❶- حالة وجود أكثر من حل أمثل واحد

في بعض الحالات تحصل على حلول متعددة للمسألة، حيث تُعطي قيماً متساوية لدالة الهدف، تسمى في هذه الحالة الحلول البديلة، هذه الأخيرة تمنح لمتخذ القرار في المؤسسة مجالا واسعا للاختيار بينها وفقا لما يراه مناسبا.

مثال(01-02): لنفرض أن أحد المستهلكين يبحث عن تحديد أفضل توليفة ممكنة من السلعتين (A,B) في حدود ميزانيته المقدرة بمبلغ 300 وحدة نقدية على أن لا تتجاوز عدد الوحدات المستهلكة من السلعة (A) ثماني 08 وحدات ومن السلعة (B) 03 وحدات، فإذا كانت المنفعة الناتجة عن استهلاك الوحدة الواحدة من السلعة (A) هي 20 وحدة قياس، أما المنفعة الناتجة عن استهلاك السلعة (B) فهي 40 وحدة قياس منفعة.

المطلوب: ما هي التوليفة المثلى من السلعتين علما أن سعر الوحدة الواحدة من السلعة (A) هو 30 وحدة نقدية وسعر الوحدة من السلعة (B) هو 60 وحدة نقدية؟.

الحل:

نفرض أن X هي عدد الوحدات التي يمكن لهذا الشخص استهلاكها من السلعة A وأن Y هي عدد الوحدات التي يمكنه استهلاكها من السلعة B.

بناء على هذه الرموز يمكننا صياغة المسألة في النموذج الرياضي التالي:

- دالة الهدف: (تعظيم المنفعة الكلية)

$$[MAX]\ Z = 20X + 40Y$$

- شرط استهلاك السلعة (A):

$$X \leq 8 \quad \text{.......} 01$$

- قيد الميزانية :

$$30X + 60Y \leq 300 \quad \text{.......} 02$$

- شرط استهلاك السلعة (B):

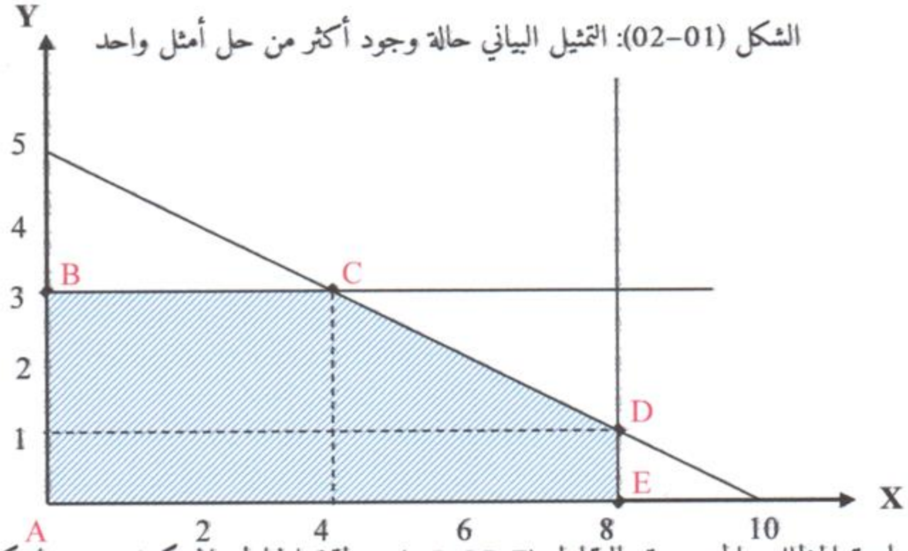
$$Y \leq 3 \quad \text{.......} 03$$

- شرط عدم السلبية:

$$X \geq 0,\ Y \geq 0 \quad \text{.......} 04$$

يمكن تمثيل هذه القيود بيانيا في الشكل التالي:

الشكل (01-02): التمثيل البياني حالة وجود أكثر من حل أمثل واحد



تمثل المساحة المظللة والمحصورة بالنقاط (A,B,C,D,E) منطقة الحلول الممكنة وعندها تكون القيم المختلفة كما هي ملخصة في الجدول التالي:

النقاط	الكمية المستهلكة من A	الكمية المستهلكة من B	قيمة دالة الهدف المنفعة الكلية	المبلغ المخصص من الميزانية
A	0	0	00	00
B	0	3	120	180
C	**4**	**3**	**200**	**300**
D	**8**	**1**	**200**	**300**
E	8	0	160	240

نلاحظ وجود اختيارين أمام هذا المستهلك وكل اختيار يمثل في حد ذاته حل أمثل لأنه يعطي نفس درجة الإشباع أو المنفعة، باستهلاك كميات مختلفة من السلعتين وهذين الاختيارين هما:

الاختيار الأول: عند النقطة (C) حيث يمكن استهلاك أربع وحدات من السلعة (A) وثلاث وحدات من السلعة (B)، ويحقق بذلك أقصى منفعة كلية قدرها 200 وحدة منفعة في حدود الميزانية المخصصة والمقدرة بـ 300 وحدة نقدية.

أي أن: $X = 4$ $Y = 3$ $Z = 200$

الاختيار الثاني: أما بالنسبة لهذا الاختيار فهو يتضح عند النقطة (D) حيث يمكنه استهلاك ثماني وحدات من السلعة (A) مقابل وحدة واحدة فقط من السلعة (B)، ويحقق كذلك أقصى منفعة كلية قدرها أيضا 200 وحدة منفعة وفي نفس الوقت يستغل كامل المبلغ المخصص أو الميزانية.

أي أن: $X = 8$ $Y = 1$ $Z = 200$

❷- حالة القيد الزائد عن الحاجة

في مثل هذه الحالة فإن أحد القيود الذي يشكل المسألة يعتبر زائد عن الحاجة، لأنه لا يساهم في تحديد نقطة الحل الامثل ولا في رسم حدود مساحة الحلول المشتركة، إذ أن المستقيم الممثل لمعادلة هذا القيد عادة ما يكون بعيدا عن منطقة الحلول الممكنة ولا يؤثر بأي حال من الاحوال على الحلول.

مثال (01- 03)**:** لنأخذ المثال (01-01) مع افتراض أن هذه المؤسسة لا يمكنها أن تُسوق أكثر من 1200 وحدة من النوع الثاني من لعب الأطفال (B).

المطلوب:

- ✓ إعادة صياغة المشكلة في نموذج مسألة برمجة خطية.
- ✓ تحديد التشكيلة الإنتاجية المثلى من النوعين لتحقيق أقصى الأرباح.

(باستخدام طريقة الرسم البياني)

الحل: على أساس هذه التغيرات في المسألة، فإن نموذج البرمجة الخطية سيكون كالتالي:

$$[MAX]\ Z = 20X + 30\ Y$$

$$3X + 6Y \leq 2400 \ldots\ldots 01$$

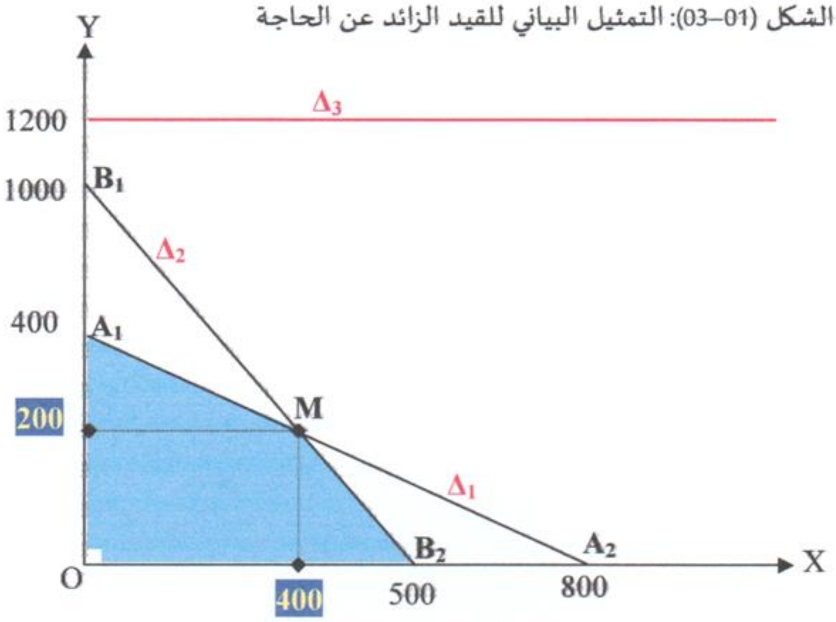
$$2X + Y \leq 1000 \ldots\ldots 02$$

$$Y \leq 1200 \ldots\ldots 03$$

$$X \text{ et } Y \geq 0 \ldots\ldots 04$$

يمكن تمثيل هذه القيود في الشكل البياني التالي:

الشكل (01–03): التمثيل البياني للقيد الزائد عن الحاجة



يتضح من الرسم البياني وجود ثلاث أنواع من القيود وهي:

1- القيود المُشكلة للمسألة والمتمثلة بيانيا في المستقيمات Δ_3 , Δ_2 , Δ_1

2- القيود الأساسية المحددة لنقطة الحل الامثل والمتمثلة في المستقيمين Δ_1 , Δ_2

3- القيود الزائدة عن الحاجة والمتمثلة في المستقيم Δ_3.

على هذا الأساس، وبناء على النتائج المتوصل إليها، يمكن القول أن الحل الأمثل لهذا النموذج هو نفسه الذي تم الوصول إليه سابقا (حل المثال رقم 01-01) بحيث لم يحدث أي تغيير على أمثلية الحل على الرغم من التغيير الذي حدث في المسألة، ويعود ذلك لكون القيد المتعلق بتسويق المنتوج الثاني لا يساهم في رسم، وتحديد منطقة الحلول المشتركة. وبالتالي، حيث لا تسمح الكميات المتاحة من الموارد بانتاج هذه الكمية من المنتوج، ذلك أن أقصى كمية يمكن انتاجها من هذا النوع هي عند النقطة (B_1) وهي خارج منطقة الحلول المشتركة لأن القيد الأول لا يسمح بانتاج الكمية عند النقطة (B_1)، لهذه الأسباب نعتبر أن القيد الخاص بتسويق المنتوج الثاني هو قيد لا حاجة لنا به في المسألة ولا يؤخذ بعين الاعتبار، لأن القيدين الآخرين يلغيان تأثير هذا القيد.

❸- حالة عدم وجود حلول على الاطلاق

قد يحدث أن لا تتمكن أصلا من تحديد منطقة للحلول المشتركة وهذا يعود لتضارب في القيود

مثال (01-04): يريد أحد المقاولين شراء نوعين من الآلات (A,B) تُعطي الآلة الواحدة من النوع الأول إيراد قدره 120 وحدة نقدية، بينما إيراد الآلة الواحدة من النوع الثاني 100 وحدة نقدية، خصص هذا المقاول ميزانية مقدارها 1200 وحدة نقدية، حيث يمكن شراء على الأقل خمس آلات من النوعين معا، إذا كانت تكلفة شراء الآلة الواحدة من النوع الأول هي 400 وحدة نقدية، بينما تكلفة شراء الآلة الواحدة من النوع الثاني 300 وحدة نقدية.

المطلوب:

تحديد عدد الآلات من كل نوع A,B بحيث يتمكن هذا المقاول من تعظيم إيراداته؟.

الحل:

لنفرض أن X يعبر عن عدد الآلات التي يمكن شرائها من النوع الأول (A)

وأن Y هي عدد الآلات التي يمكن شرائها من النوع الثاني (B).

وبالتالي، فإن نموذج المسألة يكون كالتالي:

دالة الهدف (تعظيم الإيرادات)... $[MAX]\ Z = 120X + 100Y$

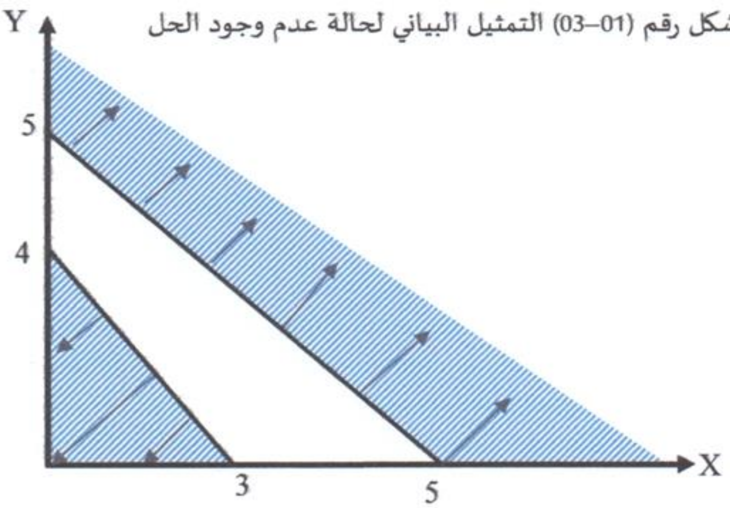
قيد عدد الآلات التي يمكن شراءها .... $X + Y \geq 5$

قيد الميزانية... $400X + 300Y \leq 1200$

قيد عدم السلبية... $X; Y \geq 0$

يمكن تلخيص حل هذه المسألة في الشكل التالي:

الشكل رقم (01–03) التمثيل البياني لحالة عدم وجود الحل



بتضليل منطقة الحلول بالنسبة لكل قيد، يتضح أنه لا توجد منطقة تمثل حلولا مشتركة للقيدين معا، لأن القيود متضاربة في هذه الحالة، وإذا حدث وأن وقع متخذ القرار في مثل هكذا حالة عليه إعادة صياغة المسألة صياغة صحيحة، كاقتراح تخصيص موارد أخرى، أو إعادة النظر في القيود السابقة.