)+15(10)+10 (120)+
= 3200

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $U_i=0$ مع $C_{ij} = U_i + V_i$

$$C_{13} = U_1 + V_3 \Rightarrow 15 = 0 + V_3 \Rightarrow V_3 = 15$$

$$C_{14} = U_1 + V_4 \Rightarrow 10 = 0 + V_4 \Rightarrow V_4 = 10$$

$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow 11 = U_2 + 15 \Rightarrow U_3 = -4$$

$$C_{31} = U_3 + V_1 \Rightarrow 12 = -4 + V_1 \Rightarrow V_1 = 16$$

$$C_{21} = U_2 + V_1 \Rightarrow 16 = U_2 + 16 \Rightarrow U_2 = 0$$

$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow 14 = 0 + V_2 \Rightarrow V_3 = 14$$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

$$C'_{11} = C_{11} - V_1 - U_1 \Rightarrow C'_{11} = 20 - 16 - 0 \Rightarrow C'_{11} = 4$$

$$C'_{12} = C_{12} - V_1 - U_2 \Rightarrow C'_{12} = 17 - 14 - 0 \Rightarrow C'_{12} = 3$$

$$C'_{23} = C_{23} - V_3 - U_2 \Rightarrow C'_{23} = 18 - 15 - (0) \Rightarrow C'_{23} = 3$$

$$C'_{24} = C_{24} - V_4 - U_2 \Rightarrow C'_{24} = 13 - 10 - (0) \Rightarrow C'_{24} = 3$$

$$C'_{32} = C_{32} - V_2 - U_3 \Rightarrow C'_{32} = 15 - 14 - (-4) \Rightarrow C'_{32} = 5$$

$$C'_{34} = C_{34} - V_4 - U_3 \Rightarrow C'_{34} = 19 - 10 - (-4) \Rightarrow C'_{34} = 13$$

يتضح من أعلاه بأن جميع قيم التكاليف الجديدة موجبة، و عليه فقد تم التوصل إلى الحل الأمثل باستخدام طريقة عوامل الضرب، و بالتالي فإن التكاليف الكلية النهائية تساوي 3200، نجد أننا قد وفرنا 40 وحدة. **(بلجيلالي، 2018، الصفحات 125-131)**