٢٠٤٠٤ ١١٤

مقدمة في الاقتصاد القياسي

المبادىء والتطبيقات

تأليف

هاری کلجيان
Harry H. Kelejian

والاس أوتس
Wallace E. Oates

ترجمة

د. المرسي السيد حجازی و د. عبدالقادر محمد عطية

أستاذ مشارك، قسم الاقتصاد، كلية الاقتصاد والإدارة

جامعة الملك سعود (سابقا)

مراجعة علمية

د. حمد بن سليمان البازعي

أستاذ مساعد، قسم الاقتصاد، كلية الاقتصاد والإدارة

جامعة الملك سعود، فرع القصيم

النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

الطبعة الأولى: ١٤٢٢هـ (٢٠٠١م)

الترجمة العربية للطبعة الثالثة من كتاب:

Introduction to Econometrics: Principle and Applications

Bublished By: Harper & Row, Publishers, Inc.

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

كلجيان، هاري

مقدمة في الاقتصاد القياسي: المبادىء والتطبيقات / هاري كلجيان، والاس أوتس، ترجمة المرسي السيد حجازي، عبدالقادر محمد عطية، ط١ . الرياض

٥٤٦ ص، ١٧سم × ٢٤ سم

ردمك ٩-٩٨٣-٠٥-٩٩٦٠

١- الاقتصاد القياسي أ- أوتس، والاس (م. مشارك)
ب- حجازي، المرسي السيد (مترجم) ج- عطية، عبدالقادر محمد (مترجم) د- العنوان

ديوي ٣٣٩,٣ ٢٠/١١٤٦

رقم الإيداع ٢٠/١١٤٦

تم تحكيم الكتاب بوساطة لجنة متخصصة شكلها المجلس العلمي بالجامعة. وقد وافق المجلس العلمي على نشره، بعد اطلاعه على تقارير المحكمين، في اجتماعه الثامن للعام الدراسي ١٤١٦/١٤١٧هـ المعقود بتاريخ ٩/٨/١٤١٦هـ الموافق ٣١/١٢/١٩٩٥م.

النشر العلمي والمطابع ١٤٢٢هـ

تقديم

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين . . . وبعد ،

فقد انتهجت كلية الاقتصاد والإدارة بجامعة الملك سعود فرع القصيم منذ إنشائها في العام الجامعي (١٤٠١/ ١٤٠٢هـ الموافق ١٩٨١/ ١٩٨٢م) نهجًا خاصًا قام على ترجمة الكتب الدراسية والمرجعية في مجالات تخصصاتها وتعريبها . وهذا التوجه حتمته الحاجة لإعداد جيل من الخريجين والخريجات على قدر رفيع من الكفاءة العصرية والأداء المتخصص في عالم يتسم بالتطور السريع المستمر . وقد كان للكفاءات المتخصصة البارزة التي تستقطبها الكلية الأثر الإيجابي الفعال في جهود الترجمة والتعريب مما ساعد على انتشار استخدام الكتب المترجمة والمعربة داخل المملكة وخارجها ، حيث تدرس معظم هذه الكتب في الكليات والأقسام العلمية ذات العلاقة سواء كان ذلك كتبًا دراسية لمقررات هذه الكتب أو مراجع مساعدة . وقد زاد هذا مسئولية الكلية تجاه ترجمة الكتب العلمية وتعريبها ، الأمر الذي ترحب به الكلية دائمًا . فوضع كتب قيمة بين يدي القارئ العربي أمر حثنا عليه ديننا الحنيف . ولن يؤدي مثل هذا الكتاب إلى تحسين المعرفة لدى الطالب الدارس ، فقط ، بل سيفيد ، أيضًا ، في تطوير المادة العلمية التي تحتويها الكتب المؤلفة بالعربية في موضوع الكتاب المترجم أو المعرب نفسه .

وفي إطار نشاط الكلية في مجال الترجمة والتعريب ، وبعد دراسة متأنية للكتب في مجال الاقتصاد القياسي Econometrics ، وقع اختيار الكلية (ممثلة في قسم الاقتصاد بها) على كتاب «مقدمة في الاقتصاد القياسي : المبادئ والتطبيقات» (الطبعة الثالثة –

١٩٨٩م) لمؤلفيه هاري كلجيان Harry H. Kelejian وولاس أوتس Wallace Oates الأستاذان بجامعة مريلاند بالولايات المتحدة الأمريكية . ويشتمل الكتاب على أحدث التطورات التي طرأت على مجال القياس الكمي للعلاقة بين المتغيرات الاقتصادية .

ولايفوتني أن انوه بالجهد العلمي المشكور الذي بذله كل من الدكتور المرسي السيد أحمد حجازي الأستاذ المشارك بقسم الاقتصاد بالكلية (سابقا) والدكتور عبد القادر محمد عبد القادر عطية الأستاذ المشارك بقسم الاقتصاد بالكلية (سابقًا) في ترجمة هذا الكتاب إلى اللغة العربية ، داعيًا الله أن يجزيهما خير الجزاء على عملهما هذا .

ونسأل الله أن يبارك في جهودنا وأن يجعل جميع أعمالنا خالصة لوجهه الكريم إنه سميع مجيب

د. حمد بن سليمان البازعي

عميد كلية الاقتصاد والإدارة بالنيابة (سابقًا)

مقدمة الترجمة العربية

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على رسول الله محمد بن عبد الله، وعلى آله وصحبه أجمعين . . . وبعد،

ترجع فكرة ترجمة هذا الكتاب إلى العام الدراسي ١٤١٢/ ١٤١٣هـ حينما قرر مجلس قسم الاقتصاد بالكلية البحث عن كتاب في مجال الاقتصاد القياسي ليكون مرجعًا دراسيًا لمقرر ٤٣٣ قصد. بدأ البحث عن طريق مراسلة مجموعة من الجامعات الأمريكية لمعرفة كتب الاقتصاد القياسي التي يدرسها طلبة المستوى الجامعي الأول بها. وبعد الاستجابة الجيدة من تلك الجامعات، استقر الأمر في النهاية على المفاضلة بين أربعة من الكتب المنتشرة، في غالبيتها، في مجال الاقتصاد القياسي. بعد أن حصل القسم على نسخ من هذه الكتب الأربعة، قام أعضاء القسم بالاطلاع عليها وإعداد تقارير عنها ناقشها بعد ذلك مجلس قسم الاقتصاد في جلسة طويلة، واستقر الأمر في النهاية على ترجمة هذا الكتاب.

يتميز هذا الكتاب بسهولة معالجة الموضوعات واستخدام الأساليب الرياضية الأولية التي يستطيع القارئ العادي، فضلاً عن طالب المستوى الجامعي الأول، استيعابها دون مواجهة صعوبة كبيرة. يشتمل الكتاب، أيضًا، على مقدمة إحصائية جيدة تلائم موضوعاته، كما يحتوي كل فصل من فصوله على إطار نظري للموضوع تتلوه بعض الأمثلة التطبيقية الاقتصادية التي تثبت فهم الموضوع، ثم يأتي ملحق أو أكثر في كل فصل لإثبات النظريات والعلاقات الرياضية المعقدة التي وردت به (يمكن للقارئ العادي إهمالها)، ثم ينتهي الفصل بمجموعة من الأسئلة تساعد على الفهم

الأعمق للموضوعات النظرية والعملية الواردة به. وأخيرًا، يشتمل الكتاب في آخر أجزائه على إجابات للأسئلة التي وردت في نهايات الفصول الثمانية مما يعطي فرصة جيدة للقارئ لمراجعة مدى استيعابه لموضوعاته.

يحتوي الكتاب على ثمانية فصول يتناول الأول منها مقدمة تحتوي على مراجعة عامة للمفاهيم الإحصائية، بينما يناقش الفصل الثاني نموذج الانحدار البسيط (ذي المتغيرين)، فيتعرض لقياس العلاقة الإحصائية بين متغيرين وتوضيح افتراضات النموذج ثم يقوم بتقدير معادلة الانحدار وبيان خصائص المقدرات الناتجة، وقياس القوة التفسيرية للنموذج، ثم ينتهي الفصل بمثال تطبيقي؛ تقدير دالة التكاليف. أما الفصل الثالث فيتعرض لتطبيقات نموذج الانحدار حيث يناقش اختبار الفرضيات وفترات الثقة، والشكل الدالي للعلاقات الاقتصادية، واستخدام المتغيرات المبطأة، والتنبؤ، ثم يعطي مثالاً تطبيقيًا؛ تقدير دالة الطلب.

يتناول الفصل الرابع نموذج الانحدار المتعدد، فيناقش خصائص المقدرات ومعامل التحديد ومثالين تطبيقيين أحدهما لدالة الاستهلاك والآخر في مجال الضرائب. ويتناول الفصل الخامس طرقا أخرى في تحليل الانحدار المتعدد، حيث يتعرض لموضوعات العلاقات المبطأة واستخدام المتغيرات الصورية والأشكال الدالية المختلفة مع إعطاء مثال للطلب على النقود.

يأتي بعد ذلك الفصل السادس ليعالج أهم مشكلات الانحدار وبيان نتائج كل مشكلة على خواص المقدرات، وهي مشكلات تعدد العلاقات الخطية، والارتباط الذاتي، اختلاف التباين واختيار المتغيرات. ويناقش الفصل السابع موضوع نظم المعادلات؛ فيتعرض لقضايا تحيز المعادلات الآنية، وطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (م ص م) ومشكلة تمييز المعادلات، كما يعطي مثالين تطبيقيين هما نموذج للطلب والعرض و آخر للمالية العامة المحلية. ويتناول الفصل الثامن والأخير نموذج المعادلات الآنية غير الخطية حيث يعالج موضوعات إطار التحليل، ومشكلة التمييز، واستخدام (م ص م) ويعطي مثالا من الاقتصاد الكلي.

أما مسئولية ترجمة الكتاب ومراجعة تجارب الطبع وتوحيد المصطلحات العلمية به، وإضافة المصطلحات وكشاف الموضوعات في نهايته فتقع على عاتق

الدكتور المرسي السيد حجازي . بينما ساهم الدكتور عبدالقادر محمد عطية بترجمة الفصل الثاني ومقدمة طبعات الكتاب الثلاثة . وقام الدكتور حمد سليمان البازعي بالمراجعة العلمية للكتاب .

ومن أجل الوفاء ببعض الحقوق لأصحابها ، يود المترجمان أن يتقدما بخالص الشكر والتقدير إلى الدكتور حمد بن سليمان البازعي عميد الكلية بالنيابة على تشجيعه المتواصل ومشاركته الفعالة ، من خلال المراجعة ، في إخراج هذا العمل إلى حيز الوجود ، كما نشكر كلا من الدكتور ولاس أوتس وهاري كلجيان لترحيبهما وموافقتهما على نشر هذا الكتاب باللغة العربية . ونشكر مركز البحوث بكلية الاقتصاد والإدارة على المساهمة الكبيرة والمشاركة في تحمل مسؤولية طباعة هذا الكتاب وإخراجه . ولا يفوتنا بهذه المناسبة أن نشكر الأخوة العاملين في سكرتارية الكلية على جهدهم الوافر المشكور في إدخال الأصول الأولى من الترجمة وتصحيحها على جهاز الحاسب الآلي ، ونشكر مركز الترجمة والنشر بجامعة الملك سعود على تحكيم هذا الكتاب ونشره ، كما نشكر جميع الأخوة الزملاء أعضاء مجلس قسم الاقتصاد بالكلية على دعمهم ومساندتهم لإبراز هذا الكتاب إلى حيز الوجود .

والله نسأل أن يكون هذا الكتاب إضافة طيبة ورصيدًا علميًا جديدًا للمكتبة الاقتصادية العربية وأن ينفع به وأن يجعله في ميزان أعمالنا الصالحة يوم القيامة ، والله ولي التوفيق .

المترجمان

د. المرسي السيد حجازي

د. عبد القادر محمد عطية

٢٠٧ س

~~٢٢~~ س

الله

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة الطبعة الثالثة

سعينا في هذه الطبعة إلى سد ماقد رآه بعض القراء من ثغرات في الطبعتين السابقتين، وعلى وجه التحديد، فإن هذه الطبعة تحتوي على خمس إضافات :

١ - توسعة الملحق B في الفصل الأول الذي يقدم مراجعة للمفاهيم الإحصائية الأساسية. وتقدم هذه التوسعة مفهوم «دالة الكثافة المشتركة» وتطور عدد من النتائج المترتبة عليها التي يستخدم بعضها لاحقًا في متن الكتاب.

٢ - مناقشة موسعة عن قياس المقدرة التفسيرية لنموذج الانحدار. وهي تعد أحد مقاييس جودة التوفيق وأداة للاختيار من بين نماذج الانحدار المختلفة. ولهذا الغرض، نناقش عيوب مقياس R^2، ثم نقدم مقياسًا بديلا يسمى معامل التحديد المعدل، (أو إحصائية $\overline{R}^2$). ويظهر هذا المقياس في عدد من برامج الحاسوب. وسوف نناقش خصائصه، ثم نوضح علاقته بالإحصائية R^2. وسوف نناقش، أيضًا، العلاقة بين قضايا اختيار النموذج واختبار الفروض. وفي هذا الإطار، نحذر من الاستخدام المبالغ فيه لـ $\overline{R}^2$ أو مقاييس جودة التوفيق الأخرى بغرض اختيار النماذج.

٣ - مناقشة مشكلات الارتباط الذاتي في حالة وجود متغير تابع مبطأ، وحيث إن اختبار دربن - واتسون Durbin-Watson test المتعارف عليه غير صالح للاستخدام في مثل هذه الحالات، فسوف نناقش اختبارين بديلين.

٤ - مناقشة مفهوم الاستقرار، وتظهر مشكلات الاستقرار في حالة نماذج الانحدار التي تحتوي على متغيرات تابعة مبطأة.

٥ - معالجة موسعة لمشكلة اختلاف تباين الخطأ العشوائي التي تشتمل على

اختبار جولدفيلد-كواندت Goldfeld-Quandt test . ويعد هذا الاختبار جذابًا ومباشرًا في حالات معينة سوف نناقشها فيما بعد.

إننا ممتنون لقيام انجمار روشا بمراجعة مسودّات بعض الموضوعات الجديدة في هذه الطبعة وإبداء الملاحظات بشأنها، وبالطبع، لا يعد هذا تنصلاً من مبدأ المسؤولية المعتاد.

مقدمة الطبعة الثانية

هدفنا في هذه الطبعة ذو ثلاثة أبعاد : أولها زيادة عدد التطبيقات والتوضيحات الخاصة بالطرق القياسية المقدمة في هذا الكتاب ونطاقها، وثانيها توسيع التحليل ليشمل تقدير النماذج غير الخطية، وثالثها تصحيح معالجة بعض القضايا النظرية التي وردت في الطبعة الأولى وتوضيحها . ونتيجة لذلك، فلقد تضمنت الطبعة الثانية عدداً من الأمثلة الجديدة عن تحليل الارتباط والانحدار، كما أضفنا فصلاً جديداً هو الفصل الثامن عن تقدير النماذج غير الخطية .

أما الذين ألفوا الطبعة الأولى فسوف يجدون عدداً من التوضيحات الجديدة المتنوعة التي توضح للطالب كيفية القيام بعمل حسابات فعلية للمعلمات المقدرة . وقد أخذت أمثلة أخرى من أدبيات الاقتصاد لتوضيح كيفية استخدام تحليل الانحدار، في الواقع، في تقدير معلمات مهمة، وفي اختبار بعض الفرضيات الأساسية في كل من الاقتصاد الجزئي والاقتصاد الكلي . وتتضمن الأمثلة الجديدة تحليل الارتباط البسيط، تقدير منحنيات الطلب على السلع الحقيقية وعلى الأرصدة النقدية، تقدير دالة التكاليف، دراسة حالة لمشكلة اختلاف التباين التي تنجم عن التجميع . وأملنا أن تساعد هذه الأمثلة الإضافية الطالب على فهم أفضل لتكوين النماذج القياسية، واستخدام البيانات الواقعية وتفسير النتائج .

وفي الواقع العملي، فإن معظم النماذج القياسية غير خطية . وبالرغم من ذلك، فإن معظم مراجع مرحلة البكالوريوس ومابعدها تركز، فقط، على النماذج الخطية تأسيسًا على افتراض ظاهري هو صعوبة معالجة النماذج غير الخطية . ونحن مقتنعون بأن الأمر ليس كذلك، ولذا، فقد قدمنا في الفصل الثامن مناقشة موسعة للنماذج غير

الخطية على مستوى مرحلة البكالوريوس . وتأسيسًا على المادة المعروضة في الكتاب من قبل ، فإن الفصل الجديد يدلف ليناقش مشاكل التمييز والتقدير ، واختبار الفرضيات في النماذج غير الخطية ، كما يقدم تطبيقًا لهذه الفنون على مشكلة اقتصادية محددة .

إن هدفنا الأساسي من هذه الطبعة لم يتغير عنه في الطبعة الأولى ، فنحن نسعى إلى تقديم تشكيلة من الطرق القياسية التي تتطلب فقط مهارات أولية في الرياضيات والإحصاء . ونحيل القارئ إلى مقدمة الطبعة الأولى المرفقة للوقوف على وصف طريقتنا .

ونود أن نعبر عن امتناننا لستيفن جولدفيلد ، ورونالد أوكساكا وريتشارد كواندت ، لتعليقاتهم البناءه على مسودات الفصل الثامن الجديد . كما ندين بالشكر للراحل رونالد فيشر وللناشر أوليفر وبويد ادنبره لسماحهم بإعادة طباعة جدول رقم ٢ من كتابهم : *الطرق الإحصائية للعاملين في مجال البحوث* .

مقدمة الطبعة الأولى

لقد اشتمل التطور الحديث في علم الاقتصاد على تقدم ملحوظ في الطرق القياسية وتطبيقاتها في التحليل الاقتصادي. وبعد أن كان الاقتصاد القياسي مقصورًا على قلة مختارة، أصبح الآن مكونًا أساسيًا في تدريب جميع دارسي الاقتصاد.

وبالرغم من تزايد انتشار استخدام التحليل القياسي، فإن معظم المراجع التي تقدم مدى معقول من النتائج مازالت تتطلب مستوى مرتفعًا جدًا من التأهيل الرياضي الذي يفوق بكثير مايمتلكه عديد من الطلاب. وهدفنا في هذا المرجع هو تقديم مادة علمية موسعة تحتاج إلى متطلبات رياضية متواضعة معقولة من الطالب. وبتحديد أكثر، فإن هذا الكتاب لايستخدم حساب التكامل والتفاضل أو جبر المصفوفات. فنحن نفترض مستوى من المعرفة الرياضية يعادل تقريبًا جبر الصف الثاني الثانوي*.

وبالرغم من أن العرض يعتمد على طرق رياضية أولية، فإن المادة المقدمة في هذا الكتاب تناظر المادة المقدمة في مقرر نمطي للاقتصاد القياسي على مستوى الدراسات العليا. فالموضوعات التي عولجت، على سبيل المثال، هي، تقريبًا، المقدمة في كتاب جولد برجر Goldberger A.S. *النظرية القياسية* Econometric Theory (Wiley 1964)، وكتاب جونستون J. Johnston «*طرق قياسية*» الطبعة الثانية Econometric Methods (McGraw-Hill 1972).

وتشتق النتائج الأساسية في هذا الكتاب باستخدام طريقة المتغير المساعد،

(*) يوجد في ملحق الفصل الأول بعض النتائج المرتبطة بصيغ الجمع المهمة والتي قد يحتاجها الطالب غير المتمرس عليها.

وتفوق هذه الطريقة طريقة المربعات الصغرى الأكثر استخدامًا بميزتين، الأولى أنها لا تتطلب حساب التفاضل والتكامل، والثانية أنها تسمح للطالب أن يرى، بوضوح، الدور الذي يؤديه كل افتراض عند إجراء التقدير. فعلى سبيل المثال، أوضحنا التناظر بين المعدلات الطبيعية والافتراضات الأساسية لنموذج الانحدار. وفي هذا الصدد، تم التركيز، خاصة على الإجراء الذي بمقتضاه يترجم كل افتراض معطى للمعادلة الطبيعية المناظرة. وهذه الطريقة مفيدة للغاية، حيث يمكن للطالب، فيما بعد، أن يرى، مباشرة، النتائج المترتبة على اختلال افتراض معين، كما يمكنه أن يفهم فهمًا أفضل الطرق المستخدمة لتعديل إجراء التقدير. ونستخدم، أيضًا، طريقة المتغير المساعد عبر الكتاب، وهذا يسمح بمعالجة موحدة للارتباط الذاتي، وتعدد العلاقات الخطية، واختلاف التباين، ومشكلات النظم وما إلى ذلك، حيث إنها - جميعًا - تعالج بالطريقة نفسها.

ولقد جرى التأكيد في هذا المرجع على ماقد يمكن تسميته بالحدسية «الفطنة»، بمعنى أننا لانكتفي بذكر النتائج فحسب، وانما تشتق بطريقة حدسية مع محاولة ترك أقل مايمكن من النهايات غير المحددة. وبالرغم من أننا نعرض النتائج والحالات المعيارية، إلا أننا نركز أولا على الإجراء الذي يحصل بمقتضاه على هذه النتائج، وثانيًا على تطبيقات هذه النتائج على مشكلات تقدير فعلية. وبعد تقديم كل طريقة جديدة، نوضح استخدامها بأمثلة رقمية ودراسات فعلية من أدبيات الاقتصاد، ونتيجة لذلك، فإن الطالب ،بعمله من خلال هذا المرجع، سوف يخرج بإدراك جيد عن كيفية عمل الأشياء وأسباب ذلك.

ولقد قدّم عدد من التمارين في نهاية كل فصل، كما قُدّمت إجابات لكل التمارين في نهاية الكتاب. وينصح الطالب المجد بحل هذه التمارين حيث إنها ذات صلة بكل من التطبيق العملي للنتائج المعروضة في الكتاب وبمعالجة المفاهيم ذات العلاقة وفهمها. بالإضافة إلى ذلك، قمنا بتقديم عدد من التمارين التي يعرض فيها النموذج في صورة لفظية ثم يسأل الطالب أن يقوم بصياغته في صورة نموذج انحدار. وسوف تعطي هذه التمارين الطالب فهمًا أفضل لبعض الصعوبات التي تكتنف صياغة نموذج اقتصادي.

لقد كتب هذا الكتاب ليستعمل مرجعًا في الاقتصاد القياسي يدرس على مدى فصل دراسي واحد في مرحلة البكالوريوس أو الماجستير. ونقصد بمستوى الماجستير هنا مقررات الدراسات العليا في الاقتصاد القياسي الموجهة للطلبة الذين لاتتوافر لديهم خلفية رياضية أو إحصائية تمكنهم من متابعة الكتابات المتقدمة في هذا العلم.

والمتطلب السابق لهذا الكتاب هو، تقريبًا، الثلثان الأولان لفصل دراسي في مبادئ الإحصاء. فعلى سبيل المثال، تعدّ المادة المقدمة في الفصول الخمسة الأولى من كتاب W.C. Gunther *مفاهيم الاستدلال الإحصائي* Concepts of Statistical Inference أكثر من كافية. وأي معلومات إضافية يحتاج إليها استخدام هذا الكتاب (بالإضافة إلى المراجعة المختصرة للمفاهيم الإحصائية الأساسية) توجد في ملحق بالفصل الأول.

وقد يعطي وصف مختصر لتطور هذا المخطوط إدراكًا أحسن لاستخداماته المحتملة. فلقد كانت نقطة انطلاق هذا الكتاب مجموعة مذكرات كلجيان Kelejian في مادة الاقتصاد القياسي المقررة على طلبة البكالوريوس بجامعة برنستون. وكانت هذه المذكرات توزع على الطلبة في صورة منسوخة على الآلة الكاتبة. وشجعت ردود فعل الطلبة في جامعة برنستون وفي أماكن أخرى على تأليف هذا الكتاب.

ولقد استخدمت المذكرات سالفة الذكر وكذلك مسودات مبكرة من فصول هذا المخطوط في تدريس مقرر لغير المتخصصين في الاقتصاد القياسي من طلبة الدراسات العليا بجامعة نيويورك، كما استخدمت في تدريس مقرر للأساليب الكمية في برنامج الماجستير للشؤون العامة بمدرسة وودرو ويلسون Woodrow Wilson School في برنستون. وهذه هي أنواع المقررات التي نشعر بملاءمة هذا الكتاب لها. بالإضافة إلى ذلك، وجد عدد من الطلبة ذوي المعرفة الأكثر تقدمًا في مجال الاقتصاد القياسي أن هذا المخطوط يساعد في فهم أعمق لنتائج توصلوا إليها في مقررات أخرى أكثر تعقيدًا.

ويعكس التعاون الخاص في مجال هذا الكتاب الهدف منه، فيعد هاري كلجيان الاقتصاد القياسي مجال تخصصه الأساسي. حيث إن جهوده في البحث والتدريس كانت مركزة أساسًا في هذا المجال. أما ولاس أوتس فاهتماماته الأساسية تنصب على مشكلات المالية الحكومية، وعلاقته بالاقتصاد القياسي هي، أساسًا، بوصفه

ممارسًا ينصب اهتمامه على التحليل الكمي للمشكلات الاقتصادية الفعلية . وكان الأمل أن يؤدي هذا المزيج من الاهتمامات إلى تأليف كتاب يتعمق في مجال الاقتصاد القياسي وفي الوقت نفسه يكون مقروءاً لدى الطلبة الذين لم يسبق لهم دراسة الاقتصاد القياسي .

ونود – ختامًا – أن نعبر عن امتناننا لكل من قدّم مساعدة أو اقتراحات قيمة على مسودات الكتاب ومنهم شارلس بينشن ، ولاري هيرش ، وويليام لورانس ، وروبرت بلوتيناك ، وريتشارد كوانت ، و ف . ساندراجان وايراسوهن ، وبالطبع لايتحمل أحد منهم مسئولية أي عيب مازال موجودًا في الكتاب . وبالاضافة إلى ذلك ، فنحن مدينون لراعي حقوق التأليف الخاصة بالراحل فيشر والناشر أوليفر وبويد أدنبره لسماحهم بإعادة طباعة جدول رقم ٢ من كتابهم «*الطرق الإحصائية للباحثين*» . أخيرًا ، نود التعبير عن العرفات بالجميل للسيدة بيتي كامبسنسكي لطباعتها المتمرسة التي تمت في الغالب ، تحت ظروف صعبة .

المحتويات

الصفحة

تقديم .... هـ

مقدمة الترجمة العربية .... ز

مقدمة الطبعة الثالثة .... ك

مقدمة الطبعة الثانية .... م

مقدمة الطبعة الأولى .... س

الفصل الأول : مقدمة

ملحق ا (A) : بعض قواعد عمليات الجمع ١٠

ملحق ب (B) : مراجعة للمفاهيم الإحصائية ١٥

متغيرات عشوائية ١٥

دالة احتمال أو كثافة ١٦

الاستقلال وعدم الاستقلال ١٨

نتيجة تمهيدية ١٩

توقعات ١٩

بعض خواص التوقعات ٢١

عينة عشوائية ٢٣

مقدرات ٢٤

مقدرات غير متحيزة ٢٥

صفحة

اتساق ٢٧
دوال الكثافة المشتركة : إيضاحات ٢٨
دوال الكثافة المشتركة : تعميمات ٣١
دوال الكثافة المشتركة : التوقعات ٣٢
دوال الكثافة المشتركة : توقعات دوال المتغيرات العشوائية ٣٣
توضيح : تغاير X وY ٣٤
دوال الكثافة المشتركة : مناقشة أكثر عمومية ٣٥
نتيجة مهمة للاستقلال ٣٧
تطبيق شروط الاستقلال ٣٩

الفصل الثاني : نموذج انحدار المتغيرين

(٢-١) قياس العلاقة الإحصائية بين متغيرين : التغاير والارتباط ٤١
التغاير ٤٣
مقدر التغاير ٤٥
عدم تحيز $\hat{\sigma}_{X,Y}$ ٤٦
اتساق $\hat{\sigma}_{X,Y}$ ٤٩
تفسير لـ $\hat{\sigma}_{X,Y}$ ٥٠
معامل الارتباط ٥٢
مقدر معامل الارتباط ٥٨
ملاحظة حول درجات الحرية ٦٠
كلمة تحذير ٦١
مثـــال ٦١
(٢-٢) وصف العلاقات السلوكية ٦٥
(٢-٣) نموذج انحدار المتغيرين ٧١
الافتراضات الأساسية ٧٢
(٢-٤) تقدير معادلة الانحدار : طريقة المتغير المساعد ٧٧

صفحة

مثال ٨٥
ملاحظة على أحد الافتراضات ٨٩
(٢-٥) خواص $\hat{a}$ و $\hat{b}$ ٩١
عدم التحيز ٩٢
تباينات $\hat{a}$ و $\hat{b}$: بعض الأساسيات ٩٥
تباين المقدرات ٩٨
خاصية أصغر تباين ١٠٢
مقدرات التباين ١٠٣
مثال ١٠٥
خاصية أصغر المربعات لـ $\hat{a}$ و $\hat{b}$ ١٠٦
(٢-٦) قياس القوة التفسيرية لنموذج الانحدار ١٠٨
معامل التحديد ١١٠
$R^2 = \hat{\rho}^2_{Y,\hat{Y}}$ ١١٥
مثال ١١٧
(٢-٧) توضيح : تقدير دالة تكلفة ١١٩
ملحق : إثباتات لثلاث نتائج ١٢١
تباين مجموع المتغيرات العشوائية ١٢١
المقدرات ذات أصغر تباين لـ a وb ١٢٣
خاصية أصغر المربعات لـ $\hat{a}$ و $\hat{b}$ ١٢٦

الفصل الثالث : تطبيقات نموذج الانحدار
(٣-١) اختبار الفرضيات وفترات الثقة : مقدمة ١٣١
افتراض إضافي ١٣٣
اختبار $b = b_0$ مقابل $b \neq b_0$: مع معرفة σ_u^2 .... ١٣٧
اختبار الفرضيات : تفسير ١٣٩
مناطق القبول والرفض ١٤٠

صفحة

فترات الثقة : تفسير ١٤١

بعض الملاحظات على الأخطاء من النوع الأول والنوع الثاني ١٤١

الفرضية $b \neq 0$ ١٤٤

الفرضيات $b < 0$ و $b > 0$ ١٤٦

اختبار الفرضيات مع عدم معرفة σ_u ١٤٨

بعض الأمثلة ١٤٩

نسبة t : قاعدة للحساب ١٥١

(٣-٢) مشكلة شكل الدالة ١٥٤

منحنى فليبس والتحويل العكسي ١٥٤

التحويل اللوغارتمي ١٦٠

التحويل شبه اللوغارتمي ١٦٤

استخدام التحويلات : تعميمات ١٦٨

(٣-٣) الترجيح ووحدات القياس ١٧٠

مثال ١٧٥

(٣-٤) استخدام المتغيرات المبطأة ١٧٧

مثال ١٨١

(٣-٥) التنبؤ ١٨٣

تقدير Y_f^m ١٨٥

التنبؤ بـ Y_f ١٨٨

(٣-٦) مثال : التقدير لمنحنى طلب ١٩١

الفصل الرابع : تحليل الانحدار المتعدد

(٤-١) نموذج الانحدار المتعدد ٢٠٢

(٤-٢) التقدير بواسطة المتغيرات المساعدة ٢٠٥

المعادلات الطبيعية ٢٠٦

مشكلة تعدد العلاقات الخطية التام ٢٠٩

صفحة

(٤-٣) خصائص المقدرات واختبار الفرضيات ٢١٢

تفسير المقدرات ٢١٢

تباينات المقدرات ٢١٥

فترات الثقة واختبار الفرضيات : بعض المقدمات ٢١٦

فترات الثقة واختبار الفرضيات ٢١٨

(٤-٤) معامل التحديد المتعدد ٢١٩

R^2 لحالة الانحدار المتعدد ٢٢٠

تعليق على R^2 .... ٢٢٢

معامل التحديد المعدل $\overline{R}^2$ ٢٢٤

(٤-٥) تحليل الانحدار المتعدد - توضيحان ٢٢٨

دالة استهلاك متعددة المتغيرات ٢٢٨

دراسة لضرائب المدينة ٢٣٠

ملحق ا (A) : خصائص المقدرات ٢٣٤

مقدرات غير متحيزة ٢٣٧

تباينات المقدرات ٢٣٨

ملحق ب (B): العلاقة بين R^2 و $\overline{R}^2$ ٢٣٩

الفصل الخامس : طرق أخرى لتحليل الانحدار المتعدد

(٥-١) تقدير العلاقات المبطأة ٢٤٣

إبطاء كويك ٢٤٧

إبطاء آلمون ٢٥٢

مثال ٢٦٠

(٥-٢) استخدام المتغيرات الصورية ٢٦٢

مثال ٢٦٨

بعض النتائج الإضافية ٢٧٠

(٥-٣) الشكل الدالي مرة أخرى ٢٧٣

صفحة

التحويل اللوغارتمي المعمم ٢٧٣
اشكال متعددات الحدود للمتغيرات المستقلة ٢٧٧
توليفات من الأشكال الدالية ٢٨٣
(٥-٤) توضيح: الطلب على النقود ٢٨٥
ملحق ا (A): قيود طرفية في ابطاء آلمون ٢٨٩
ملحق ب (B) : اختبار الفرضيات المتضمنة لأكثر من معلمة انحدار ٢٩٢

الفصل السادس : مشاكل في تحليل الانحدار
(٦-١) تعدد العلاقات الخطية ٣٠٢
تعدد العلاقات الخطية غير التام : بعض النتائج المنطقية ٣٠٤
تعليق إضافي ٣٠٥
بعض الحلول ٣٠٧
تأثيره على التنبؤ ٣٠٩
(٦-٢) مشكلة الارتباط الذاتي ٣١٠
نموذج للانحدار الذاتي ٣١٣
تأثيره على تباينات المقدرات ٣١٦
الوسط الحسابي للمقدرات ٣١٧
طريقة تقدير معممة ٣١٨
حالة نموذج الانحدار المتعدد ٣٢٥
اختبار دربن - واتسون للارتباط الذاتي ٣٢٦
تطبيق ٣٣٠
الارتباط الذاتي والمتغيرات التابعة المبطأة ٣٣٥
(٦-٣) اختلاف التباين ٣٣٨
نموذج أساسي ٣٣٩
تأثيره على مقدراتنا ٣٤٢
طريقة للتقدير ٣٤٣

صفحة

اختلاف التباين : طرق إضافية للمعالجة ٣٤٦
اختبار لاختلاف التباين ٣٥١
اختبار آخر لاختلاف التباين : اختبار جولد فيلد - كوندات ٣٥٤
بعض التعليقات حول اختباري اختلاف التباين ٣٥٩
اختلاف التباين : نتيجة للتجميع ٣٦١

(٦-٤) مشاكل في اختيار المتغيرات ٣٦٦
متغير محذوف ٣٦٦
متغيرات أكثر من اللازم ٣٦٩
تعقيبات إضافية ٣٧٠
ملحق : ملاحظة حول الاستقرار ٣٧٣

الفصل السابع : نظم المعادلات
(٧-١) تحيز المعادلات الآنية ٣٧٩
(٧-٢) طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين : حالة مبسطة ٣٨٤
توضيح : المقدرات المتسقة ٣٨٥
بعض النتائج الإضافية ٣٩٠
(٧-٣) نظم المعادلات : مناقشة أكثر عمومية ٣٩٣
تحديد النموذج ٣٩٣
طبيعة المتغيرات المحددة مسبقاً ٣٩٦
المعادلات الهيكلية ومعادلات الشكل المختزل ٣٩٨
(٧-٤) طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين : تعميم ٤٠٠
نظرة عامة ٤٠٠
تأطير ٤٠١
م ص م والمتغيرات المحذوفة ٤٠٤
(٧-٥) مشكلة التمييز ٤٠٨

صفحة
مثال (١). ٤٠٨
مثال (٢). ٤١٢
مثال (٣). ٤١٣
عرض أكثر عمومية. ٤١٥
بيان عام. ٤١٩
(٧-٦) تقدير م ص م : مثالان ٤٢٠
نموذج للطلب والعرض. ٤٢٠
نموذج للمالية العامة المحلية. ٤٢٤
ملحق : الأخطاء العشوائية المرتبطة ذاتيًا في نموذج المعادلات الآنية ٤٣١

الفصل الثامن : نماذج المعادلات الآنية غير الخطية
(٨-١) الإطار التحليلي ٤٤٣
توضيح : نموذج من معادلتين. ٤٤٣
بعض التوضيحات. ٤٤٥
توضيح آخر. ٤٤٦
تعميم. ٤٤٨
(٨-٢) مشكلة التمييز ٤٤٩
توضيح. ٤٤٩
تنقيح ٤٥٤
قاعدة لتمييز النماذج غير الخطية ٤٥٧
تبرير القاعدة ٤٥٩
تعميم لتبرير قاعدة التمييز ٤٦١
(٨-٣) تقدير ص م ٤٦٤
الخطوط العريضة للطريقة ٤٦٤
تبرير لبعض الملاحظات المهمة ٤٦٨
(٨-٤) تباينات العينة الكبيرة ٤٧٣

صفحة

(٨-٥) مثال ٤٧٤

النموذج ٤٧٤

تحليل النموذج ٤٧٦

ملحق: تقدير النماذج غير الخطية في كل من المتغيرات الداخلية والمعلمات ٤٨١

إطار التحليل ٤٨١

نتيجة أولية ٤٨٤

طريقة التقدير ٤٨٦

اختيار المتغيرات المستقلة للمرحلة الأولى ٤٨٨

استعراض عام وخطوط عريضة للطريقة ٤٨٩

اختبار الفرضيات وفترات الثقة وتباينات العينة الكبيرة: تعليق ٤٩٠

الجداول الإحصائية ٤٩١

إجابة الأسئلة ٤٩٩

ثبت المصطلحات العلمية

أولاً: عربي / إنجليزي ٥٢٩

ثانيًا: إنجليزي/ عربي ٥٣٧

كشاف الموضوعات ٥٤٥

الفصل الأول

مقدمة

إن أحد الأنشطة الأساسية لأي علم هو الإختبار المنظم للنظرية في مواجهة الواقع. وعلم الاقتصاد ليس استثناء من هذه القاعدة. فضلا عن ذلك فإن من أكثر التطورات في الاقتصاد في الحقبة الحديثة هو التأكيد المتزايد على تطوير الطرق الإحصائية واستخدامها في تحليل المشكلات الاقتصادية. ويعبر، عادة، عن تلك العلاقات النظرية بين المتغيرات الاقتصادية في شكل رياضي، ولكن لإعطاء هذه العلاقات مضمونا عمليا فقد تزايد استخدام الاقتصاديين لطرق التحليل الإحصائي بهدف اختبار الفرضيات الخاصة بهذه العلاقات، وتقدير أحجامها الفعلية واستخدام هذه التقديرات لعمل تنبؤات كمية للظواهر الاقتصادية. هذا النوع من التحليل هو مايسمى *بالاقتصاد القياسي*.

في خطاب وداعي عام ١٩٣٧م وبمناسبة انتهاء عمله كمدير لمدرسة لندن للاقتصاد أعلن اللورد وليام بيفردج William Beveridge منتقدا مهنة الاقتصاد أنه «لفترة مائة سنة في الاقتصاد القياسي تم التعامل مع الحقائق ليس لاختبار النظرية وإنما لتوضيحها... لايمكن أن يوجد علم إجتماعي حتى تصبح الحقائق المتعلقة بالمجتمع متاحة». ومنذ الفترة التي تلت عبارة بيفردج، حدثت تطورات مهمة في مجالي تطوير الطرق الكمية للتحليل، وتراكم البيانات التي يمكن عن طريقها اختبار النظريات الاقتصادية. ويصعب على قارئ الدوريات الاقتصادية الآن أن يجد عددًا واحدًا منها يخلو من المقالات التي يدعم فيها مؤلفوها مناقشاتهم بالتحليلات القياسية.

ملاحظة عامة داخل الكتاب

ترد الرموز الواردة في المعادلات مائلة بنط أبيض أو أسود وترد داخل المتن إما مائلة أو عادية بالبنط الأبيض أو الأسود(ذلك حسب مايتاح للتغيير في الأصل المرسل على الدسك في قسم الصف).

يعني هذا، أنه، للحصول على المقدرة على فهم البحوث المعاصرة في الاقتصاد وتقويمها (إضافة إلى المقدرة على عمل البحوث ذاتها)، يصبح من الضروري التعرف على علم الاقتصاد القياسي. وعلى سبيل المثال، فإن النقاش المثير والمهم الذي يدور بين مايسمى بالنقديين والكينزيين الجدد حول الفاعلية النسبية لكل من السياسة النقدية والسياسة المالية في التأثير على المستوى الكلي للإنتاج والعمالة هو، أساسا، خلاف حول الحقيقة التالية: ماهية هيكل الاقتصاد ومدى استجابته لهذين النوعين من السياسات. وهذا في حد ذاته موضوع ينبغي أن يحسم على أساس الدلائل العملية، وقد اعتمد المشتركون في هذا الجدل بشدة على استخدام الطرق القياسية في التحليل. ومانريد أن نؤكده هنا هو أنه إذا أراد أحد أن يتتبع هذا الجدل وأن يختبر الأدلة المقدمة فعلية أن يتحصل على بعض المعرفة في الاقتصاد القياسي (بما فيها معرفة حدوده واحتمال إساءة استعماله، إضافة إلى تفسير النتائج المترتبة على التطبيق الصحيح له في المشاكل الاقتصادية).

إذا، الاقتصاد القياسي هو ذلك الفرع من الاقتصاد الذي يعالج السلوك الاقتصادي باستخدام التحليل الكمي. ولذا، فقد أصبح يخدم وظيفتين حيويتين: الأولى أنه يزودنا بطرق للتحقق من النظريات الاقتصادية أو رفضها. فالنظرية الاقتصادية (أو *النموذج* في اصطلاح الاقتصاديين) هي مجموعة من التعريفات والافتراضات التي يمكن أن يستخدمها الاقتصادي لتوضيح أنواع معينة من الوقائع events. وتصف النظرية الاقتصادية التي يعبر عنها، عادة، في شكل مجموعة من المعادلات، الآلية التي تتفاعل بها المتغيرات الاقتصادية. فعلى سبيل المثال تنص نظرية سلوك المستهلك على أن الكمية التي سيشتريها المستهلكون من سلعة معينة تعتمد على تفضيلاتهم، دخولهم، سعر السلعة ذاتها وأسعار السلع والخدمات الأخرى. وترشدنا هذه النظرية إلى توقع أنه إذا ارتفع سعر السلعة فستنخفض، عادة، الكمية المشتراة منها.* وفي الاقتصاد الكلي تجد نظريات تتضمن أن المستوى

* يجب ذكر كلمة «عادة» لأنه من المتخيل، في ظل ظروف معينة، أن يكون أثر الدخل الموجب أقوى من أثر الإحلال السالب الناتج عن ارتفاع السعر، ولذا، فإن المستهلك قد يزيد في الواقع مشترياته من السلعة التي ارتفع سعرها.

الإجمالي للاستثمار يعتمد على سعر الفائدة، وبالتحديد تشير هذه النظريات إلى أن معدلات الفائدة الأعلى ستقلل من الإنفاق على تكوين رأس المال الحقيقي (الاستثمار).

ولتقويم فائدة هذه النظريات، يجب أن نحدد مدى الثقة في قدرتها على التنبؤ بالوقائع الاقتصادية. وكما هو الحال في الأمثلة السابق ذكرها، توضع النظرية الاقتصادية في شكل يمكن اختباره عن طريق تحديد ضمني لتتابع سببي من الوقائع مثل: إذا حدث هذا فإن ذلك سيحدث (على سبيل المثال إذا ارتفعت معدلات الفائدة ينخفض الإنفاق الاستثماري). وكثيرا يعبر عن هذا بوساطة المصطلحات الرياضية عن طريق ملاحظة أن متغيرا ما هو دالة في متغير آخر. مثلا نقول إن $I = a - bR$ حيث ترمز I إلى مستوى الإنفاق الاستثماري، R إلى معدل الفائدة، و a ، b هي ثوابت رقمية تأخذ قيما موجبة. في مثل هذه الصيغة يمكن إجراء الاختبار التجريبي لصحة توقعات النظرية.

قد نذكر هنا أن اختبار النظريات الاقتصادية بهذه الطريقة ليس عادة عملا سهلا. ذلك أن العبارات السببية من النوع الموصوف أعلاه،عادة ماتبنى على أساس افتراض ثبات العوامل الأخرى على حالها. فالمقولة بأن المعدلات الأعلى من الفائدة تؤدي إلى مستويات استثمار اقل مبنية، مثلا، على افتراض أن الطلب الكلي (من بين أشياء أخرى) يظل ثابتا. فإذا كان الطلب متزايدا في الوقت الذي يتزايد فيه معدل الفائدة فإن ارتفاعا في الاستثمار (لإشباع الطلب المتزايد) قد يكون مصاحبا لمعدلات الفائدة الأعلى. ولايعني هذا بالضرورة رفض النظرية لأن الأثر السالب للزيادة في معدلات الفائدة قد يقابل بتأثير موجب أعلى للطلب الإجمالي. والمشكلة التي يواجهها الاقتصاديون في هذا المجال هي أن معظم بياناتهم وإحصاءاتهم تأتي من الخبرة اليومية وليست من تجارب معملية متحكم فيها. لهذا السبب فإن على الاقتصاديين القياسيين ابتكار الطرق الإحصائية التي يمكنهم بوساطتها اصطناعيا إبقاء الآثار الأخرى (على المتغير موضع الاهتمام) ثابتة. وبهذه الطريقة، يمكنهم تحديد تأثير متغير على آخر، وهذه المشكلة - وكما

سيتضح في الفصول التالية – هي التي تساعد في اضفاء طبيعة خاصة على الطرق الكمية في الاقتصاد.

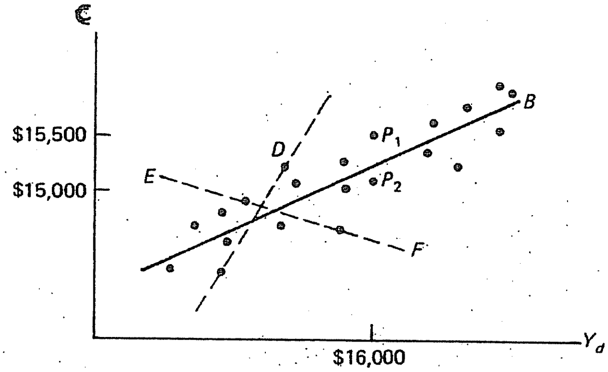
للاقتصاد القياسي، إذن، أهمية أساسية في التحقق من النظريات الاقتصادية أو رفضها. أما الوظيفة الحيوية الثانية للاقتصاد القياسي فهي تزويدنا بتقديرات كمية لأحجام العلاقات بين المتغيرات. فقد تقترح النظرية أن ارتفاعا في السعر يؤدي إلى انخفاض في الكمية المطلوبة. أو أن انخفاضا في مستويات الضرائب يحفز كل من الإنفاق الإجمالي والإنتاج الإجمالي. وعلى الرغم من أن معرفة الطبيعة العامة لهذه العلاقات قيمة جدا، إلا أنها لاتكون مناسبةجدا لأغراض اتخاذ القرارات الفعلية. كما يحتاج رجل الأعمال لمعرفة مقدار النقص في مبيعاته إذا رفع السعر بنسبة ١٠٪ مثلا حتى يتمكن من تقدير تأثير هذا القرار على مستوى ارباحه. وبالمثل فإن المستشار الاقتصادي يجب أن يقدر حجم الزيادة المتوقعة في الإنفاق الإجمالي نتيجة انخفاض محدد في الضرائب. فإذا كان التخفيض الضريبي صغيرا جدا فإنه قد لايمكن التخفيف من معدلات البطالة المرتفعة ومن الطاقات الإنتاجية المعطلة. بينما إذا كان التخفيض الضريبي كبيرا جدا فقد ينجم عنه التضخم. لهذه الأسباب، يجب أن تكون الطرق الكمية في الاقتصاد قادرة على توليد تقديرات لحجم هذه العلاقات إضافة إلى تقدير العلاقات الأكثر عمومية التي تقترحها النظريات الاقتصادية.

ومن المفيد النظر إلى مثال محدد عند عرض الطبيعة العامة للمشكلة القياسية، وبالمناسبة فإن هذا المثال مهم جدا. افترض – كما اقترح من قبل – أننا مستشارون اقتصاديون قد أوكل إلينا مهمة تقدير حجم الزيادة في الإنفاق الاستهلاكي الناجمة عن إنخفاض محدد مقترح في ضرائب الدخل الشخصية. وكنقطة انطلاق لمهمتنا، يمكننا أن نختار دالة الاستهلاك الكينزية الشهيرة مرجعا نظريا لدراستنا، والتي تقرر أن الإنفاق الاستهلاكي يعتمد على مستوى الدخل المتاح. ويفترض من أجل التبسيط – في الأقل، لتقديراتنا الأولية – أن هذه العلاقة تأخذ الشكل الخطي:

$$C=a+bY_d \tag{1.1}$$

حيث ترمز C إلى الإنفاق الاستهلاكي و Y_d إلى الدخل المتاح و a، b معلمات (ثوابت رقمية). من الواضح أن قيمة المعلمة b لها أهمية كبيرة لنا. حيث إن التخفيض الضريبي سيزيد الدخل المتاح الذي سيحفز بدوره الإنفاق الاستهلاكي و b كما هو معروف هي الميل الحدي للاستهلاك (م ح س)، التي تشير إلى ذلك الجزء من الدولار الإضافي من الدخل المتاح الذي سيوجهه الفرد إلى الاستهلاك. ومن الواضح أنا نحتاج إلى تقدير b إذا رغبنا في تقويم تأثير تخفيض الضرائب على مستوى الإنفاق.

تمدنا النظرية الاقتصادية الكلية ببعض الخطوط العريضة المرشدة والتقريبية. فتقترح النظرية - على سبيل المثال - أن قيمة الميل الحدي للاستهلاك b يتراوح بين الصفر والواحد الصحيح، وأن الدولار الإضافي في الدخل المتاح سيؤدي إلى بعض الزيادة في الإنفاق الاستهلاكي، ولكن جزءاً من هذه الزيادة في الدخل المتاح سوف يدخر، أيضا، ولذلك فإن الزيادة في الاستهلاك ستكون أقل بعض الشئ من الزيادة في الدخل المتاح. لكننا نحتاج بالطبع إلى تقدير أفضل من ذلك، لأن تأثير تخفيض الضرائب على الإنفاق الاستهلاكي سيكون أكبر إذا كانت $b = 0.9$ (أي إذا كان المستهلكون سينفقون ٩٠٪ من الدخل الإضافي على الاستهلاك ويدخرون فقط ١٠٪) عما لو كانت $b = 0.5$. وهكذا تصبح مهمتنا الأولية هي تحديد قيمة مقدرة لـ b. إحدى الطرق الممكنة للقيام بهذا التقدير هي اختبار السلوك الاستهلاكي والادخاري لمجموعة من الأفراد ذوي المستويات المختلفة من الدخل المتاح. وعلى افتراض حصولنا على هذه المعلومات حول الإنفاق الاستهلاكي والدخل المتاح من خلال استبيان حول ميزانيات الأسرة، وأن هذه المعلومات وضعت في جدول مبين في الشكل (١-١)- يطلق على مثل هذا الشكل والذي سنستخدمه بصورة متكررة *شكل الانتشار* scatter diagram حيث تمثل كل نقطة فيه قيمتين مشاهدتين للمتغيرين. ففي الشكل رقم (١-١)- على سبيل المثال - تشير نقطة P_1 إلى أسرة (في الاستبيان) لها دخل متاح قدره ١٦٠٠٠ دولار وإنفاق استهلاكي قدره ١٥٥٠٠ دولار.



شكل رقم (١-١): بيانات من ميزانيات مفترضة

لنحلل الآن المعلومات المعطاة في الشكل رقم (١-١) في ضوء دالة الاستهلاك الموجودة في معادلة (1.1). نلاحظ أولا أن التحديد الرياضي لدالة الاستهلاك مؤكد exact، حيث تبين المعادلة (1.1) وجود مستوى محدد من الإنفاق الاستهلاكي يصاحب كل مستوى من مستويات الدخل المتاح. ولكن السلوك الإنساني، بالطبع، يبتعد، تماما، عن مثل هذه الدقة. وفي الحقيقة تبين النتائج الموجودة في الشكل (١-١) أن الأسر ذات مستويات الدخل المتساوية تقوم في معظم الأحوال بانفاقات استهلاكية مختلفة. فنقاط مثل P_1 و P_2 – على سبيل المثال – تشير إلى أسرتين كل منهما تحقق مستوى الدخل نفسه وهو ١٦٠٠٠ دولار، ولكن الأسرة الأولى توجه ١٥٥٠٠ دولار منها إلى الإنفاق الاستهلاكي بينما تنفق الأسرة الثانية مبلغ ١٥٠٠٠ دولار فقط، وتدخر ١٠٠٠دولار.

والسؤال الآن هو كيف يمكننا تحديد تقديرات a و b من هذا الكم الهائل غير المتناسق ظاهريا من المعلومات. نعرف، من مبادئ الرياضيات، أن نقطتين تحددان الخط المستقيم. ولذلك، فإن المعلومات الضرورية اللازمة لتحديد a و b في المعادلة

(1.1) تتمثل في مشاهدتين، فقط. لذا، فمن ناحية، تبدو المشكلة التي تواجهنا هي وجود كم كبير من المعلومات، ومن ناحية أخرى، فإن من غير المنطقي (بالفعل) أن نهمل المعلومات الملائمة، وبالطبع، نحصل على قيم مختلفة لكل من a و b إذا اختلفت النقطتان المستخدمتان للوصول إلى حل لهاتين المعلمتين. ففي الشكل رقم (١-١) على سبيل المثال نحصل على الخطين CD و EF أو أي مجموعة أخرى من الخطوط، بحسب النقطتين المختارتين لتحديد الخط.

لكن الفحص الدقيق لانتشار النقاط في الشكل رقم (١-١) يشير إلى وجود نوع من العلاقة بـين C و Y_d وهي أنه كلما زاد الدخل المتاح يبدو، أيـضـا، أن مستوى الإنفاق الاستهلاكي يزداد في المتوسط. وهذه العلاقة بين C و Y_d ليست مؤكدة. غير أنه، على الرغم من ذلك، توجد علاقة نمطية typical بين المتغيرين. يمكننا، ببساطة عن طريق الفحص أو عن طريق منهج أكثر تقدما، أن نوفق خطا مثل AB لنقاط الانتشار هذه. ومثل هذا الخط يعبر عن السلوك الإنفاقي النمطي الذي يمدنا بتقديرات لـ a و b اللتين تشيران إلى القاطع الرأسي وميل الخط المستقيم على التوالي.

تلك هي نوعية المشاكل التي يهتم بها الاقتصاد القياسي. وفي الحقيـقـة، سيكون تركيز الفصول التالية على تطوير طرق منتظمة ومعقولة لتقدير هذه العلاقات المعتادة بين متغيرين (وفيما بعد بين عدة متغيرات). أثناء مناقشتنا هذه المواضيع، سنكتشف أن هناك عددا من الأسئلة ترتبط بهذه العلاقات ينبغي الإجابة عليها. ففي الحالة الافتراضية السابقة (التي طلبنا أن يتخيل القارئ نفسه في دور المستشار الاقتصادي للتخفيض المقترح في الضرائب)، يتضح، في الحال، وجود مشاكـل أخرى عديدة ينبغي حلها إضافة إلى تقدير b قبل الوصول إلى تنبؤ يمكن إلاعتماد عليه لتأثير تخفيض الضرائب على الإنفاق الإجمالي. ولإكمال مقدمتنا، فـقـد يكون من المفيد استعراض لبعض هذه المشاكل ومناقشتها بإيجاز طالما أن حل تلك المشاكل هو مهمة هذا الكتاب.

١ - اختبار الفرضية

افترض أن لدينا نظرية تتضمن علاقة سببية بين متغيرين، بفرض وجود بيانات حول هذين المتغيرين وربما متغيرات أخرى ذات علاقة أيضا. يصبح السؤال هو كيف يمكننا، بدرجة معينة من الثقة، تقرير وجود علاقة بين هذه المتغيرات؟ فعلى سبيل المثال، وبدلالة شكل الانتشار (١-١)، يمكن أن نسأل إلى أي مدى يمكن أن تكون العلاقة الظاهرة بين C و Y_d علاقة زائفة spurious وأنها، ببساطة، نتيجة غريبة لهذه العينة بالذات.

٢ - تقدير المعلمات

إذا كانت هناك علاقة بين متغيرين، كيف نتمكن من الاستخدام الأمثل للبيانات المتاحة من أجل الحصول على تقديرات دقيقة لتلك العلاقة؟ بالاعتماد على المعلومات الموجودة في الشكل رقم (١-١) ما الطريقة الأكثر فاعلية لتوليد تقديرات لـ a و b إضافة إلى ذلك نرغب في معرفة مقدار اختلاف السلوك الاقتصادي المتوقع عن المتوسط حتى تكون لدينا فكرة عن مدى فائدة تقديراتنا a و b.

٣ - استخدام التقديرات للتنبؤ

تحت أي مجموعة من الشروط أو القيود يمكننا استخدام هذه التقديرات لعمل تنبؤات؟ بالاشارة، مرة أخرى، للشكل رقم (١-١)، ما الافتراضات التي يجب افتراضها لاستخدام القيمة المقدرة لـ b من المسح العام لموازنات الأسر لتقويم تأثيرات تخفيض الضرائب على الإنفاق الاستهلاكي؟ أو (في موضوع مرتبط بذلك) هل يمكننا التنبؤ على أساس هذه المعلومات؟ وبدرجة ثقة معينة، كم سيكون حجم C عندما يكون مستوى Y_d محددا عند مستوى معين؟

٤ - الصيغة الدالية

مالشكل الدالي الملائم لهذه العلاقة؟ افترضنا، للتبسيط، وجود علاقة

خطية بسيطة بين C وY_d، ولكن، بالتأكيد، ليس من الضروري أن يكون ذلك صحيحا. فربما يتناقص الميل، الحدي للاستهلاك (أي b) في المعادلة (1.1) مع زيادة الدخل، حينئذ قد تكون العلاقة الصحيحة هي $C = a + bY_d^{1/2}$. كيف نستخدم النتائج النظرية والبيانات المتاحة لاختبار الشكل الدالي للمتغيرات التي نقدرها؟

٥ – قصور البيانات

ما تأثير القصور في البيانات المتاحة (مثلا، أخطاء القياس) على نتائجنا؟ هل تؤدي إلى عدم صحة تقديراتنا؟.

٦ – علاقات التغذية المرتدة

افترض أننا نرغب في تقدير تأثير المتغير X على المتغير Y. ففي بعض الاحيان من الممكن أن X لايؤثر، فقط، على Y ولكن Y أيضا يؤثر في X. في هذه الحال، قد يكون من الصعب التميز بين: هل تعكس تقديرات المعلمة تأثير X على Y أو ربما على الأرجح أن تكون مزيجا من هذين التأثيرين معا. وكثيرا ماتحدث علاقات التغذية المرتدة هذه حدوثا متكررا في الاقتصاد، فمثلا يحدد السعر الكمية المطلوبة من السلعة والكمية المطلوبة تؤثر بدورها في السعر، وكذلك فإن لمستوى الإنفاق الإجمالي في الاقتصاد تأثيرًا قويًا على مستوى الناتج الكلي والدخل الكلي ولكن مستوى الناتج والدخل يؤثر، بدوره، في مستوى الإنفاق... وهلم جرا.

وهذه الظاهرة هي ماقد يطلق عليها اسم مشكلة النظم. والمشاكل الاقتصادية غالبا ماتكون من نوع مشكلة النظم، وتعكس الاعتماد المتبادل الذي يميز عادة، عمل النظام الاقتصادي. ولكن هذه، كما سنرى، توجد مشاكل خطيرة للاقتصاد القياسي الذي ينبغي عليه أن يحاول فض اشتباك هذا الاعتماد المتبادل كميا.

هذه هي بعض مشاكل الاقتصاد القياسي، وسنطور في الفصول التالية طرق معالجتها.

ملحق أ (A): بعض قواعد عمليات الجمع

كما أشرنا في المقدمة، لايستخدم هذا الكتاب نظريات متقدمة في الرياضيات أو الإحصاء، ولذا، فسوف نعتمد كلية في التحليل على المبادئ الأولية للجبر والإحصاء. وعلى الرغم من ذلك، يوجد عدد قليل من القواعد المرتبطة بالعمليات الجبرية التي تبدو إما جديدة أو مبهمة لبعض القراء. ولما كنا سنستخدم تلك القواعد استخداما مكثفا فقد يكون من الأسهل للتحليل أن نعرض لها هنا حتى يتعود القارئ عليها من البداية.

سوف نستخدم سيجما (الكبيرة) $\sum$ لترمز إلى عملية الجمع، على سبيل المثال إذا رمزنا إلى الكمية المنتجة من إحدى السلع في السنة الأولى بالرمز Q_1 أو بعمومية أكثر إذا جعلنا Q_t ترمز إلى الكمية المنتجة من السلعة في السنة t، حينئذ فإن إجمالي الكمية المنتجة في السنوات الأولى والثانية والثالثة يمكن أن نعبر عنها $(Q_1 + Q_2 + Q_3)$. ويمكن كتابة هذا المقدار باختصار، على النحو التالي:

$\sum_{t=1}^{3} Q_t$ حيث:

$$\sum_{t=1}^{3} Q_t = Q_1 + Q_2 + Q_3 \qquad (1A.1)$$

ويمكننا أن نعمم النتيجة السابقة بإستخدام المقدار $\sum_{t=1}^{n} Q_t$ ليعبر عن مجموع الحدود الأولى التي عددها n من المتغير Q. وعلى سبيل المثال، لتوضيح هذه الفكرة فإنه يمكننا أن نعبر عن مجموع الحدود الجبرية من الحد الثالث إلى الحد السابع من المتغير Q على النحو التالي:

$$\sum_{t=3}^{7} Q_1 = Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7 \qquad \text{(1A.2)}$$

وقبيل الاستمرار، عليك أن تثبت مايلي:

$$\sum_{t=1}^{16} Q_t - \sum_{t=3}^{17} Q_t = Q_1 + Q_2 - Q_{17}. \qquad \text{(1A.3)}$$

والآن سوف نستعرض بعض قواعد الجمع التي تستخدم استخداما متكررا في هذا الكتاب.

القاعدة الأولى

إذا كانت c مقدارًا ثابتا (مثل (c = 5) فإن:

$$\sum_{t=1}^{n} cX_t = c\sum_{t=1}^{n} X_t.$$

ولتوضيح ذلك نعـرف، أن $\sum_{t=1}^{n} cX_t$ هي مجموع أعداد قدرها n من القيم الأولى للمتغير X، التي يكون كل منها مضروبا في مقدار ثابت قدره C، ولذا فإن:

$$\sum_{t=1}^{n} cX_t = cX_1 + cX_2 + \cdots + cX_n = c(X_1 + X_2 \cdots + X_n) = c\sum_{t=1}^{n} X_t. \qquad \text{(1A.4)}$$

القاعدة الثانية

إذا كانت كل من X و Y متغيرات Variables، فإن:

$$\sum_{t=1}^{n} (X_t + Y_t) = \sum_{t=1}^{n} X_t + \sum_{t=1}^{n} Y_t$$

وتعني هذه القاعدة أن مجموع قيم X و Y هو مجموع قيم X مضافا إليها مجموع قيم Y، وإثبات ذلك على النحو التالي:

$$\sum_{t=1}^{n}(X_t+Y_t)=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)+\cdots+(X_n+Y_n)$$

$$=(X_1+X_2+\cdots+X_n)+(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n) \qquad \text{(1A.5)}$$

$$=\sum_{t=1}^{n}X_t+\sum_{t=1}^{n}Y_t$$

لتعميم القاعدتين الأولى والثانية فإن عليك أن تثبت:

$$\sum_{t=1}^{n}(aX_t+bY_t+cZ_t)=a\sum_{t=1}^{n}X_t+b\sum_{t=1}^{n}Y_t+c\sum_{t=1}^{n}Z_t,$$

حيث a، b و c ثوابت و X، Y و Z متغيرات.

القاعدة الثالثة

إذا كانت $\overline{X}$ هي المتوسط الحسابي لعدد n من قيم المتغير X، حيث $\overline{X}=(\sum_{t=1}^{n}X_t)/n$ فإن:

$$\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})=0$$

مجموع الانحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي الصفر

ولإثبات هذه القاعدة، عليك أن تلاحظ أولا:

$$\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})=\sum_{t=1}^{n}X_t-\sum_{t=1}^{n}\overline{X}. \qquad \text{(1A.6)}$$

فإذا ضربنا وقسمنا الحد الأول من الطرف الأيمن على n فسنحصل على:

$$\frac{n\sum_{t=1}^{n}X_t}{n}=n\overline{X} \qquad \text{(1A.7)}$$

بعد ذلك، نلاحظ أن:

$$\sum_{t=1}^{n}\overline{X}=\overline{X}+\overline{X}+\cdots+\overline{X}=n\overline{X}. \qquad (1A.8)$$

وبالتعويض من (1A.7) و(1A.8) في (1A.6)، فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة:

$$\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)=\sum_{t=1}^{n}X_t-\sum_{t=1}^{n}\overline{X}=n\overline{X}-n\overline{X}=0$$

من هذه المناقشة يتضح لنا أنه إذا كانت K مقدارًا ثابتا، فإن:

$$\sum_{t=1}^{n}K=nK. \qquad (1A.9)$$

القاعدة الرابعة

إذا كان كل من $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ هو المتوسطات الحسابية لعدد n من القيم للمتغيرين X و Y، فإن:

$$\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)\left(Y_t-\overline{Y}\right)=\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)Y_t.$$

ولإثبات ذلك، علينا أن نلاحظ أولا أن:

$$\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)\left(Y_t-\overline{Y}\right)=\sum_{t=1}^{n}\left[\left(X_t-\overline{X}\right)Y_t-\left(X_t-\overline{X}\right)\overline{Y}\right]$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)Y_t-\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)\overline{Y} \qquad (1A.10)$$

وسوف نوضح الآن أن الحد الثاني من المقدار الجبري في الطرف الأيمن يعادل الصفر:

$$\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)\overline{Y}=\overline{Y}\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)=\overline{Y}.0=0; \qquad (1A.11)$$

وينتج ذلك عن القاعدتين الأولى والثالثة (مع ملاحظـة أن $\overline{Y}$ ثابت). وهذا هو المطلوب لإثبات القاعدة الرابعة.

ويمكن أن نسترسل في تحليل الخطوة السابقة من خلال ملاحظة أن:

$$\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}_t\right)Y_t=\sum_{t=1}^{n}X_tY_t-\sum_{t=1}^{n}\overline{X}Y_t. \qquad (1A.12)$$

فإذا ماضربنا وقسمنا الحد الأخير بـ n فإنه يمكننا أن نعبر عن المعادلة (1A.12) على النحو التالي:

$$\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)Y_t=\sum_{t=1}^{n}X_tY_t-n\overline{X}\overline{Y}. \qquad (1A.13)$$

ونترك للقارئ أن يثبت هاتين النتيجتين التابعتين Corollaries للقاعدة الرابعة:

$$\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)^2=\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)X_t$$

و

$$\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)^2=\sum_{t=1}^{n}X_t^2-n\overline{X}^2.$$

تلميح للحل: عبر عـن $\Sigma_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)^2$ على أساس أنه يعادل المقـدار $\left(\Sigma_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)\left(X_t-\overline{X}\right)\right)$.

ملحق ب (B) مراجعة للمفاهيم الإحصائية

نعرض في هذا الملحق مراجعة مختصرة لبعض المفاهيم الأساسية في الإحصاء التي سوف تستخدم استخداما متكررا في هذا الكتاب. وبالطبع، فإن هذا الملحق لايقصد به أن يكون بديلا عن الحصول على دراسة أولية للإحصاء، وإنما يهدف إلى تزويد القارئ بمراجعة عامة ودقيقة في الوقت نفسه لبعض المفاهيم الإحصائية المختارة.

متغيرات عشوائية Random variables

لأغراض عملية، يمكن النظر للمتغير العشوائي على أنه متغير تتحدد قيمته على أساس نتيجة تجربة، بشرط أن تكون النتيجة عرضة للمصادفة. وبمعنى آخر، ترتبط كل قيمة ممكنة للمتغير العشوائي باحتمال معين للحدوث. على سبيل المثال، فإن قيمة متغير عشوائي يمكن أن تعتمد على رمي قطعة عملة معدنية في الهواء ومشاهدة الوجه الذي يظهر منها بعد استقرارها على سطح مستو. وتكون نتيجة إلقاء هذه القطعة من العملة المعدنية (أو إجراء التجربة) إما كتابة (H) أو شعار (T). في هذه الحالة، يمكننا أن نعرف المتغير العشوائي Y على أساس أنه المتغير الذي تكون قيمته مساوية للواحد إذا كان الوجه المشاهد للعملة هو H، وتكون قيمته مساوية الصفر إذا كان الوجه المشاهد هو T.

ويمكن التعبير عن العبارة السابقة بدقة أكثر واختصار من خلال التصريح بأن Y هو متغير عشوائي يأخذ القيم $y = 0, 1$. وعلينا هنا ألا نخلط بين كل من Y و y، فالأول Y هو المتغير العشوائي الذي تعتمد قيمته على نتيجة التجربة، بينما y هو إحدى القيم المحددة (أرقام) التي قد يأخذها Y.

وأحد المتغيرات العشوائية الأخرى هو W، حيث W هو الوزن بالأرطال للشخص الذي اختير عشوائيا من عينة معطاة من الأفراد. في هذه الحالة تكون *القيم الممكنة* لـ W هي w حيث $50 \le w \le 1000$ إذا كانت المجموعة من الأفراد

تتألف من الأفراد البالغين. وعلى الرغم من أن كـل مـن Y و W هي متغيرات عشوائية فإن هناك اختلافا مهما بينهما: حيث يمكن أن تأخذ W أي قيمة في مدى القيم المتصلة Continuous، بينما لاتأخذ قيم Y مثل هذا الاتصال (أو الاستمرارية). ويطلق على المتغيرات العشوائية من النوع W المتغيرات العشوائية *المتصلة* (أو المستمرة)، بينما يطلق على المجموعة الثانية من المتغيرات العشوائية (من النوع Y) بالمتغيرات العشوائية *المتقطعة* discrete.

وفي هذا الملحق الإحصائي يأخذ التحليل شكل المتغيرات العشوائية *المتقطعة*، ويرجع السبب في ذلك إلى أن تحليل المتغيرات العشوائية المتصلة يتطلب استخدام التفاضل والتكامل. ولما كان هذا الكتاب يعتمد في التحليل على المبادئ الأولية في الجبر والإحصاء (كما ذكرنا في الملحق أ (A)) فيكفينا لهذا الغرض مناقشة مانحتاجه من المفاهيم المرتبطة بالمتغيرات العشوائية المتقطعة فقط.*

دالة احتمال أو كثافة** Probability (Or Density) function

ترتبط بالمتغير العشوائي دالة احتمال (يطلق عليها أحيانا دالة الكثافة الاحتمـالـيـة) وتعطي هذه الدالة الاحتمالات التي يأخذ فيها المتغير العشوائي كل قيمة من القيم الممكنة له.

ويعبر، عادة، عن دالة الاحتمال على شكل معادلة أو جدول. ومن مثال القاء قطعة معدنية في الهواء المعطي سابقا، فإن القيم الممكنة للمتغير العشوائي Y هي $y = 0,1$، والاحتمالات المرتبطة بها (على افتراض توازن القطعة المعدنيـة وأن عملية الإلقاء غير متحيزة لأي من الوجهين) هي 1/2 و 1/2. لذا، يمكننا كتابة الدالة الاحتمالية لـY على النحو التالي: $y = 0,1$ و $f(y) = 1/2$ أي أنه إذا كان Y متغيـرا

* القراء الذين تتوافر لديهم خلفية رياضية ملائمة يمكنهم، عموما ترجمة التحليل الموجود في هذا الملحق إلى مجال المتغيرات العشوائية المتصلة عن طريق إحلال علامات التكامل محل علامات الجمع.

** يلاحظ أن المؤلف يستخدم دالة الاحتمال ودالة الكثافة ليدلا على المعنى نفسه، بينما تستخدم في الإحصاء دالة الاحتمال للتعبير عن دوال المتغيرات المتقطعة، وتستخدم دالة الكثافة للتعبير عن دوال المتغيرات المتصلة (ملاحظة المترجم)

عشوائيا لدالة احتمال $f(y)$ فإن العبارة $f(1)$ تعني أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي Y الواحد الصحيح يكون مساويا لـ 1/2.

ولمزيد من التوضيح نأخذ مثالا آخر. فإذا افترضنا أن المتغيـر Z يعبر عن الرقم الذي يظهر على زهر النرد المتزن عند دحرجته. فإن مدى القيم التي يمكن أن يأخذها Z هو: z = 1,2,3,4,5,6، وتكون دالته الاحتمالية على النحو التالـي: $g(z) = 1/2$, z = 1,...,6. ويمكن التعبير عن هذه المعلومات تعبيرا آخر في شكل الجدول التالي:

1/6

(1B.1)

Z	1	2	3	4	5	6
g(z)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

مع ملاحظة أن:

$$g(1)+g(2)+\cdots+g(6)=\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}+\cdots+\tfrac{1}{6}=1 \qquad (1B.2)$$

أي أنه لما كان المتغير العشـوائـي Z يجب أن يأخذ احدى القيم الصحيحـة مـن 1،2،...،6 فإن مجموع الاحتمالات في هذه الحالة يكون مساويا الواحد الصحيح. وباختصار، فإن المعادلة (1B.2) تعني أن احتمال أن يأخذ المتغير Z إحدى القيم من (1،2،...،6) يكون مساويا الواحد الصحيح.

وتعد هذه النتيجة نتيجة عامة ولاتقتصر، فقط، على هذا المثال. ذلك أن مجموع الاحتمالات المقابلة لكل القيم الممكنة للمتغير العشوائي يجب أن تساوي واحدًا صحيحًا. وإحدى النتائج العامة الأخرى هي أنه، لما كان كل احتمال من الاحتمالات يكون إما أكبر من الصفر أو مساويا الصفر، فإن الدالة الاحتماليـة يجب أن تعرف، فقط، في حدود ذلك المجال، فعلى سبيل المثال، في حال زهر النرد المشار إليه آنفا، فإن قيمة الدالة الاحتمالية المناظـرة لـ $z=\sqrt{363}$ تساوي الصفر، لأن احتمال $z=\sqrt{363}$ يساوي الصفر.

الاستقلال وعدم الاستقلال Independence and dependence

تنشأ المشاكل الإحصائية، غالبا، من العلاقة التي تربط بين عديد من المتغيرات العشوائية. فعلى سبيل المثال افترض أن زهرا للنرد دحرج مرتين عشوائيا، وأن Z_1 و Z_2 هي القيم التي ظهرت في الدحرجة الأولى والدحرجة الثانية على الترتيب. ففي هذه الحال لانتوقع أن تكون قيمة Z_2 قد تأثرت بقيمة Z_1، أو أن Z_1 قد تأثرت بقيمةZ_2، فمثلا، إذا كان زهر النرد متوازنا فإن احتمال الحصول على الرقم 3 في الدحرجة الثانية (أو $Z_1=3$) سوف تكون مساوية 1/6 *بغض النظر* عن نتيجة الدحرجة الأولى. ويمكن أن نعبر عن ذلك بلغة احصائية بالقول إن احتمال أن يأخذ Z_2 أي قيمة لايتأثر بالقيمة المحددة التي أخذها Z_1 والعكس صحيح. ويقال في هذه الحالة عن المتغيرين Z_1 و Z_2 (والتي تكون احتمالاتها غير مرتبطة بهذه الصورة) أنهما متغيرين عشوائيان *مستقلان* عن بعضهما بعضا. أما إذا كانت المتغيرات العشوائية تعتمد على بعضها بعضا فيطلق عليها متغيرات عشوائية *غير مستقلة*. ولتوضيح ذلك، على سبيل المثال، إذا سحبنا ورقة واحدة من أوراق اللعب من مجموعة كاملة من هذه الأوراق وجعلنا $P=1$ إذا كانت الورقة إحدى الصور و $P=0$ إذا كانت الورقة غير ذلك. إضافة إلى ذلك افترض أن $K=1$ إذا كانت الورقة المسحوبة ولدا و $K=0$ إذا كانت غير ذلك. حينئذ، فإن المتغيرات العشوائية P و K هي متغيرات عشوائية غير مستقلة حيث إن احتمال أن $K=1$ سيكون مساويا 4/12 إذا كانت $P=1$، ويساوي صفرا إذا كانت $P=0$. أما إذا لم تعط أي معلومات مرتبطة بـ P فإن احتمال $K=1$ يعادل 4/52. وباختصار، نقول إن متغيرين عشوائيين يكونان غير مستقلين إذا كانت المعلومات المرتبطة بأحدهما تغير من الاحتمالات المرتبطة بالآخر.

ومن السهل أن نعمم هذه التعاريف، حيث يكون المتغير العشوائي X_1 مستقل عن المتغيرات العشوائية X_2 ،...، X_n إذا كان احتمال أن يأخذ X_1 أي قيمة لايتأثر مطلقا بالقيم المحددة التي تأخذها المتغيراتX_2 ،...، X_n، أما إذا وجد بعض التأثير على X_1 بواسطة القيم التي تأخذهاX_2 ،...، X_n، ففي هذه الحال، يكون X_1 وواحد على الأقل من المتغيرات الأخرى X_2 ،...، X_n غير مستقلة.

نتيجة تمهيدية

نفترض أن X_1 ،... ، X_n متغيرات عشوائية وأن Y هي دالة في هذه المتغيرات أي أن:

$$Y = h\left(X_1, \cdots, X_n\right) \quad (1B.3)$$

تعني الدالة (1B.3) أن Y تعتمد على مجموعة جزئية subset من $X's$ أو تعتمد على كل المتغيرات X_1 ،... ، X_n، ولما كانت $X's$ متغيرات عشوائية فإن Y يكون متغيرا عشوائيا أيضا، بمعنى أن قيمته المحددة سوف تعتمد على الصدفة. يضاف إلى ذلك أنه إذا كانت الدالة معقولة reasonable فإن Y سوف تكون لها دالة كثافة احتمالية كما هو الحال لكل من المتغيرات العشوائية X_1 ،... ، X_n.

ولأن الشروط المطلوبة لوجود دالة الكثافة الاحتمالية Y والحسابات المتضمنة في تحديدها تتجاوز مستوى هذا الكتاب، فإن النتائج الموجودة في هذا الملحق والمتعلقة بدوال المتغيرات العشوائية (مثل Y) لاتتطلب حساب تلك الدوال وإنما تفترض ضمنيا وجودها حتى يمكن افتراض المفاهيم نفسها المتعلقة بالمتغيرات العشوائية $X's$ للمتغير Y كما سيتضح لاحقا.

توقعات Expectations

يعرف التوقع الرياضي $E(X)$ (وغالبا مايطلق عليه *القيمة المتوقعة*) للمتغير العشوائي X ذي القيم الممكنة $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$ والذي تكون دالته الاحتمالية $f(x)$، على النحو التالي:

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n) \quad (1B.4)$$

ومن المعادلة (1B.4)، يمكن تعريف القيمة المتوقعة لـ X بأنها القيمة المتوسطة المرجحة لكل القيم الممكنة للمتغير العشوائي X. حيث الأوزان هي الاحتمالات المناظرة لكل قيمة من قيم X. ويعرف الرمز E في المعادلة السابقة بأنه *معامل القيمة المتوقعة* the expected value operator، وعلى سبيل مثال لتوضيح كيفية حساب

القيمة المتوقعة نجد أن تلك القيمة للمتغير العشوائي Z في مثال زهرة النرد المشار إليه آنفا تكون مساوية لـ:

$$E(Z)=1\left(\tfrac{1}{6}\right)+2\left(\tfrac{1}{6}\right)+\cdots+6\left(\tfrac{1}{6}\right)=\tfrac{21}{6}=3\tfrac{1}{2} \tag{1B.5}$$

ويعبر، غالبا، عن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي بالوسط الحسابي mean ويرمز له بالحرف μ، ويلحق بالحرف μ بوصفه دليلا سفليا subscript رمز المتغير العشوائي الذي يتم حساب الوسط الحسابي له، على سبيل المثال فإن: $E(Z)=\mu_Z$ و $E(X)=\mu_X$. ويمكن لنا أن نفكر في الوسط الحسابي للمتغير العشوائي بأنه مقياس نزعته المركزية central tendency أو موقعة. فإذا ماكررت التجربة عديدا من المرات فإن الوسط الحسابي يكون القيمة التي نتوقعها في المتوسط للمتغير على مدى كل التجارب.

ويعرف التباين للمتغير العشوائي X $\left(\sigma_x^2\right)$ حيث $x=x_1, x_2,\ldots,x_n$ قيمه الممكنة و $f(x)$ دالته الاحتمالية بأنه:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= E\left(X-\mu_x\right)^2 \qquad (1B.6)\\ &=\left(x_1-\mu_x\right)^2 f\left(x_1\right)+\left(x_2-\mu_x\right)^2 f\left(x_2\right)+\cdots+\left(x_n-\mu_x\right)^2 f\left(x_n\right)\end{aligned}$$

حيث $E(X)=\mu_X$، ومن المعادلة (1B.6)، نرى أن التباين هو القيمة المتوقعة لمربع انحرافات قيم المتغير عن وسطه الحسابي. وبمعني آخر، فإن التباين هو مقياس لتشتت قيم المتغير العشوائي حول وسطه الحسابي، ويشير في المتوسط إلى مدى بعد قيم المتغير العشوائي عن وسطه الحسابي. وعلى سبيل المثال للحسابات التي يتضمنها ايجاد التباين للمتغير العشوائي، نوجد تباين المتغير Z السابق الإشارة إليه:

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= E(X-3.5)^2\\ &=(1-3.5)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)+(2-3.5)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)+\cdots+(6-3.5)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)\\ &=\frac{17.50}{6}=2\tfrac{11}{12}\end{aligned}$$

ويعرف الجذر التربيعي الموجب للتباين *بالانحراف المعياري* the standard deviation.

بعض خواص التوقعات

نعرض في هذا المبحث، باختصار، بعض خصائص التوقعات والتي ستستخدم مرارا في هذا الكتاب. وأولى هذه الخصائص هي أن القيمة المتوقعة للرقم الثابت (c) هي نفسه كمايلي:

$$E(c)=c \tag{1B.7}$$

فإذا كان الرقم الثابت c يعادل خمسة مثلا، فإن المعادلة السابقة تعني أن القيمة المتوقعة لـ c هي خمسة. ويرجع ذلك إلى أنه لما كانت c لاتأخذ قيما أخرى غير ٥ فإنها تأخذ القيمة ٥ باحتمال قدره الواحد الصحيح ولذلك فإن $E(5) = 5.f(5) = 5(1) = 5$.

والآن، افترض أن المتغير العشوائي Y هو حاصل ضرب رقم ثابت في متغير عشوائي آخر، فمثلا في حالة دحرجة زهر النرد افترض أن $Y = 15Z$، فإذا اظهر زهر النرد الرقم 4 مثلا فإن المتغير Y يأخذ القيمة $Y = 15(4) = 60$. ويمكننا أن نوجد القيمة المتوقعة Y على النحو التالي:

$$E(Y)=E(15Z)=15(1)(\tfrac{1}{6})+15(2)(\tfrac{1}{6})+\cdots+15(6)(\tfrac{1}{6})$$
$$=15(3.5)=52.5$$

وهكذا يتضح لنا أن القيمة المتوقعة لـ $Y = 15Z$ ماهي إلا حاصل ضرب 15 في القيمة المتوقعة للمتغير Z. وهذه نتيجة عامة، فإذا كان لدينا ثابتٌ b ومتغيرا عشوائيا X فإن:

$$E(bX)=bE(X)=b\mu_x \tag{1B.8}$$

ويمكننا أن نتوسع في تطبيق هاتين النتيجتين العامتين على النحو التالي: افترض أن X_1، X_2، ...، X_n متغيرات عشوائية عددها n وأوساطها الحسابية هي μ_1، μ_2، ...، μ_n على الترتيب، وأن المتغير Y يعرف على النحو التالي:

$$Y=a_0+a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n \tag{1B.9}$$

حيث إن a_1، a_2، ...، a_n ثوابت.

وتعني الدالـة (1B.9) أن المتغير هو، في واقع الأمر توليفة خطـيـة Linear combination من $X's$ فنلاحظ الآن، بدون إثبات، أن:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) \\ &= E(a_0) + E(a_1X_1) + E(a_2X_2) + \cdots + E(a_nX_n) \\ &= a_0 + a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n) \\ &= a_0 + a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n \end{aligned} \tag{1B.10}$$

فإذا كانت Y دالة خطية في مجموعة من المتغيرات العشوائية فإن القيمة المتوقعة لـY هي مجموع القيم المتوقعة للمتغيرات العشوائية التي تتكون منها Y.

افترض الآن أننا أوجدنا متغيرا عشوائيا آخر واطلقنا عليه Q، حيث إن $Q = Z^2$، وإن Z هي القيمة التي تظهر على زهر النرد عند دحرجته، لذا فإن قيمة Q ماهي إلا مربع العدد الذي يظهر على الزهر. وبأخذ القيمة المتوقعة لـ Q نجد أن:

$$E(Q) = E(Z^2) = 1\left(\tfrac{1}{6}\right) + 4\left(\tfrac{1}{6}\right) + \cdots + 36\left(\tfrac{1}{6}\right) = 15\tfrac{1}{6} \tag{1B.11}$$

وبما أن $E(Z) = 3.5$ لذا نرى أن:

$$[E(Z)]^2 = (3.5)^2 = 12.25 \neq E(Z^2) = 15\tfrac{1}{6}$$

وهكذا فإن $[E(Z)]^2 \neq E(Z^2)$ ولفظيا، فإن مربع القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي Z لا يساوي القيمة المتوقعة لمربع المتغير العشوائي Z.

يوضح المثال السابق نتيجة أكثر عمومية وهي: أنه، إذا كـان $Y = g(X)$، و $g(X)$ دالة غير خطية في المتغير العشوائي X فإن:

$$E(Y) = E[g(X)] \neq g[E(X)] \tag{1B.12}$$

على سبيل المثال، فلقد رأينا تـوا أن $[E(X)]^2 \neq E(X^2)$، ومثال ذلك، أيضا أن $E(e^x) \neq e^{E(x)}$.

وبخصوص التوقعات، فإننا نحتاج نتيجة أخرى. افـتـرض أن Y تساوي حاصل ضرب مجموعة من المتغيرات العشوائية:

$$Y=\left(X_1X_2\ldots X_n\right) \qquad (1B.13)$$

ففي هذه الحال، إذا لم تكن المتغيرات X_1، X_2، ...، X_n مستقلة عن بعضها بعضاً تكون لدينا النتيجة العامة التالية:

$$E(Y)=E\left(X_1X_2\ldots X_n\right)\neq E\left(X_1\right)E\left(X_2\right)\cdots E\left(X_n\right) \qquad (1B.14)$$

ولإثبات ذلك، فقد عرفنا من قبل أن:

$$E\left(Z^2\right)=E(Z.Z)\neq E(Z)E(Z)=\left[E(Z)\right]^2$$

ولكن إذا كانت المتغيرات العشوائية X's مستقلة عن بعضها بعضا فإن التوقع الرياضي لحاصل ضرب هذه المتغيرات في بعضها بعضا يكون مساويا حاصل ضرب توقعاتها:

$$E(Y)=E\left(X_1X_2\ldots X_n\right)=E\left(X_1\right)E\left(X_2\right)\cdots E\left(X_n\right) \qquad (1B.15)$$

حيث إن جميع X's مستقلة.

عينة عشوائية Random sample

لنفرض أن لدينا قطعة عملة معدنية ليست متوازنة تماما، ففي هذه الحال، يكون احتمال الحصول على الكتابة لهذه القطعة عند رميها هو P، حيث P ليس بالضرورة مساويا 1/2. واحتمال الحصول على الشعار سوف يعادل *(1-P)*. ويطلق على الثابت P الذي يظهر في المعادلة أو في النموذج الاحتمالي *معلمة* Parameter.

والآن، افترض أننا لانعرف قيمة المعلمة P، ولكننا نريد الحصول على تقدير لها. لعمل ذلك يمكننا أن نلقي بقطعة العملة المعدنية عددا من المرات (مائة مرة مثلا) ونأخذ $\hat{P}$ بوصفه تقديراً لـ P حيث $\hat{P}$ هي نسبة ظهور الكتابة إلى عدد الرميات الكلية، أي عدد مرات ظهور الكتابة مقسوما على مائة. ولتوضيح كيفية عمل ذلك افترض أن X_1 متغير عشوائي يأخذ القيمة صفراً إذا ظهرت الشارة في الرمية الأولى أو يأخذ قيمة الواحد الصحيح إذا ظهرت الكتابة. وافترض أيضا، أن X_2، ...، X_{100} هي متغيرات عشوائية تأخذ قيمتها الصفر والواحد الصحيح

على الترتيب وفقا لنتائج الرمي من 2 إلى 100 . بمعنى أن $X_i=0$ إذا ظهرت الشارة على الرمية رقم i أو $X_i=1$ إذا أسفرت تلك الرمية عن ظهور الكتابة.

وعلى افتراض أن احتمال الحصول على الكتابة في أي رمية ليس مرتبطا بنتيجة أي رمية أخرى، في هذه الحال تكون المتغيرات X_1، X_2، . . . ، X_{100} مستقلة. يضاف إلى ذلك أن جميع هذه المتغيرات العشوائية سيكون لها دالة الاحتمال نفسها. بمعنى أن دالة الاحتمال لكل X_i ستكون:

$$\begin{array}{c|c|c} x_i & 0 & 1 \\ \hline f(x_i) & 1-p & p \end{array} \tag{1B.16}$$

وتكون المتغيرات العشوائية *المستقلة*: مثل X_1، X_2، . . . ، X_{100} والتي يكون لها *دالة الاحتمال* نفسها عينة عشوائية. ويوصف المجتمع الذي سحبت منه هذه العينة العشوائية بدالة الاحتمال المشتركة لتلك المتغيرات العشوائية. وفي هذه الحالة، تكون دالة الاحتمال للمجتمع الإحصائي على النحو التالي:

$$\begin{array}{c|c|c|} x & 0 & 1 \\ \hline f(x) & 1-p & p \end{array} \tag{1B.17}$$

مقدرات Estimators

يمكن وصف الطريقة التي قدرنا بها P (في المثال السابق) بإيجاد قيمة $\hat{P}$ بدلالة المتغيرات العشوائية X_1، X_2، . . . ، X_{100} على النحو التالي:

$$\hat{P} = \sum_{i=1}^{100} \frac{X_i}{100} \tag{1B.18}$$

فإذا ظهرت الكتابة، على سبيل المثال، ثمانين مرة من مائة الرمية لقطعة العملة فإن 80 من الـ X_i ستكون واحدا بينما تكون قيمة الرميات الـ 20 الأخرى صفرا، ولذا، فإن P ستصبح 80/100 أو 0.8.

وبلغة الإحصاء، يطلق على الرقم 0.8 في المثال أعلاه *تقدير* المعلمة estimate

P، بينما يطلق على *القاعدة أو الصيغة الرياضية* التي تستخدم للحصول على هذا التقدير ($\hat{P}$) في الحالة أعلاه المقدر. ويعني ذلك أن التقدير رقم معين محسوب على أساس المقدر، فعلى سبيل المثال، توضح لنا P أعلاه أننا نضيف قيم المتغيرات العشوائية المائة X_1، X_2، ...، X_{100} ومن ثم تقسمها على 100 وهذا هو مقدرنا، ولكن، للحصول على تقدير معين لـ P (مثلا، 0.8) فإنه يجب علينا أن نقوم برمي قطعة العملة المعدنية مائة مرة حتى توجد قيما مشاهدة للمائة متغير عشوائي، ولذا، فإنه يمكننا أن نعد بدهيا، إلى حد ما، أن التقدير ماهو إلا القيمة المتحققة للمقدر.

وعموما، فإن مقدرًا كـ $\hat{P}$ هو دالة في المتغيرات العشوائية [انظر المعادلة (1B.18)]. *لذا يجب أن يكون المقدر كذلك متغيرا عشوائيا*. فعلى سبيل المثال، يمكن أن يأخذ $\hat{P}$ أي قيمة 0، 0.01، 0.02، ...، 0.99، 1.00، وذلك بناء على نتائج رمي قطعة العملة المعدنية مائة مرة. وعليه، فإنه، إذا عددنا أن المائة رمية هذه للقطعة بوصفها تجربة عشوائية واحدة ذات عدد كبير من المفردات فإنه يستنتج من ذلك أن P تكون متغيرا عشوائيا.

مقدرات غير متحيزة Unbiased estimators

يوصف المقدر بأنه غير متحيز إذا كانت قيمته المتوقعة أو وسطه الحسابي مساويا المعلمة التي نقوم بتقديرها. أي أنه إذا كان $\hat{b}$ مقدرا لـ b فإن $\hat{b}$ يكون غير متحيز إذا كان:

$$E\left(\hat{b}\right)=b \tag{1B.19}$$

ومن جانب آخر، إذا كان $E\left(\hat{b}\right)\neq b$ يطلق على المقدر $\hat{b}$ بأنه مقدر متحيز للمعلمة b.

وعلى سبيل المثال لتوضيح ذلك، افترض أن $\hat{b}$ هو مقدر للمعلمة P كما هو محدد في المعادلة (1B.18)، وباستخدام المعادلة رقم (1B.10) المرتبطة بالتوقعات، نجد أن:

$$E\left(\hat{P}\right)=E\left(\tfrac{1}{100}X_1+\tfrac{1}{100}X_2+\cdots+\tfrac{1}{100}X_{100}\right) \\ =\tfrac{1}{100}\left[E\left(X_1\right)+E\left(X_2\right)+\cdots+E\left(X_{100}\right)\right] \qquad (1B.20)$$

ولما كانت دالة الاحتمال لكل X_i هي كما تظهر في المعادلة (1B.16) فإننا نجد أن:

$$E\left(X_i\right)=0(1-P)+1(P)=P \qquad (1B.21)$$

والآن، بالتعويض من (1B.21) في (1B.20)، نحصل على:

$$E\left(\hat{P}\right)=\tfrac{1}{100}(100P)=P \qquad (1B.22)$$

وهكذا، فقد أوضحنا أن $\hat{P}$ هو مقدر غير متحيز للمعلمة P.

وعلى سبيل التوضيح للمقدر المتحيز بمثال، افترض أننا نريد تقدير قيمة P^* حيث إن $P^*=e^P$. في البداية، قد يبدو أن هذه الدالة ماهي الا تحوير مبسط للمشكلة التي نوقشت للتو، ولكن، لما كان P^* مرتبطا بالمعلمة P ارتباطا غير خطي فإن هذا التحوير يكون مهما.

إن المقدر الواضح لـــ $P^*=e^P$ هو $\hat{P}^*=e^{\hat{P}}$ حيث $\hat{P}$ معطاة في المعادلة (1B.18) ومن مناقشتنا السابقة يتضح أن:

$$E\left(\hat{P}^*\right)=E\left(e^{\hat{P}}\right)\neq e^{E\left(\hat{P}\right)}=e^P=P^* \qquad (1B.23)$$

وهكذا، فإن $E\left(\hat{P}^*\right)\neq P^*$، ولذا فإن $\hat{P}^*$ مقدرا متحيزا للمعلمة P^*. وباختصار فإن كون p^* مقدرا غير متحيزا للمعلمة P لايعني ضمنيا أنه يمكننا استخدام $\hat{P}$ مباشرة للحصول على مقدرات غير متحيزة للدوال غير الخطية في P. وكما سنرى في هذا الكتاب، فإن مشكلة الدوال غير الخطية مشكلة خطيرة من مشاكل الاقتصاد القياسي.

اتسـاق Consistency

السابقة

مقدرنا الموضح بالمعادلة (~~1B.18~~) مبني على عينة عشوائية حجمها 100 مفردة، فإذا قمنا بدلا من ذلك برمي قطعة من العملات المعدنية عـدد n من المرات فإنه يمكننا تعريف المقدر $\hat{P}$ في الحال هذه على النحو التالي:

$$\hat{P}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \tag{1B.24}$$

وباستخدام (1B.10)، يمكن بسهولة إثبات أن $E\left(\hat{P}_n\right) = P$ (بمعنى أن $\hat{P}_n$ هو مقدر غير متحيز) وباستخدام الصيغة الرياضية التي سوف نوجدها في ملحق الفصـل الثاني من هذا الكتاب، يمكننا أن نثبت أن تباين $\hat{P}_n$ هو:

$$\sigma^2_{\hat{P}_n} = \frac{1}{n^2}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2\right) \tag{1B.25}$$

حيث إن σ_i^2 هو تباين X_i الذي يمكن حسابة بالاستعانة بالدالة الاحتمالية لـــ X_i والمعرفة في (1B.16) على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= E\left[X_i - E\left(X_i\right)\right]^2 = E\left(X_i - P\right)^2 \\ &= \left[(0-P)^2(1-P) + (1-P)^2 P\right] = P(1-P) \end{aligned} \tag{1B.26}$$

السابقة

وبالتعويض من المعادلة (1B.26) في المعادلة (~~1B.25~~) نحصل على:

$$\sigma^2_{\hat{P}_n} = \frac{1}{n}\left[P(1-P)\right] \tag{1B.27}$$

من المعادلـة (1B.27)، يمكننا أن نرى أنه إذا اقترب حجم العينة من اللانـهـايـة ($\text{as } n \longrightarrow \infty$) فإن تباين $\hat{P}_n$ يؤول إلى الصفر.* وتعني هذه النتيجة مع النتيجة التي تبين أن متوسط $\hat{P}_n$ هو P أنه عندما تؤول n إلى مالانهاية، فإن القيمة الأكثر

* يمكننا التعبير عن نفسه المعنى بعبارة بديلة وهي أنه إذا اصبح حجم العينة كبيرا بدرجة لانهائية، فإن تباين P_n سيكون مساويا الصفر.

احتمالا لـ $\hat{P}_n$ تكون P. وبلغة فنية إحصائية يمكن اثبات أن احتمال اختلاف $\hat{P}_n$ عن P بأي مقدار يقترب من الصفر كلما زاد حجم العينة، وأن هذا الاحتمال يؤول إلى الصفر في المالانهاية. وباستخدام الرموز، تعني هذه العبارة مايلي:

$$\lim_{n\to\infty} \text{Prob}\left(\left|\hat{P}_n - P\right| > \varepsilon\right) = 0 \qquad (1B.28)$$

حيث ε هي أي عدد صغير محدد سلفا.

المعادلة السابقة

وعندما يحقق أي مقدار شرطا مثـل (1B.28) فإنه يوصف أنه مقدر متسـق للمعلمة موضع الاهتمام. وهكذا فإن $\hat{P}_n$ هو مقدر متسق لـ P. وبصفة عامة يمكن القول إن $\hat{b}$ يكون مقدرا متسقا للمعلمة b إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} \text{Prob}\left(\left|\hat{b} - b\right| > \varepsilon\right) = 0 \qquad (1B.29)$$

وغالبا مايكتب شرط إلاتساق (~~الموجود في~~ 1B.29) مختصـرا $P \ \lim \hat{b} = b$. ويعني هذا الشرط الأخير (مرة أخرى) أنه إذا آل حجم العينة إلى مالانهاية فـإن احتمال أن تأخذ $\hat{b}$ قيمة أخرى غير قيمة b يساوي الصفر. وأخيرا، إذا كـان $\hat{c}$ مقدرا غير متسق، حينئذ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \text{Prob}\left(\left|\hat{c} - c\right| > \varepsilon\right) = 0 \qquad (1B.30)$$

ومقدرا كهذا يوصف بعدم الاتساق.

دالة الكثافة المشتركة: إيضاحات

يوجد عديد من الحالات التي تتحدد فيها قيم أكثر من متغير عشوائي واحد نتيجة إجراء تجربة عشوائية. افترض، مثلا، القيام بتجربة يختار فيهـا الـشـخـص عشوائيا، حيث يسجل فيها وزنه وطوله وعمره ونرمز لها بـ W ، H وA على التوالي. في هذه الحال، نجد أن قيم ثلاثة متغيرات عشوائية تحدد جميعها بوساطة التجربة. ومثال آخر، افترض القيام بتجربة رمي قطعتي عملة معدنية عشوائيا، وافترض أن $X = 1$ إذا ظهرت الكتابة و $X = 0$ إذا ظهرت الشارة، في هذه الحال تحدد التجربة قيم

متغيرين عشوائيين. وهكذا، فإن مناقشتنا الأولية للاستقلال وعدمه تتضمن مثالا آخر. يجب أن يكون واضحا، عموما، أن التجربة الواحدة يمكن أن تحدد قيم عدد n من المتغيرات العشوائية، حيث تكون n عددًا صحيحًا موجبًا.

افترض حال تحديد قيم متغيرين عشوائيين X و Y ولغرض التوضيح افترض أن قيم X الممكنة هي $x = 1,2$ وقيم Y هي $y = 1,2,3$، ويعني هذا أن هناك ستة ازواج ممكنة من القيم المناظرة لكل من X و Y حيث تظهر واحدة من القيم لكل من X, Y عند كل تجربة، والأزواج الست المحتملة من القيم هـي (1,1)، (1,2)، (1,3)، (2,1)، (2,2) و(2,3). حيث إن الحالة (1,1) مثلا تناظر $X = 1, Y = 1$. والحالة (1,2) تناظر $X = 1 , Y = 2$ وهلم جرا. ولأكمال الصورة، افترض أن احتمالات الحصول على هذه الأزواج الست من القيم هي 0.1، 0.2، 0.15، 0.25، 0.1 و 0.2 على الترتيب، ويشير هذا، على سبيل المثال، إلى أن احتمال أن $(X = 1, Y = 2)$ هو 0.2، وهلم جرا.

وتعرف دالة الكثافة المشتركة (ويشار إليها، باختصار، بالكثافة المشتركة) لعدد من المتغيرات العشوائية بأنها الدالة التي تعطي الاحتمال الذي تأخذه كـل مجموعة من المتغيرات العشوائية المناظرة لكل نتيجة محتملة من النتائج الممكنة، ويعني هذا للحالة السابقة أنه إذا كانت $f(X, Y)$ هي دالة الكثافة المشتركة لـ X وY حيث إن $X = 1,2$، $Y = 1,2,3$ حينئذ فإن $f(1,3)$ = احتمال $(X = 1, Y = 3)$ = 0.15 وهلم جرا.

ويمكن وصف دالة الكثافة المشتركة f(x,y) لحالتنا التوضيحية هذه في شكل الجدول التالي:

(x, y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
$f(x, y)$	0.1	0.2	0.15	0.25	0.1	0.2

(1B.31)

ويلاحظ من الجـدول (1B.31) أن مجموع، الاحتمالات يساوي الـواحـد الصحيح والسبب في ذلك، أنه ينبغي أن تأخذ X و Y واحدة من الأزواج الست

المعطاة في الجدول. ولأغراض الرجوع إلى الأدب الإحصائي نلاحظ أن دالة الاحتمال المشترك الموجودة في (1B.31) يمكن التعبير عنها، غالبا بطريقة بديلة على النحو التالي:

x/y	1	2	3
1	0.1	0.2	0.15
2	0.25	0.1	0.2

(1B.32)

واتساقا مع نقاشنا للمعادلة (1B.1)، نعرف دالة الاحتمال المشترك $f(x,y)$ االمناظرة لأي زوج من القيم غير الممكنة لكل من X وY بأنها تساوي الصفر. ومثال ذلك يتضح في الدوال التالية: $f(-15, 27) = f(1, 1.5) = f(52.3, 2) = 0$. والسبب في هذا أن احتمال الحصول على نتيجة غير ممكنة يجب أن يكون صفرا. وعموما يمكن تعريف قيمة الكثافة المشتركة المناظرة لمجموعة غير ممكنة من القيم للمتغيرات العشوائية الموجودة بالدالة بأنها مساوية الصفر.

وتحدد الكثافة المشتركة لـ X و Y جميع الاستدلالات الاحتمالية المرتبطة بـ X و Y. ولتوضيح ذلك، نستخدم (1B.31) أو (1B.32) لنجد أن احتمال أن يكون $(X=1, Y=1)$ أو $(X=2, Y=3)$ هو $(0.1+0.2=0.3)$. وبالمثل، فإن احتمال $(X=2, Y\leq 2)$ هو $0.25+0.1=0.35$.

فإذا افترضنا -زيادة في التوضيح- أننا مهتمون، فقط، بالمتغير X وخصوصًا احتمال أن يكون $X=1$ فإننا نرى من الجدول أن $X=1$ تناظر الحالات (1,1)، (1,2)، و (1,3) ولاتوجد هناك احتمالات أخرى. ولذلك، فإن احتمال $(X=1)$ = [احتمال أن $(X=1, Y=1)$ + احتمال $(X=1, Y=2)$ + احتمال $(X=1, Y=3)$] = $= 0.1+0.2+0.15 = 0.45$)، وبالمثل، نجد أن احتمال $(X=2)$ يعادل $(0.25+0.1+0.2=0.55)$. وللإشارة المستقبلية نلاحظ أن احتمال $(X=1)$ يمكن الحصول عليه من دالة الكثافة المشتركة $f(x,y)$ عن طريق جمع $f(1,y)$ عبر كل القيم الممكنة لـ $y=1,2,3$.

عرفنا، من قبل، دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي، بأنها الدالة التـي تعطي احتمالات أن يأخذ المتغير العشوائي كل قيمة من قيمه الممكنة. وفي المثـال السابق، حددنا احتمال $(X=1) = 0.45$ واحتمـال $(X=2) = 0.55$، ولاتوجد هناك قيم أخرى ممكنة لـ X. افترض الآن أن $g(x)$ هي دال الكثافة الاحتمالية لـ X حيث إن $(x=1,2)$، مما يستتبع معه أن $g(1)=0.45$ و$g(2)=0.55$ أو في الشكل الجدولي التالي:

x	1	2
$g(x)$	0.45	0.55

(1B.33)

وبالمثل، إذا افترضنا أن $h(y)$ هي دالـة الكثافـة الاحتمالية للمتغير العشوائي Y حيث $(y=1,2,3)$، وبشكل متماثل، تماما، لماسبق فإن قيم $h(y)$ تحدد من الجدول التالي: [كما حددناها من قبل لـ $g(x)$]:

y	1	2	3
$h(y)$	0.35	0.3	0.35

(1B.34)

وباختصار، فإنه يمكننا تحديد دالة الاحتمال لكـل مـن X وY من دالة الاحتمـال المشترك لـ X و Y وسيتم ذلك بصورة رياضية Formally الآن.

دالة الكثافة المشتركة: تعميمات

افترض أن X وY هي متغيرات عشوائية متقطعة، وأن قيمها الممكنة هي x_1، x_2، ...، x_n و y_1، y_2، ...، y_m وأن دالة الكثافة المشتركة لهما هي:

x, y	x_1, y_1	$\cdots$	x_n, y_1	x_1, y_2	$\cdots$	x_n, y_m
$f(x, y)$	$f(x_1, y_1)$	$\cdots$	$f(x_n, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$\cdots$	$f(x_n, y_m)$

(1B.35)

افترض - الآن - أن دالة الكثافة الاحتمالية لـ X هي $f_1(x)$ حيث $(x = x_1, ..., x_n)$ ودالة الكثافة لـ Y هي $f_2(y)$ حيث $(y = y_1, ..., y_n)$ في ضوء المناقشة السابقة، يتبين لنا أن:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1) &= f(x_1, y_1) + \cdots + f(x_1, y_m) \\
f_1(x_2) &= f(x_2, y_1) + \cdots + f(x_2, y_m) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
f_1(x_n) &= f(x_n, y_1) + \cdots + f(x_n, y_m)
\end{aligned}
\tag{1B.36}
$$

المعادلات السابقة

وباستخدام رمز الجمع يمكننا أن نعبر عن (~~1B.36~~) على النحو التالي:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{m} f(x, y_i), \qquad x = x_1, \cdots, x_n \tag{1B.37}$$

وتوجد علاقة مماثلة بين $f_2(y)$ و $f(x,y)$ وبالتحديد، تكون:

$$f_2(y) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y), \qquad y = y_1, \cdots, y_m \tag{1B.38}$$

دالة الكثافة المشتركة: التوقعات

عرفنا من قبل القيمة المتوقعة لـ X على النحو التالي:

$$E(X) = x_1 f_1(x_1) + \cdots + x_n f_1(x_n) \tag{1B.39}$$

السابقة

ويمكننا في ضوء المعادلات (~~1B.36~~) أن نحدد ايضا $E(X)$ بدلالة الاحتمال المشترك لكل من X و Y على النحو التالي:

$$
\begin{aligned}
E(X) = x_1 &\left[f(x_1, y_1) + \cdots + f(x_1, y_m) \right] \\
+ x_2 &\left[f(x_2, y_1) + \cdots + f(x_2, y_m) \right] \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
+ x_n &\left[f(x_n, y_1) + \cdots + f(x_n, y_m) \right]
\end{aligned}
\tag{1B.40}
$$

ومن الواضح أنه يمكن تحديد $E(Y)$ أيضا بدلالة $f_2(y)$ أو $f(x,y)$.

دوال الكثافة المشتركة: توقعات دوال المتغيرات العشوائية

افتــرض أن $h(x,y)$ هي دالة محــدودة bounded لكل من X و Y، ونعنــي بالقول بأن الدالة محدودة بأن $|h(x,y)|$ نهائية finite لكل قيم x، $(x = x_1, ..., x_n)$، وقيم y، $(y = y_1, ..., y_m)$. والقيم الممكنة للدالة $h(x,y)$ هي:

$$h(x_1,y_1),h(x_1,y_2),\cdots,h(x_1,y_m),h(x_2,y_1),\cdots,h(x_n,y_m)$$

نعرف القيمة المتوقعة للدالة $h(x,y)$ في هذه الحالة على النحو التالي:

$$\begin{aligned}E[h(X,Y)] &= h(x_1,y_1)f(x_1,y_1)+\cdots+h(x_1 y_m)f(x_1,y_m)\\ &+h(x_2,y_1)f(x_2,y_1)+\cdots+h(x_2 y_m)f(x_2,y_m)\\ &\vdots\\ &+h(x_n,y_1)f(x_n,y_1)+\cdots+h(x_n y_m)f(x_n,y_m)\end{aligned} \qquad (1B.41)$$

وتفسيــر $E[h(X,Y)]$ واضح ويتناسق مع حالة دوال الاحتمال ذات المتغيــر الواحد univariate case، وبالتحديد فإن القيمة المتوقعة للدالـة $h(X,Y)$ تعرف بأنها المجموع المرجح لجميع قيمها الممكنة (حيث أن أوزان الترجيح هي الاحتمـالات المناظرة للقيم).

وللتوضيح افترض الحالة الخاصة حيـث إن $h(X,Y) = X$، حينئذ نجد مـن المعادلة (1B.41) أن:

$$\begin{aligned}E[h(X,Y)] &= x_1[f(x_1,y_1)+\cdots+f(x_1,y_m)]\\ &+x_2[f(x_2,y_1)+\cdots+f(x_2,y_m)]\\ &\vdots\\ &+x_n[f(x_n,y_1)+\cdots+f(x_n,y_m)]\end{aligned} \qquad (1B.42)$$

وباستخدام المعادلة (1B.36)، يمكننا اختصار هذا إلى:

$$E[h(X,Y)] = x_1 f_1(x_1)+x_2 f_1(x_2)+\cdots+x_n f_1(x_n) \qquad (1B.43)$$

الذي يكون متماثلا مع (1B.39)، وهذا يعني أن (1B.39) هي حالة خاصة من (1B.41).

توضيح: تغاير X و Y (Covariance of X and Y)

افترض أن X و Y هي متغيران عشوائيان مميز مستمران، لهما دالة كثافة مشتركة $f(x,y)$، حيث إن $(x = x_1, \ldots, x_n)$ و$(y = y_1, \ldots, y_m)$، افترض، أيضا أن $E(X)=u_x$ وأن $E(Y)=u_Y$ حيث إن $E(X)$، $E(Y)$ هي القيم المتوقعة لكل من X و Y على الترتيب. لذا، فإن تغاير X و Y (أو $\sigma_{X,Y}$) يعرف على النحو التالي:

$$\sigma_{X,Y} = \left[(X-u_x)(Y-u_y)\right] \tag{1B.44}$$

ويوجد في الفصل الثاني مناقشة وتفسير لمفهوم التغاير بين متغيرين عشوائيين.

ويمكن حساب تغاير X و Y $(\sigma_{X,Y})$ باستخدام المعادلة (1B.41) وذلك عن طريق جعل $h(X,Y)=(X-u_x)\,(Y-u_y)$. وعلى سبيل المثال، افترض أن دالة الاحتمال المشترك لـ X و Y هي المعطاة في (1B.31)، حينئذ، باستخدام (1B.40)، فإننا نحصل على:

$$E(X) = 1[0.1+0.2+0.15]+2[0.25+0.1+0.2] = 1.55 \tag{1B.45}$$

وبالمثل، فإن:

$$E(Y) = 1[0.1+0.25]+2[0.2+0.1]+3[0.15+0.2] = 2.00 \tag{1B.46}$$

وباستخدام (1B.41) نحصل على:

(1B.47)

$$\begin{aligned}\sigma_{X,Y} &= E[(X-1.55)(Y-2.00)]\\ &= (1-1.55)(1-2)(0.1)+(1-1.55)(2-2)(0.2)+(1-1.55)(3-2)(0.15)\\ &\quad+(2-1.55)(1-2)(0.25)+(2-1.55)(2-2)(0.1)+(2-1.55)(3-2)(0.2)\\ &= -0.050\end{aligned}$$

دوال الكثافة المشتركة: مناقشة أكثر عمومية

نحاول في هذا المبحث أن نعمم المفاهيم الأساسية التي حصلنا عليها أعلاه لحالة من ثلاثة متغيرات عشوائية، ومنها يمكن التعميم، أيضا، مباشرة.

افترض وجود ثلاثة متغيرات عشوائية متقطعة X، Y و W قيمها الممكنة على التوالي $(x=x_1, ..., x_n)$ ، $(y=y_1, ..., y_m)$ و $(w=w_1, ..., w_s)$ في هذه الحالة يكون لدينا n قيم ممكنة لـ X ، m قيم ممكنة لـ Y، وأخيرًا s قيم ممكنة للمتغير W.

افترض الآن أن $p(x,y,w)$ هي دالة الكثافة المشتركة لــ W, Y, X، حيث على سبيل المثال $P(x_1,y_3,w_4) = \text{Prob}(X=x_1$ و $Y=y_3$ ، $W=w_4)$، وحينئذ فإن التوسع المباشر للمناقشة يتضمن التالي:

الملاحظة الأولى: مجموع كل القيم للدالة $P(x,y,w)$ (حيث يوجد عدد nms منها) يساوي الواحدة.

الملاحظة الثانية: يمكن تحديد الاحتمالات المتعلقة باثنين، فقط، من المتغيرات العشوائية (X و Y، مثلا) من دالة الكثافة المشتركة للمتغيرات العشوائية الثلاثة (X، Y وW)، ولتوضيح هذه الملاحظة، دعنا نعود مرة ثانية لتوسيع النتيجة (1B.36) التي تعطينا:

$$\text{Prob}\left(X = x_i \;\; and \;\; Y = y_j\right) = p\left(x_i, y_j, w_1\right) + p\left(x_i, y_j, w_2\right) + \cdots + p\left(x_i, y_j, w_s\right) \quad (1B.48)$$

ويمكننا أن نعطي مثالين آخرين أكثر وضوحا على النحو التالي:

$$\text{Prob}(X = 2 \;\; and \;\; Y = 10) = p(2,10,w_1) + p(2,10,w_2) + \cdots + p(3,10,w_s) \quad (1B.49)$$

و

$$\text{Prob}(X = 3 \;\; and \;\; Y = 7) = p(3,y_1,7) + p(3,y_2,7) + \cdots + p(3,y_m,7) \qquad (1B.50)$$

مع ملاحظة أنه، في جميع الحالات، جمعت دالة الكثافة المشتركة لكل القيم الممكنة للمتغير الذي لم يظهر في دالة الإحتمال.

الملاحظة الثالثة: بافتراض أن دالة الكثافة المشتركة لـ X و Y هي $f(x,y)$ حيث إن $(x = x_1, ..., x_n)$ و $(y = y_1, ..., y_m)$، فإن نتيجة المعادلة (1B.48) تعطينا الدالة $f(x_i,y_i)$ – أي قيمة دالة الكثافة المشتركة المناظرة لـ y_i و x_i.

ولما كان من الممكن القيام بالحسابات الموجودة في (1B.48) لكل واحد من أزواج القيم: (y_1,x_1)، (y_2,x_1)، ....، (y_m,x_1)، (y_1,x_2)، .... (y_m,x_n) فإنه يمكن تحديد دالة الكثافة المشتركة الكلية لكل من X و Y من دالة الكثافة المشتركة X و Y و W على النحو التالي:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= p(x,y,w_1) + p(x,y,w_2) + \cdots + p(x,y,w_s) \\ &= \sum_{i=1}^{s} p(x,y,w_i) \end{aligned} \tag{1B.51}$$

حيث تأخذ x أي قيمة من القيم x_1، ...، x_n وأيضا تأخذ y أي قيمة من القيم y_1, ..., y_m. وبنفس المنطق يمكن تحديد دالة الكثافة المشتركة لكل من W, X، مثلا g(x,w) ودالة الكثافة المشتركة لـ Y و W، مثلا $h(y,w)$ باستخدام دالة الكثافة المشتركة لـ W, Y, X وذلك على النحو التالي:

$$\begin{aligned} g(x,w) &= p(x,y_1,w) + p(x,y_2,w) + \cdots + p(x,y_m,w) \\ &= \sum_{i=1}^{m} p(x,y_i,w) \end{aligned} \tag{1B.52}$$

وأيضا:

$$\begin{aligned} h(y,w) &= p(x_1,y,w) + p(x_2,y,w) + \cdots + p(x_n,y,w) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p(x_i,y,w) \end{aligned} \tag{1B.53}$$

ويلاحظ أنه، في جميع الحالات جمعت دالة الكثافة المشتركة على مدى جميع القيم الممكنة للمتغير الذي لايناظر الكثافة في الجانب الأيسر من العلاقة.

وتبين لنا مناقشتنا السابقة أن المعلومات المرتبطة بدالة الكثافة المشتركة لـ X, Y, W تتضمن، بدورها، المعلومات حول دوال الكثافة المشتركة لأي زوج من هذه المتغيرات. ولما كانت دالة الكثافة لـ X يمكن تحديدها من دالة الكثافة المشتركة لـ $X,$

و Y هلم جرا، فعليه يمكن القول أن دالة الكثافة المشتركة لـ X، Y وW تحدد أيضا كثافة X وكثافة Y وكثافة W.

نتيجة مهمة للاستقلال

لنأخذ، مرة أخرى، ثلاثة متغيرات عشوائية هي X، Y وW بدالة كثافة مشتركة $p(x,y,w)$ حيث إن $(x=x_1 ,..., x_n)$ ، $(y=y_1 ,..., y_m)$ و $(w=w_1 ,..., w_s)$ افترض مرة أخرى أيضا أن دالة الكثافة لـ X هي $f_1(x)$، ودالة الكثافة لـ Y هي $f_2(y)$، ودالة الكثافة لـ W هي $f_3(w)$. فإذا كانت X،Y وW مستقلة عن بعضها بعضا فإنه يمكن حساب دالة الكثافة المشتركة $p(x,y,w)$ على النحو التالي:

$$p(x,y,w) = f_1(x) f_2(y) f_3(w) \tag{1B.54}$$

ويعني ذلك أنه إذا كانت المتغيرات العشوائية X، Y وW *مستقلة عن بعضها بعضا* فإن دالة الكثافة المشتركة لها تساوي حاصل ضرب دوال الكثافة الفردية لكل منها. ويمكن أن نقوم بتعميم تلك النتيجة فنذكر أن دالة الكثافة المشتركة لأي عدد من المتغيرات العشوائية سوف يكون مساويا ضرب دوال الكثافة الفردية لكل منها إذا كانت تلك المتغيرات *مستقلة عن بعضها بعضا*.

ولما كانت $f_i(x_i) = \text{prob}\ (X = x_i)$ وهلم جرا. فإن أحد النتائج المهمة للمعادلة (1B.54) هو أنه إذا كانت كل من X،Y وW مستقلة عن بعضها بعضا فإن:

$$\begin{aligned} &\text{Prob}\left(X = x_i \ \text{ and } \ Y = y_j \ \text{ and } \ W = w_r\right) \\ &\quad = \text{Prob}\left(X = x_i\right) * \text{Prob}\left(Y = y_j\right) * \text{Prob}\left(W = w_r\right) \end{aligned} \tag{1B.55}$$

أي أن الاحتمال المشترك عند $X{=}x_i$ و $Y{=}y_i$ و $W{=}w_r$ يمكن حسابه عن طريق حاصل ضرب الاحتمالات *الفردية* في بعضها بعضا حيث لايوجد تداخل بين المتغيرات العشوائية الثلاثة. وللتوضيح، فإن كل جزء يحدد دالة الاحتمال المشترك (1B.55) يرتبط فقط بالمتغير العشوائي المناظر له. وعمومًا، لن يكون الحال كهذه إذا كانت المتغيرات مرتبطة ببعضها بعضا (أو غير مستقلة عن بعضها بعضا) وذلك حسب ما

رأينا من قبل عند مناقشتنا للاستقلال الإحصائي.

والآن، افترض أن $f(x, y)$ هي دالة كثافة مشتركة لـ Y, X، فطالما أن:

$$f(x,y)=p(x,y,w_1)+p(x,y,w_2)+\cdots+p(x,y,w_s)$$

وبافتراض الاستقلال، فإن المعادلة (1B.54) تتضمن مايلي:

(1B.56)

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)[f_3(w_1)+f_3(w_2)+\cdots+f_3(w_s)]=f_1(x)f_2(y)$$

ولما كان المقدار الذي يوجد بين القوسين [ ] هو مجموع الكثافة لـــ W عبر كل القيم الممكنة لها، فإنه يكون، حينئذ، مساويا الواحد الصحيح. ومرة أخرى إذا افترضنا أن $h(y,w)$ و $g(x,w)$ هي دوال الكثافة المشتركة لكل من (W,Y) و (W,X) على الترتيب فإنه، بطريقة مشابهة للتي توصلنا بها إلــى (1B.56)، يمكن أن نصل إلى النتائج التالية:

$$h(y,w)=f_2(y)f_3(w) \tag{1B.57}$$

وأيضا:

$$g(x,w)=f_1(x)f_3(w) \tag{1B.58}$$

وفي الحقيقة، تناظر النتائج الموجودة في المعادلتين السابقتين (1B.57) و (1B.58) النتيجة العامة التالية: افترض وجود متغيرات عشوائية عددها q هي X_1، X_2، . . . ، X_q مستقلة عن بعضها البعض حيث يمكن اختصار كثافتها المشتركة بطريقة مشابهة لتلك الموجودة في (1B.54). عندئذ، فإن أي مجموعة جزئية من هذه المتغيرات العشوائية تكون مستقلة عن بعضها بعضا، كما تكون دالة الكثافة المشتركة لها مساوية حاصل ضرب دوال احتمال جميع متغيرات هــذه المجــموعــة، فــمــثــلا، إذا كــانــت X_1، X_2، . . . ، X_{10} متغيرات مستقلة عن بعضها بعضا، فإن المتغيرات كانت X_1، X_3 وX_7 تكون مستقلة عن بعضها بعضا كذلك، ويظهر ذلك في المعادلة التالية:

$$\text{Prob}(X_1=3 \text{ and } X_8=7)=\text{Prob}(X_1=3)*\text{Prob}(X_8=7) \tag{1B.59}$$

ومن الواضح أن خاصية إلاستقلال إلاحصائي المشترك للمتغيرات العشوائية تبسط كثيرا حساب الاحتمالات المشتركة.

تطبيق شروط الاستقلال

افترض أنه لدينا عملة معدنية، وأن احتمال ظهور الكتابة عند رمي هذه العملة هو P، ولذا فإن احتمال ظهور الشارة T هو $1-P$. افترض أنه تم رمي هذه العملة عشوائيا n من المرات، دع $X_i = 1$ إذا اسفرت الرمية i عن ظهور الكتابة، $X_i = 0$ إذا أظهرت الرمية الشارة، وأن $(i = 1,..., n)$. ولما كان رمي العملة يتم عشوائيا، فإنه سيكون لدينا عدد n من المتغيرات العشوائية المستقلة عن بعضها بعضا وهي $X_1, ..., X_n$ مع ملاحظة أن احتمال $p=(X_i=1)$ وأن احتمال $1-p = (X_i=0)$.

والآن، فإن احتمال أن تسفر الرميات الأولى وعددها s عن ظهور الكتابة وأن تسفر الرميات الأخيرة وعددها $n-s$ عن ظهور الشارة يمكن حسابه على النحو التالي: لما كانت $X_1, ..., X_n$ هي متغيرات عشوائية مستقلة عن بعضها بعضا فإن هذا الاحتمال يكون [انظر (1B.55)]:

$$\begin{aligned}
&\Pr ob(X_1 = 1 \text{ and } X_2 = 1 \text{ and } \ldots \text{ and } X_s = 1 \text{ and } X_{s+1} = 0 \text{ and } \ldots X_n = 0) \\
&\quad = \Pr ob(X_1 = 1)\Pr ob(X_2 = 1)\ldots \Pr ob(X_s = 1)\Pr ob(X_{s+1} = 0)\ldots \Pr ob(X_n = 0) \qquad (1B.60) \\
&\quad = P^s(1-P)^{n-s}
\end{aligned}$$

افترض - الآن - أننا نريد حساب احتمال أن تسفر الرميات الأولى وعددها $n-s$ عن ظهور الشارة، وأن تسفر الرميات الأخيرة وعددها s عن ظهور الكتابة. يكون الاحتمال في هذه الحال هو الاحتمال نفسه في (1B.60) وذلك لأن:

المعادلة السابقة

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}(X_1 = 0 \text{ and} \ldots \text{and } X_{n-s} = 0 \text{ and } X_{n-s+1} = 1 \text{ and} \ldots \text{and } X_n = 1) \\
&\quad = \mathrm{Prob}(X_1 = 0) \ldots \mathrm{Prob}(X_{n-s} = 0) \ldots \mathrm{Prob}(X_{n-s+1} = 1) \ldots \mathrm{Prob}(X_n = 1) \qquad (1B.61) \\
&\quad = (1-p)^{n-s} P^s = P^s (1-P)^{n-s}
\end{aligned}
$$

وللتعميم، افترض الآن، مجموعة معينة متسلسلة من الكتابة والشعار قد ظهرت حيث ظهر عدد s من الكتابة وعدد $n\text{-}s$ من الشـارة. دع $P_{s,n}$ هي احتمال الحصول على هذه السلسلة، حينئذ يجب أن يكون واضحا أن:

$$P_{s,n} = P^s (1-P)^{n-s} \qquad (1B.62)$$

وسوف نحتاج هذه النتيجة فيما بعد.

أسـئلة

(١) بين صحة المعادلـة $\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X}) = 0$ عندما تكـون X_1=0، X_2=5، X_3=6 و X_4=1.

(٢) أثبت أن:

$$\sum_{t=1}^{n}(aX_t + bY_t + cZ_t) = a\sum_{t=1}^{n} X_t + b\sum_{t=1}^{n} Y_t + c\sum_{t=1}^{n} Z_t$$

(٣) أثبـت أن $\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})$ يمكن التعبير عـنـه عـلـى الـنـحـو $\sum_{t=1}^{n} X_t(Y_t - \bar{Y})$.

الفصل الثاني

نموذج انحدار المتغيرين

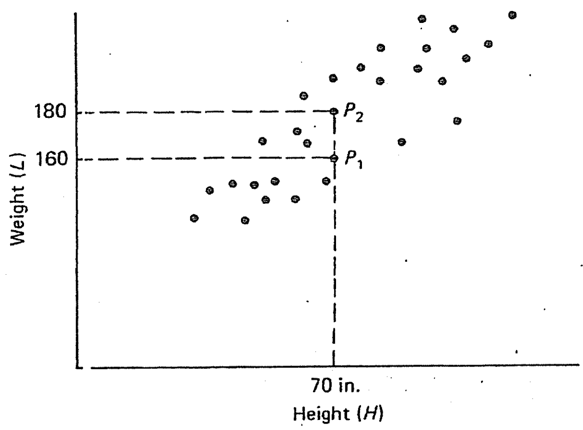
إحدى المشاكل الأساسية في الاقتصاد القياسي هي تطوير طرق فعّالة لتقدير العلاقات الكمية بين المتغيرات الاقتصادية. وبدلالة المثال المعطي في الفصل الأول، فإن مانحتاجه هو طريقة ما تمكننا من الحصول على مقدرات للمعلمات a وb في دالة الإستهلاك حيث يمكن، من خلالها، التنبؤ بكيفية تغير الاستهلاك مع تغير مستوى الدخل المتاح بالإضافة إلى أشياء أخرى. في هذا الفصل، سوف نوضح المبادئ الأساسية لتقدير علاقة بين متغيرين. ونود أن نؤكد أن هذا الفصل هو أكثر الفصول أهمية في الكتاب. ففي هذا الفصل وفي القسم الأول من الفصل الثالث نقدم الهيكل الأساسي للمفاهيم الخاصة بالتقدير واختبار الفرضيات، أما المادة المعروضة في الفصول التالية (بما في ذلك، على سبيل المثال، تقدير العلاقات بين متغيرات عدة) فهي تعد أساسًا، امتدادا مباشرا وبديهيا لتحليلنا في حالة متغيرين.

(٢-١) قياس العلاقة الإحصائية بين متغيرين : التغاير والارتباط

دعنا، في البداية نفترض أننا مهتمون، فقط، بوصف العلاقة الإحصائية بين متغيرين، ولاتتوفر لدينا أية فرضيات تتضمن أي نوع من العلاقات السببية بينهما. ومن ثم، فإن كل مانسعى إليه هنا هو تحديد ما إذا كان هناك أي نوع من الارتباط المنتظم بين المتغيرين.

وعلى سبيل المثال، افترض أننا سجلنا الوزن (L) بالرطل، والطول (H) بالبوصة لعينة من ٣٠ فردا اختيروا عشوائيا. وكما فعلنا في الفصل الأول،

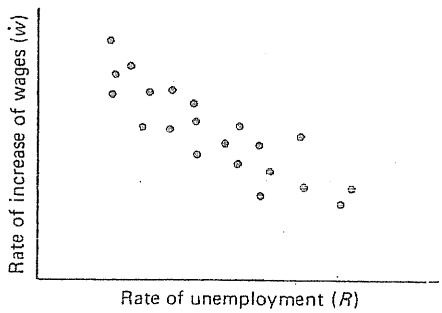
نستخدم شكل انتشار (٢-١) لتصوير المشاهدات. وكما في الفصل السابق، فإننا نلاحظ عدم وجود علاقة مؤكدة بين المتغيرين. فشخصان بالطول نفسه لن يكون لهما، عموما، الوزن نفسه. ويمكن أن نرى في الشكل (٢-١) على سبيل المثال، أنه، بينما الشخصان الممثلان بالنقطتين P_1 و P_2 طول كل منهما ٧٠ بوصة إلا أن الأول يزن ١٦٠ رطلا والثاني يزن ١٨٠ رطلا. إلا أنه يظهر أن هناك علاقة من نوع ما بين الطول والوزن. فيبدو أن الأشخاص الأطول *عادة* مايكونون زوي وزن أكبر من القصار. ولذا، يبدو في المتوسط، أن هنـاك *ارتباطا* موجبـا بين الطول والوزن؛ فالقيم الأكبر من الوزن مقترنة على نحو منتظم بالقيم الأكبر من الطول.



شكل (٢-١)

وفي المقابل فإن شكل الانتشار (٢-٢) يوضح أن المتغيرين محل الاعتبار، وهما معدل التغير النسبي في الأجر ($\dot{W}$) ومعدل البطالـة (R)، *مرتبطان عكسيًا*. فارتفاع النقاط يتناقص كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين، الأمر الذي يوضح أن الزيادات الأسرع في الأجور مقترنة - بانتظام - بمعدلات بطالة أقل. وهذه قـد لاتكون نتيجة مفاجئة بدرجة كبيرة. فعندما يكون الاقتصاد فـي حـالـة رواج، ويكون هناك أعداد قليلة من العمال العاطلين، فإننا نتوقع أن يـقـوم أصـحـاب العمل برفع الأجور بمعدلات أسرع نسبيا في محاولة منهم لزيادة الإنتاج كي يقابل

مستوى الطلب المرتفع على منتجاتهم. وعلى العكس من ذلك، عندما يكون الطلب الكلي منخفضا ونتيجة لذلك، البطالة مرتفعة، فسوف تكون هناك ضغوط أقل على الأجور لترتفع. وقد تصادف أن يكون المنحنى الممثل لنقاط هذا الانتشار معروفا بمنحنى *فيليبس* نسبة إلى A.W. Phillips وهو أول من لاحظ هذه العلاقة بين $\dot{W}$ و R في بريطانيا.*



شكل (٢-٢)

التغايــــر

من بين الأسئلة التي نريد أن نسألها عن متغيرين : هل يرتبط هذان المتغيران بعلاقة طردية أم عكسية، أي هل القيم الأكبر لواحد منهما عادة ماتقترن بالقيم الأكبر للآخر (علاقة طردية)؟ أم أن القيم الأكبر للمتغير الأول عادة ماتكون مصاحبة للقيم الأصغر للثاني (علاقة عكسية)؟ وتسمى المعلمة التي ترصد هذه العلاقة الطردية أو العكسية «*التغاير*» ، وبالنسبة لمتغيرين X وY وسطاهما الحسابيان هما : $E(Y)=\mu_Y$ و $E(X)=\mu_X$ يعرف التغاير رياضيا :

---

* - انظر: A. W. Philips, "The Relation Between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1861-1957." *Economica* 25(Nov. 1958), pp. 283-299

$$\sigma_{X,Y} = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \tag{2.1}$$

أي أن التغاير هو القيمة المتوقعة لحاصل ضرب $(Y-\mu_Y)$ في $(X-\mu_X)$ ، فإذا كان هذا التغاير موجبا $\sigma_{X,Y} > 0$ فإنه يوضح أن القيم الأكبر من المتوسط الحسابي للمتغير X $[(X - \mu_X) > 0]$ تقترن، *عادة*، بقيم المتغير Y الأكبر من المتوسط $(Y - \mu_Y) > 0$، والعكس صحيح. وبديهيا فإن الفكرة هنا، وببساطة، هي أنه ليكون $\mu_{X,Y}$ موجبا فإن الحدين $(X - \mu_X)$ و $(Y - \mu_Y)$ لابد أن يكونا أما موجبين أو سالبين. ولهـذا، نقول إذا كان X أكبر من قيمته المتوسطة μ_X فإن Y لابد أن يكون أكبر من قيمتـه المتوسطة μ_Y ، ومن ثم فإن X و Y ترتبطان طردياً. وعلى العكس من ذلك، إذا كان $\sigma_{X,Y} < 0$ فإن قيم X الأكبر من المتوسط سوف تكون عادة مصاحبة لقيـم Y الأقل من المتوسط ، الأمر الذي يشير إلى وجود علاقة عكسية بين المتغيرين.

أما عن الحالة الوسيطة، فهي، بالطبع، تلك التي يكون فيهـا $\sigma_{X,Y} = 0$. وفي هذه الحال فإن قيم X الأكبر من المتوسط سوف تكون مصاحبة بالقدر نفسه لكل من قيم Y الأصغر من المتوسط وقيمها الأكبر من المتوسط. ويوجد هـنـاك حالتان لذلك، الأولى هي الحالة التي يكون فيها المتغيران *مستقلين*. فعلى سبيل المثال، إذا كان كل من X و Y مستقلا:

$$\begin{aligned} \sigma_{X,Y} &= E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \\ &= E\left[(X-\mu_X)E(Y-\mu_Y)\right] = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

حيث :

$$E(X-\mu_X) = E(X) - E(\mu_X) = \mu_X - \mu_X = 0^{(*)}$$

والثانية هي الحالة التي يكون فيها المتغيران على علاقة ببعضهما بطريقة *غير خطية*،

(*) على القارئ أن يتذكر (كما هو مبين في الملحق B بالفصل الأول) أنه إذا كان المتغيران مستقلان فإن القيمة المتوقعة لحاصل ضربهما تساوي حاصل ضرب قيمتيهما المتوقعتين. ويلاحظ أيضا أن متوسط X أي μ_X ثابت ولهذا فإن $E(\mu_X) = \mu_X$.

وسوف نرى مثالا على ذلك فيما بعد، ولكن، يتعين، عند هذه النقطة ملاحظة أنه، بسبب هذه الحالة غير الخطية، فإن التغاير بين متغيرين إذا كان مساويا للصفر فإن هذا لايتضمن أنهما مستقلان. وبدلا من ذلك فإن التغاير المساوي للصفر يوحي، فقط، بأن المتغيرين لاتجمع بينهما علاقة خطية.

مقدر التغاير

عملياً، لايمكن أن نعرف، عموما، قيمة $\sigma_{X,Y}$. وفي العادة، يتوافر لدينا، فقط، عينة عشوائية من القيم المشاهدة لكل من X و Y. وكما سبق، قد يتوافر لدينا، على سبيل المثال، الطول والوزن لعدد معين، n، من الأفراد اختيروا عشوائيا. وفي مثل هذه الحال، نقول إن لدينا عينة حجمها n عن L و H. وافترض الآن أن لدينا عينة حجمها n عن X و Y. وما نحتاجه هو طريقة ما لتقدير قيمة $\sigma_{X,Y}$ من هذه العينة من المشاهدات. وحيث إن $\sigma_{X,Y}$ تعرف بأنها القيمة المتوقعة لحاصل ضرب انحرافات المتغيرين عن وسطيهما الحسابيين $E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$ فإن الطريقة الواضحة لتقدير $\sigma_{X,Y}$ هي حساب متوسط حاصل ضرب انحرافات X و Y عن وسطيهما الحسابيين بالعينة. وبأسلوب رياضي، افترض أن القيم *المشاهدة* n لكل من X و Y بالعينة هي $X_1,\ldots, X_n$ و* $Y_1,\ldots, Y_n$ ومن ثم فإن مقدر التغاير بين X و Y هو :

$$\hat{\sigma}_{X,Y} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)\left(Y_t-\overline{Y}\right)}{n-1} \tag{2.3}$$

حيث :

* فعلى سبيل المثال X_5 هي القيمة المشاهدة الخامسة للمتغير X. وفي مثالنا الأسبق حيث H هي طول الشخص، L هي وزنه، فإن H_5 هي طول الشخص الخامس المشاهد، L_5 هي وزن الشخص نفسه.

$$\overline{X}=\frac{\sum_{t=1}^{n}X_t}{n} \text{ و } \overline{Y}=\frac{\sum_{t=1}^{n}Y_t}{n}$$

وسنوضح، لاحقا، لماذا تقسم المعادلة (2.3) على (n-1) بدلا من n. وعند هذه النقطة، على أي حال، نلاحظ أنه، طالما $(X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})$ هو حاصل ضرب الانحرافات رقم t بالعينة، فإن $\hat{\sigma}_{X,Y}$ ببساطة هو متوسط حواصل الضرب.*

ولعله من المفيد أن نتوقف قليلا عند هذه النقطة ونوضح المقصود بالرموز المستخدمة. ففي هذا الكتاب سوف نستخدم العلامة ^ فوق متغير أو معلمة لنشير إلى «مقدر»، ومن ثم فإن $\hat{\sigma}_{X,Y}$ هي مقدر $\sigma_{X,Y}$، ويدل الجانب الأيمن من المعادلة (2.3) أن $\hat{\sigma}_{X,Y}$ مبني على أساس مجموع حاصل ضرب $(X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})$ لكل العينة t=1,...,n. ولتبسيط الرموز، فمن الآن وصاعدا لن نتكبد جهد كتابة $\sum_{t=1}^{n}$ ولكن نستخدم ببساطة Σ لتدل على أن عملية الجمع شاملة لجميع مشاهدات العينة، مالم نشر إلى غير ذلك.

عدم تحيز $\hat{\sigma}_{X,Y}$

لقد عرفنا أن $\hat{\sigma}_{X,Y}$ هو مقدر التغاير بين X وY، علاوة على ذلك يمكن توضيح أن $E[\hat{\sigma}_{X,Y}]=\sigma_{X,Y}$، أي أن $\hat{\sigma}_{X,Y}$ مقدر غير متحيز لـ $\sigma_{X,Y}$، والفكرة هنا هي طالما أن $\hat{\sigma}_{X,Y}$ مستخرج من عينة عشوائية للمتغيرين X و Y، فإنه يعتبر هو نفسه متغيرا عشوائيا تتغير قيمته من عينة لأخرى. فعلى سبيل المثال، لو أن الوزن والطول لعدد ٣٠ شخصا (اختيروا عشوائيا) يعتمدان على الأشخاص المعنيين الذين اختيروا، فإن قيمة مقدر التغاير بين L و H سوف تعتمد أيضا على من

---

* لو أن الشخص الخامس المشاهد في عينتنا كان أطول بمقدار ٣ بوصات وأثقل في الوزن بمقدار ١٥ رطلا عن متوسطي العينة للأطوال والأوزان على التوالي، عندئذ، $(H_5-\overline{H})(L_5-\overline{L})=45$. والمقدر $\hat{\sigma}_{H,L}$ لتغاير L و H هو، ببساطة، متوسط حاصل الضرب للإنحرافين السابقين لكل قيم العينة.

اختيروا. ويتبع ذلك أن قيمة هذا المقدر سوف تتغير من عينة لأخرى. وبتعبير أدق فإن للمقدر دالة احتمال تسمى *توزيع المعاينة* Sampling distribution. وتوحي النتيجة المشار إليها سابقا وهي $E[\hat{\sigma}_{X,Y}] = \sigma_{X,Y}$ أن متوسط توزيع المعاينة الخاص بالمقدر هو قيمة المعلمة $\sigma_{X,Y}$.

وعلى الرغم من أن اثباتا رياضيا يعد خارج مجال هذا الكتاب، فإن مثالا قد يوضح بيديهية أكثر ماذا نعني بقولنا أن $\hat{\sigma}_{X,Y}$ مقدر غير متحيز لـ $\sigma_{X,Y}$.* ولتفصيل القول السابق، افترض أننا أخذنا عدد M من العينات تتكون كل واحدة منها من ٣٠ فردًا، ثم قسنا الوزن L والطول H لأفراد كل عينة. وعندئذ، يمكننا حساب $\hat{\sigma}_{L,H}$ لكل عينة بحيث يتوافر لدينا عدد M من القيم المقدرة للتغاير بين L, H. ويلاحظ أن قيم $\hat{\sigma}_{L,H}$ المتعددة سوف تكون عموما مختلفة. وعلى وجه التحديد فإننا نتوقع أن تكون بعض قيمنا المقدرة أكبر من $\sigma_{L,H}$، وبعضها أقل. والآن تذكر أن القيمة المتوقعة لـ $\hat{\sigma}_{L,H}$ هي $\sigma_{L,H}$. وهذا يتضمن أننا لو أخذنا *متوسط* للعدد M من القيم المقدرة، فإننا نتوقع أن تكون قيمة هذا المتوسط هي قيمة المعلمة $\sigma_{L,H}$، وبصورة رياضية أكثر، افترض أن $\hat{\sigma}_{L,H}$ هي هذا المتوسط:

$$\bar{\hat{\sigma}}_{L,H} = \sum_{i=1}^{M} \frac{\hat{\sigma}_{L,H_i}}{M}, \tag{2.4}$$

حيث إن $\hat{\sigma}_{L,H_i}$ هي مقدر $\sigma_{L,H}$ للعينة i. ومن ثم فإن $E\left(\bar{\hat{\sigma}}_{L,H}\right) = \sigma_{L,H}$، بالإضافة إلى ذلك فإنه يمكن توضيح أنه تحت شروط عامة - لو كان العدد M من العينات لانهائيا فإن احتمال أن يختلف $\bar{\hat{\sigma}}_{L,H}$ عن $\sigma_{L,H}$ بأي مقدار مهما كان صغيرًا سوف يساوي الصفر.

---

* الأمثلة التالية ليست «تعريفات بديهية» لمفهوم عدم التحيز، وإنما هي عروض بديهية لبعض النتائج التي يتضمنها عدم التحيز تحت شروط عامة.

وتفسر هذه النتيجة مباشرة، إذ في الواقع، عادة، مايكون لدينا عينة واحدة، وعلى أساس هذه العينة، نحسب قيمة مقدرة للتغاير باستخدام الصيغة العامة المعطاة في (2.3). ولو أن هذه العينة قد اختيرت عشوائيا فإنها يمكن أن تكون أي واحدة من عدد لانهائي للعينات (مثلاً، أي واحدة من العينات M). وعلى الرغم من ذلك، فإنه، بسبب النتيجة الوسيطة التي حصلنا عليها سابقا، فلايوجد سبب يدعو للاعتقاد بأن القيمة المقدرة من العينة المختارة سوف تفوق أو تقل عن القيمة المقابلة لمعلمة التغاير. وفي المقابل، لو أن $E\left(\hat{\sigma}_{X,Y}\right)=\sigma_{X,Y}+5$ فإننا نتوقع أن تكون القيمة المحسوبة أعلى من $\sigma_{X,Y}$. ويمكن أخذ هذا التحيز بالاعتبار بأخذ $\left(\hat{\sigma}_{X,Y}-5\right)$ كمقدر لـ $\sigma_{X,Y}$.

قد يكون هناك نوع من اللبس لدى القارئ لكون مقام المعادلة (2.3) هو (n-1) بدلا من حجم العينة بالكامل n. فعادة، عند حساب متوسط ما، فإننا نقسم مجموع القيم على عددها. وفي هذه الحال، بالرغم من وجود عدد n من الحدود الممثلة في مجموع البسط، فإن هذه الحدود n يمكن *تخفيضها* إلى (n-1) حد لها المجموع نفسه. وبمعنى آخر، هناك (n-1) معلومة فقط. والسبب في ذلك هو أن كلا من $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ متوسطي العينة يظهران في البسط مع القيم المشاهدة للمتغيرين XوY. وبديهيًا حتى نكوّن الحدود الـ (n-1) الأولى في (2.3) فلابد من معرفة : $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$ و $Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}$ بالإضافة إلى $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ حيث إن :

$$\overline{X}=\frac{\sum\left(Y_1+\cdots+X_n\right)}{n} \quad \text{و} \quad \overline{Y}=\frac{\sum\left(Y_1+\cdots+X_n\right)}{n}$$

وبهذه المعلومات، يمكننا تحديد قيمتي كل من X_n و Y_n . وفي ظل هذه الظروف، فإن الحد الأخير في (2.3) أي $(X_n-\overline{X})(Y_n-\overline{Y})$ لايتضمن أية معلومات جديدة. ونتيجة لذلك، فنحن نعرف مسبقا أو يمكننا أن نحسب قيمة الحد الأخير في المجموع من المعلومات التي يحتوى عليها العدد (n-1) الأول من الحدود. ويوصف هذا الشرط، غالبا، بالقول إن البسط في (2.3) له (n-1) درجات *حرية* بما

معناه أن هنالك (n-1) معلومة مستقلة فقط. وحيث إن البسط لـه (n-1) درجات حرية، فقط، يمكن إثبات أن:

$$E\left[\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)\left(Y_t-\overline{Y}\right)\right]=(n-1)\sigma_{X,Y} \qquad (2.5)$$

ونتيجة لذلك، فإن القسمة على (n-1) تجعل $\hat{\sigma}_{X,Y}$ مقدرا غير متحيز لـ $\sigma_{X,Y}$.

اتساق $\hat{\sigma}_{X,Y}$

من المفيد هنا، وللتحليل فيما بعد، أن نتبين خصائص $\hat{\sigma}_{X,Y}$ في حالة العينة الكبيرة. ونقصد بذلك سلوك $\hat{\sigma}_{X,Y}$ عندما يكبر حجم العينة إلى مالانهاية. ولتوضيح ذلك، دعنا نأخذ، مثلا، متوسط العينة $\overline{X}$ لعدد من قيم X التي اختيرت عشوائياً. ونعلم من مبادئ الإحصاء أن متوسط $\overline{X}$ هو μ_X وأن تباين X هو σ_X^2 / n حيث μ_X وσ_X^2 يشيران إلى متوسط المتغير العشوائي X وتباينه على التوالي، كما تشير n إلى حجم العينة. وإذا زاد حجم العينة n باستمرار، نرى أن تباين $\overline{X}$ أي σ_X^2 / n يصبح، دائما أقل، ويؤول إلى الصفر عندما تزداد n إلى مالانهاية. والفكرة هنا هي أنه كلما أصبح حجم العينة أكبر فإن احتمال وقوع متوسط العينة $\overline{X}$ داخل مدى محدد من متوسط المجتمع μ_X يزداد باستمرار. وعندما يصبح حجم العينة لانهائيا فإن تباين $\overline{X}$ يصبح مساويا الصفر وبالتالي فإن احتمال أن يساوي $\overline{X}$ أي شئ آخر غير μ_X يصبح صفرًا ، ولهذا السبب تعد $\overline{X}$ مقدرا *متسقا* لـ μ_X..

عموما، (كما هو موضح في الملحق B للفصل الأول) تعني خاصية الاتساق، أنه، في حالة كون حجم العينة لانهائيا، فإن احتمال أن يأخذ المقدر قيمة تختلف بأي مقدار عن المعلمة المقابلة يساوي صفرا، فلو أن مقدرًا (مثل $\overline{X}$) يتصف بالاتساق فإن هذا المقدر يقال عنه إنه يتقارب في الاحتمال لمعلمته المقابلة (μ_X).

ومن السهل أن نرى، في الأقل، بديهيًا، أنه في حالة المعادلة (2.3) فإن $\hat{\sigma}_{X,Y}$ مقدر متسق لـــ $\sigma_{X,Y}$. فعندما يصبح حجم العينة لانهائيًا فإن $\overline{X}$ و $\overline{Y}$

تتقاربان في الاحتمال للمعلمتين μ_X و μ_Y على التوالي. ولهذا، فإن $\hat{\sigma}_{X,Y}$ يصبح متوسط العينة للقيم $(X - \mu_X)\ (Y - \mu_Y)$ المشاهدة في عينة ذات حجم لانهائي. وحيث إن $E\,(X - \mu_X)\ (Y - \mu_Y) = \sigma_{X,Y}$ فيتضح أنه، تحت شروط عامة، إذا كانت العينة ذات حجم لانهائي فإن :

$$\hat{\sigma}_{X,Y} = \sigma_{X,Y}$$

وذلك باحتمال يساوي الواحد الصحيح.*

تفسير لـ $\hat{\sigma}_{X,Y}$

دعنا الآن نفسر $\hat{\sigma}_{X,Y}$ بدلالة شكل الانتشار (٢-٣)، لقد اوضحنا متوسطي العينة للقيم المشاهدة Y, X بالخطوط المنقطة، كما استخدمت هذه الخطوط لتقسيم الشكل رقم (٢-٣) إلى أربعة أقسام :

في القسم الأول: $\left(Y-\bar{Y}\right)>0,$ و $\left(X-\bar{X}\right)>0$

وعليه، فإن $\left(X-\bar{X}\right)\left(Y-\bar{Y}\right)>0.$

في القسم الثاني: $\left(Y-\bar{Y}\right)<0,$ و $\left(X-\bar{X}\right)>0$

وعليه فإن $\left(X-\bar{X}\right)\left(Y-\bar{Y}\right)<0.$

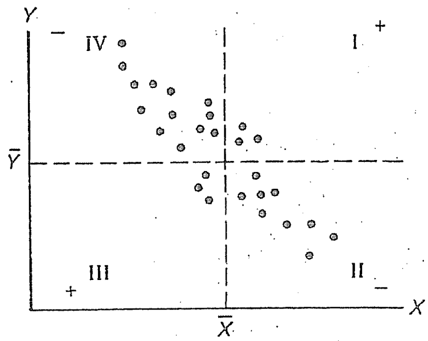
في القسم الثالث: $\left(Y-\bar{Y}\right)<0,$ و $\left(X-\bar{X}\right)<0$

وعليه فإن $\left(X-\bar{X}\right)\left(Y-\bar{Y}\right)>0.$

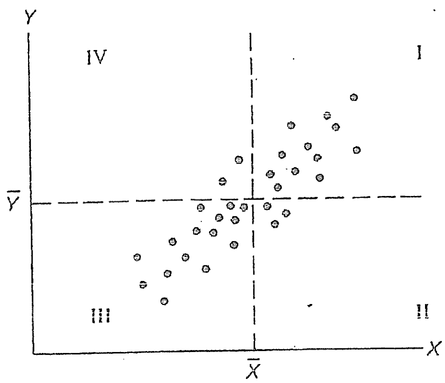
في القسم الرابع: $\left(Y-\bar{Y}\right)>0,$ و $\left(X-\bar{X}\right)<0$

وعليه فإن $\left(X-\bar{X}\right)\left(Y-\bar{Y}\right)<0.$

* ملحوظة للقراء الأكثر دراية بالإحصاء يوجد هناك أشكال أخرى للتقارب بالإضافة إلى خاصية الاتساق التي ناقشناها في الملحق B في الفصل الأول، وأحد هذه الأشكال يسمى «بالتقارب مع احتمال 1». ونحن لانشير لهذا الشكل من التقارب بعبارتنا السابقة، ولكن بدلا من ذلك نحاول تبسيط الفكرة وجعل المادة بديهية، ولذا نصف $\lim_{n\to\infty} \text{prob}\left(\left|\hat{\sigma}_{X,Y} - \sigma_{X,Y}\right| > \varepsilon\right) = 0$. ولفظيا "إذا كان حجم العينة لانهائيا فإن $\hat{\sigma}_{X,Y}$ سوف تساوي $\sigma_{X,Y}$ باحتمال1" .



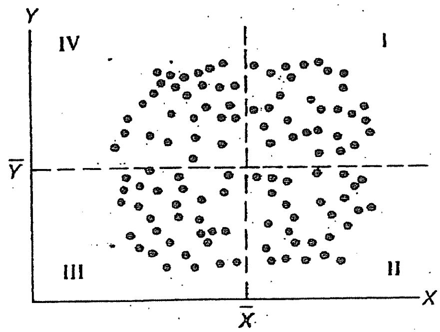
شكل رقم (٢-٣)



شكل رقم (٢-٤)

وتشير المشاهدات في الشكل (٢-٣) إلى وجود علاقة عكسية بين المتغيرين، ويتخذ هذا شكلا تتركز فيه النقاط بالقسمين الثاني والرابع مع عدد قليل نسبيا من المشاهدات تقع في القسمين الأول والثالث. وحيث إن $(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})$ سالبة في القسمين الثاني والرابع وموجبة في القسمين الأ ل والثالث فمن المتوقع أن تكون $\hat{\sigma}_{X,Y}$ سالبة في هذه الحالة. وبمعنى آخر فإن متوسط حاصل ضرب الانحرافات $(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})$ سوف يكون سالبا. ومن ناحية أخرى، لو أن شكل الانتشار اظهر تركزا في القسمين الأول والثالث كما في الشكل (٢-٤) فمن المتوقع أن تكون $\hat{\sigma}_{X,Y}$ موجبة بالطريقة نفسها.

دعنا نأخذ الآن الحالة التي يكون فيها X وY *مستقلين*، حيث لايوجد هناك اقتران بينهما، فقيمة عالية للمتغير Y يكون احتمال اقترانها بقيمة عالية للمتغير X هو نفسه احتمال اقترانها بقيمة منخفضة للمتغيرنفسه. وفي مثل هذه الحال، لايتوقع أن يظهر شكل الانتشار بين X وY اتجاها تصاعديا أو تنازليا. ويوضح الشكل (٢-٥) مثل هذه العلاقة، ففيه، نرى النقاط تتوزع بالتساوي تقريبا بين الأقسام الأربعة. ونتيجة لذلك، فإن القيم الموجبة لـ $(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})$ الناجمة عن نقاط الانتشار بالقسمين الأول والثالث تلغي القيم السالبة المتولدة عن نقاط الانتشار بالقسمين الثاني والرابع ومن ثم، فإن القيمة المحسوبة لـ $\hat{\sigma}_{X,Y}$ تميل لأن تكون قريبة من الصفر.



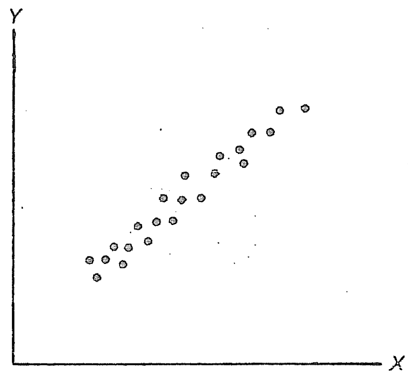
شكل (٢-٥)

معامل الارتباط Correlation coefficient

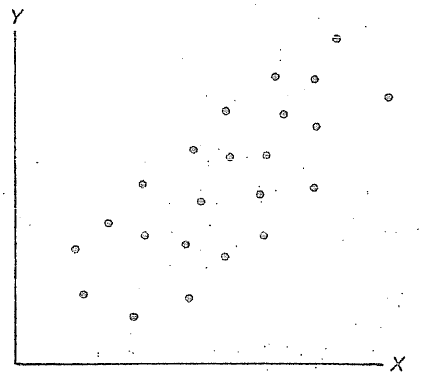
بالإضافة إلى معرفة ما إذا كان متغيران ما تجمعهما علاقة طردية أم عكسية نريد بوجه عام مؤشرا عن *مدى قوة* هذه العلاقة. والشكلان رقما (٢-٦)، (٢-٧) يقدمان على سبيل المثال حالتين للعلاقة الطردية بين X و Y وعلى الرغم من ذلك، فإن الاقتران الطردي في الشكل الأسبق أقوى، إلى حد ما، منه بالشكل الذي يليه. وبتحديد أكثر، يمكننا أن نرى أنه، بمعرفة قيمة X فحسب فإن التباين في Y بالشكل (٢-٦) أصغر نسبيا منه مقارنة بالشكل (٢-٧)*، ومن ثم فإن من

* يمكن للقارئ الأكثر معرفة اثبات أنه، في ظل تحقق شروط معينة، فإن تباين Y المشروط بمعرفة X، يتغير عكسيا مع مربع معامل الارتباط.

المرغوب فيه أن يكون لدينا مقياس لهذه الخاصية للعلاقة بين X و Y . ولسوء الحظ، فإن مقياس التغاير غير مناسب لتوضيح مدى قوة الاقتران لأن قيمته تعتمد على وحدات القياس المعينة للمتغيرات، فعلى سبيل المثال، سوف يكون التغاير بين الطول والوزن أكبر لو أننا استخدمنا البوصة والأوقية في القياس بدلا من القدم والرطل.*



الشكل (٢-٦)



الشكل (٢-٧)

* افترض، على سبيل المثال، أن وحدة القياس هي $Z = aX$ بدلا من X حيث a ثابت، ومن ثم سوف يكون لدينا $E(Z-\mu_Z)(Y-\mu_Y) = E(aX - a\mu_X)(Y-\mu_Y) = aE(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) = a\sigma_{X,Y}$ ومن ثم، $\sigma_{Z,Y} \# \sigma_{X,Y}$.

ولكي نحصل على قياس ذي معنى لقوة الاقتران بين متغيرين، فنحن في حاجة إلى معلمة تكون مستقلة القيمة عن وحدات القياس. ويمكن اشتقاق هذه المعلمة بقسمة تغاير X وY على الانحرافين المعياريين للمتغيرين. وبدقة، فإن قوة العلاقة بين X وY يمكن توضحهما بمعامل الارتباط $\rho_{X,Y}$:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{2.6}$$

حيث σ_Y, σ_X هما الإنحرافان المعياريان لكل من Y, X .

$$\sigma_X = +\sqrt{E\left(X-\mu_X\right)^2} \text{ و } \sigma_Y = +\sqrt{E\left(Y-\mu_Y\right)^2}$$

نعود الآن إلى خصائص معامل الارتباط*. لاحظ أولا أنه يأخذ دائما إشارة التغاير نفسها، فطالما أن مقام المعادلة (2.6) موجب دائما فإنه يتبع ذلك أن إشارة $\rho_{X,Y}$ سوف تكون هي نفسها إشارة البسط والذي هو التغاير بين المتغيرين. ومن ثم لو أن Y, X مرتبطان طرديا فإنه يتبع ذلك أن تكون$\rho_{X,Y} > 0$ ، ولو أنهما مرتبطان عكسيا فإن$\rho_{X,Y} < 0$. وفي هذه الحالة التي يكون فيها XوY مستقلان فإن $\rho_{X,Y} = 0$ طالما أن $\sigma_{X,Y} = 0$، ومن ثم، فإن لمعامل الارتباط جميع خصائص التغاير من حيث توضيحه نوع العلاقة التي توجد بين المتغيرين.

ولكن، على العكس من التغاير فإن معامل الارتباط يوجد له مدى تتقلب قيمه بين حديه. وبتحديد أكثر فإن قيمة $\rho_{X,Y}$ لابد أن تقع عند ناقص أو زائد واحد أو بينهما. إضافة إلى ذلك، كلما اقتربت$\rho_{X,Y}$ من الواحد في أي اتجاه كلما أصبح الارتباط الخطي أقوى بين المتغيرين (إما طرديا أو عكسيا)، وكلما اقتربت $\rho_{X,Y}$ من الصفر كلما كانت العلاقة أضعف. وتمثل $\rho_{X,Y} = 0$ حالة عدم وجود أي ارتباط بين المتغيرين. وبالنسبة للشكلين رقمهما(٢-٦) و(٢-٧) على سبيل المثال،

* ولو أننا غيرنا وحدة القياس كما هو في الحاشية السابقة باستخدام Z=aX بدلا من X فإن معلمتنا $\rho_{X,Y}$ (على عكس $\rho_{X,Y}$) لن تتأثر. أي أن، $\rho_{Z,Y} = \rho_{X,Y}$ ونحن نترك إثبات ذلك تمرينا للقارئ.

فإنه من المتوقع أن يكون معامل الارتباط في حالة الشكل رقم (٢-٦) أكبر منه في حالة الشكل رقم (٢-٧)، وفي كلتا الحالتين فإنه موجب بالطبع.

والآن نثبت أنه إذا كانت X و Y *مرتبطتين ارتباطا تاما* وخطيا فإن $\rho_{X,Y}$ سوف تكون قيمته إما زائد واحد أو ناقص واحد، ولنرى ذلك*، دعنا نأخذ العلاقة التامة التالية:

$$Y = a + bX \tag{2.7}$$

وفي هذا المثال فإن نقاط شكل الانتشار سوف تقع جميعها على خط مستقيم ميله b وقاطعه a، ومعامل الارتباط بين X و Y هو:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

وسوف نثبت الآن أن $\rho_{X,Y} = +1$ إذا كانت $b > 0$ وذلك بالتعبير عن كل من $\sigma_Y, \sigma_{X,Y}$ بدلالة σ_X ونشتق أولا μ_Y:

$$E(Y) = E(a + bX) = a + bE(X) = a + b\mu_X = \mu_Y \tag{2.8}$$

ولذا فإن التغاير:

$$\begin{aligned} \sigma_{X,Y} &= E\big[(Y - \mu_Y)(X - \mu_X)\big] \\ &= E\big[(a + bX - a - b\mu_x)(X - \mu_x)\big] \\ &= E\Big[b(X - \mu_x)^2\Big] = b\sigma_x^2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

وبالتعريف فإن تباين Y هو:

$$\sigma_Y^2 = E\left[\left(Y - \mu_Y\right)^2\right] \tag{2.10}$$

* المثال التالي يوضح أن $\rho_{X,Y}$ تساوي زائد واحد أو ناقص واحد لو أن X و Y مرتبطان ارتباطا تاما وخطيا. ولسوء الحظ، فإن إثبات $\rho_{X,Y}$ أن لايمكن أن يفوق القيمة المطلقة للواحد تحت أي ظرف يقع خارج مجال هذا الكتاب (بالرغم من أنه قد يبدو معقولا بديهيا).

ويمكن التعبير عن هذا التباين كمايلي:

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= E\left[\left(Y-\mu_Y\right)^2\right] = E\left[\left(a+bX-a-b\mu_X\right)^2\right] \\ &= E\left[b^2\left(X-\mu_X\right)^2\right] = b^2\sigma_X^2\end{aligned} \tag{2.11}$$

والانحراف المعياري للمتغير Y هو الجذر التربيعي الموجب $\sigma_Y = b\sigma_X$، ويمكن الآن تحديد معامل الارتباط:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{b\sigma_X^2}{\left(b\sigma_X\right)\sigma_X} \tag{2.12}$$

وسوف نترك للقارئ أن يثبت أنه إذا كانت $b < 0$ فإن $\rho_{X,Y} = -1$. (ملحوظة: إذا كانت $b < 0$، $\sigma_Y = -b\sigma_X > 0$).

وباختصار، فإن معامل الارتباط يوضح كلا من اشارة العلاقة الخطية وقوتها بين متغيرين. والقيم الموجبة والسالبة لـــ $\rho_{X,Y}$ توضح العلاقات الطردية والعكسية على التوالي، وكلما اقتـرب $\rho_{X,Y}$ من زائد واحد أو ناقص واحد كلما زادت قوة العلاقة الخطية، أي كلما زادت قوة الارتباط بين المتغيرين. ولقد رأينا أيضا أنـه إذا كان هناك متغيران مستقلان فإن التغاير، ومن ثم معامل الارتباط يكون صفرا. ودعنا الآن نثبت أن العكس ليس صحيحا، أي أن متغيرين قد يكونا مرتبطين إرتباطا غير خطية، وعلى الرغم من ذلك، فإن قيمة معامل الارتباط بينهما قد تساوي صفرًا. ونعيد التأكيد هنا على أن معامل الارتباط هو مقياس للعلاقة الخطية بين متغيرين.

جدول (٢-١)

X	$\rho(X)$
-1	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$

فعلى سبيل المثال، افترض أن X متغير عشوائي وأن $Y = X^2$، عندئذ يصبح من الواضح أن X وY مر تبطان ارتباطا تاما، حيث إن معرفة قيمة X تمكننا من التنبؤ تماما بقيمة Y. وافترض الآن أن الدالة الاحتمالية للمتغير X موضحة بالجدول (٢-١)، أي أن X تأخذ القيم 1+ ,0 ,1- بالاحتمال نفسه، دعنا الآن نحدد التغاير بين X وY:

$$\sigma_{X,Y} = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

ومن الجدول (٢-١)، نرى أن$\mu_X = 0$، ومن ثم، فإن المعادلة الخاصة بـ $\sigma_{X,Y}$ تصبح:

$$\sigma_{X,Y} = E\left[X(Y-\mu_Y)\right] = E(XY) - E(X\mu_Y) \quad (2.13)$$

والآن $Y = X^2$ افتراضا، فإن:

$$\sigma_{X,Y} = E\left(X^3\right) - \mu_Y E(X) = E\left(X^3\right) \quad (2.14)$$

حيث $E(X) = 0$. ولايجاد $E(X^3)$، فنحن نلاحظ أن X^3 تأخذ القيم نفسها و احتمالات الحدوث الخاصة بـ X في الجدول رقم (٢-١). ومن ثم، يكون لدينا:

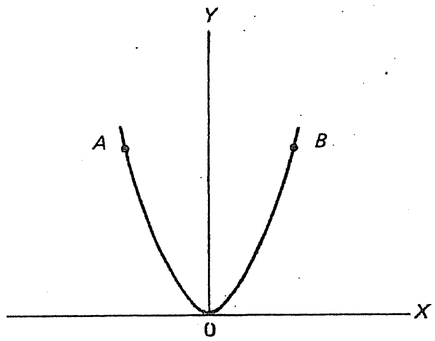
$$E\left(X^3\right) = -1\left(\tfrac{1}{3}\right) + 0\left(\tfrac{1}{3}\right) + 1\left(\tfrac{1}{3}\right) = 0 \quad (2.15)$$

ولذا، فإن $\sigma_{X,Y}$ = صفرًا، ويتبع هذا أن تكون $\rho_{X,Y}$ مساوية الصفر ايضا.

ولنرى، بديهيا، مايحدث دعنا نأخذ الحالة الأكثر عمومية حيث$Y = X^2$، ولكن X تأخذ كل القيم الممكنة بشرط أن تكون دالتها الاحتمالية متماثلة حول الصفر. ويعني الجزء الأخير من الجملة أن احتمال أن تقع قيمة X بين أي رقمين موجبين وليكونا 5 ,10 هو نفسه احتمال أن تقع بين الرقمين السالبين المقابلين ,10- و 5-، ومع $Y = X^2$ يكون لدينا معادلة قطع مكافيء تتماس مع محور X عند نقطة الأصل كما هو موضح في شكل (٢-٨).

وقد يكون من الواضح الآن من الشكل (٢-٨) السبب الذي يجعل الارتباط بين متغيرين مثل X وY صفرًا. بالطبع فإن كل المشاهدات عن X وY تقع على القطع المكافئ لأن $Y = X^2$ ولأن الدالة الاحتمالية لـ X متماثلة حول الصفر، فإنه

لكل حدث مثل A يوجد هناك حدث مقابل له مثـل B يمكن أن يقع بالاحتمـال نفسه. ونتيجة لذلك، فإن الارتباط الطردي بين X وY عندما تأخذ X قيما موجبة سوف يلغي الارتباط السلبي بينهما عندمـا تـأخـذ X قيما سالبة. ولهذا، فـإن الارتباط ككل بين X وY سوف يكون صفرا.



الشكل (٢-٨)

وفي مثل هذه الظروف توجد حالات بها ارتباط تام بين X وY ، وعلى الرغم من ذلك فإن معامل الارتباط بينهما مساوي للصفر. وقبل ذلك، أوضحـنـا أن $\rho_{X,Y}=0$ عندما يكون X وY مستقلين. ونؤكد هنا أن $\rho_{X,Y}=0$ هو شرط ضروري وليس كافيا لأن يكون متغيران ما مستقلين. وبمعنى آخر إذا كـانـت $\rho_{X,Y}=0$ فإن X وY قد لايكونان بالضرورة، مستقلين. ولكـن لـو أن X وY مستقلان فـإن $\rho_{X,Y}=0$ بالضرورة. وكـل مايعنيه هذا من وجهة نظر التحليل القياسي (كما سوف نناقش فيما بعد) هو لو أن هناك ارتباطا ضعيفا بين متغيرين فلابد أن نستبقي امكانية وجود علاقة غير خطية بينهما.

مقدر معامل الارتباط

كما هو الأمر في حالة التغاير، فإننا لانعرف بوجه عام معامل ارتباط المجتمع $\rho_{X,Y}$ وسوف تظهر لدينا مرة أخرى مشكلة تقدير. والمقدر البارز لـ $\rho_{X,Y}$ هـو*:

* في بعض الكتب يستخدم الرمز r بدلا من الرمز ρ ، ولكننا نفضل استخدام $\hat{\rho}$ لنؤكد على أنه مقدر لـ ρ .

$$\hat{\rho}_{X,Y} = \frac{\hat{\sigma}_{X,Y}}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y} \tag{2.16}$$

حيث إن $\hat{\sigma}_X$ و $\hat{\sigma}_Y$ هما المقدران المعتادان للإنحرافين المعياريين لكل من X وY :

$$\hat{\sigma}_X = +\sqrt{\frac{\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2}{n-1}} \text{ و } \hat{\sigma}_Y = +\sqrt{\frac{\Sigma\left(Y_t - \overline{Y}\right)^2}{n-1}} \tag{2.17}$$

والآن دعنا نتعرف على خصائص $\hat{\rho}_{X,Y}$ في حالة العينة الكبيرة. فلقد لاحظنا سابقا أنه كلما اقتربت n من مالانهاية كلما تقاربت $\overline{X}$, $\overline{Y}$ في الاحتمال μ_X و μ_Y على التوالي. وكنتيجة لذلك فإن $\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2 / n-1$ تصبح هي متوسط الانحرافات المربعة للمتغير X عن وسطه الحسابي بناءً على بيانات عينة لانهائية الحجم. ومن ثم فإنها تتقارب في الاحتمال من تباين X والذي يرمز له بـσ_X^2 . ويتبع هذا أن $\hat{\sigma}_Y$ تتقارب في الاحتمال من σ_X (وكذلك الأمر بالنسبة لـ $\hat{\sigma}_Y$). وطالما أن $\hat{\sigma}_{X,Y}$ تتقارب في الوقت نفسه من$\sigma_{X,Y}$، نرى في الأقل، بديهيا أن $\hat{\rho}_{X,Y}$ مقدر متسق لـ$\rho_{X,Y}$.

وعلى العكس من $\hat{\sigma}_{X,Y}$ ، فإن $\hat{\rho}_{X,Y}$ ليس مقدر غير متحيزعموماً. أي أن:

$$E\left(\hat{\rho}_{X,Y}\right) \neq \rho_{X,Y} \tag{2.18}$$

والسبب في هذا هو أن $\hat{\rho}_{X,Y}$ مشتق على أساس دالة غير خطية للمتغيرات $\hat{\sigma}_{X,Y}$ ، $\hat{\sigma}_X^2$ ، $\hat{\sigma}_Y^2$. وعلى وجه التحديد، فإن:

$$\hat{\rho}_{X,Y} = \frac{\hat{\rho}_{X,Y}}{\sqrt{\hat{\sigma}_x^2}\sqrt{\hat{\sigma}_y^2}} \tag{2.19}$$

والآن يمكن إثبات أن $E\left(\hat{\sigma}_X^2\right) = \sigma_X^2$ و $E\left(\hat{\sigma}_Y^2\right) = \sigma_Y^2$. ولكن بتتبع مناقشتنا للدوال غير الخطية في الملحق B للفصل الأول، فإننا نجد أن*

* المناقشة التالية ليست إثباتا رياضيا ولكنها توضح، ببساطة، أن $\hat{\rho}_{X,Y}$ متحيز.

$$E\left(\hat{\rho}_{X,Y}\right)=E\left(\frac{\hat{\sigma}_{X,Y}}{\sqrt{\hat{\sigma}_X^2}\sqrt{\hat{\sigma}_Y^2}}\right)$$
$$\neq\frac{E\left(\hat{\sigma}_{X,Y}\right)}{\sqrt{E\left(\hat{\sigma}_X^2\right)}\sqrt{E\left(\hat{\sigma}_Y^2\right)}}=\frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y}=\rho_{X,Y} \tag{2.20}$$

وباختصار فإن $\hat{\rho}_{X,Y}$ مقدر متحيز لـ $\rho_{X,Y}$ ولكنه متسق. وهذا يعني أن التحيز يمكن اعتباره غير مهم إذا كان حجم العينة كبيرا، لأن خاصية الاتساق تؤكد لنا أن هناك احتمالا كبيرا بأن تكون $\hat{\rho}_{X,Y}$ قريبة من $\rho_{X,Y}$. وكما سوف نرى فيما بعد فإن مشكلة المقدرات المتحيزة والمتسقة سوف تظهر باستمرار في نماذج التقدير القياسية.

ملاحظة حول درجات الحرية

يتعين الإشارة إلى أن مقامي المقدرين $\hat{\sigma}_X^2$ ، $\hat{\sigma}_Y^2$ المعرفين بالمعادلة (2.17) يعرفان بدرجات الحرية، كما هو الحال في $\hat{\rho}_{X,Y}$ ، أي أنه، وكما في السابق، فعلى الرغم من وجود n في المجموعتين المقابلين لـ $\hat{\sigma}_X^2$ ، $\hat{\sigma}_Y^2$ ، فإنه يوجد (n-1) معلومة مستقلة، فقط. وهذا يمكن رؤيته بديهيا للمتغير X بملاحظة مايلي:

$$\sum_{t=1}^{n}\left(X_t-\overline{X}\right)=0$$

وعليه، فإن

$$\left(X_n-\overline{X}\right)=-\left(X_1-\overline{X}\right)-\cdots-\left(X_{n-1}-\overline{X}\right)$$

وبمعنى آخر، فإن الحد الأخير من المجموع يعتمد، تماما، على الـ (n-1) حد الأولى ومن، ثم فهو لايحتوي على أية معلومات جديدة. ولقد تصادف أن تكون القسمة على درجات الحرية (وليس على عدد المشاهدات) هي الإجراء المعروف للحصول على مقدر غير متحيز لتباين متغير ما.

ولحسن الحظ، فإنه، لأغراض التعميم يمكن الحصول على درجات الحرية لمقدر التباين (من النوع المستخدم في هذا الكتاب) باستخدام قاعدة بسيطة. فعلى وجه التحديد، تساوي درجات الحرية لمثل هذا المقدر (n-k) حيث n هي حجم العينة و k هي عدد المعلمات التي لابد من تقديرها لتحديد قيمة بسط المقدر. وعلى سبيل المثال، فإن مقدر التباين $\hat{\sigma}_X^2$ يوجد $\overline{X}$ في بسط معادلته لأن μ_X غير معروفة. وفي هذه الحالة، k=1، ولو أن μ_X كانت معروفة لأمكن تقدير تباين X باستخدام المعادلة التالية:

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\left(X_t-\mu_X\right)^2}{n}$$

كلمة تحذير

قبل أن نبدأ في شرح نموذج الانحدار الخطي، فإن هناك كلمة تحذير يتعين قولها بشأن تفسير معامل الارتباط. ويلاحظ أننا كنا بصدد قياس درجة الاقتران الإحصائي بين متغيرين. ولم نقل شيئا عن أي علاقة سببية بينهما. وفي حقيقة الأمر، من الممكن أن يوجد هناك ارتباط قوي بين متغيرين دون أن توجد أي علاقة سببية بينهما. فعلى سبيل المثال، من الممكن أن نجد ارتباطا طرديا عبر الزمن بين متوسط المرتب السنوي للمدرسين بالدولار في الولايات المتحدة الأمريكية وبين الناتج الكلي للصلب. وهذا ربما لايعكس أي نوع من التأثير المباشر لأحد المتغيرين على الآخر. ولكنه ببساطة راجع لحقيقة مؤداها أنه، لأسباب كثيرة، فإن كلا المتغيرين كانا يزدادان عبر الزمن في الحجم. ومن ثم فإن وجود ارتباط طردي أو عكسي (حتى ولو كان قويا جدا) لايعني أن هناك علاقة سببية بين المتغيرين.

مثال

على الرغم من أن وجود ارتباط قوي بين متغيرين لايثبت أن هناك أي علاقة سببية بينهما، إلا أن هذا الارتباط قد يمدنا بتأييد عملي ذي قيمة لبعض

العلاقات المفترضة. فعلى سبيل المثال، دعنا نعود إلى ظاهرة من ظواهر التحضر التي يؤكد عديد من المراقبين أنها هي المصدر الرئيسي لمشاكل المدن المركزية. إنها ظاهرة نزوح الأسر متوسطة الدخل والمرتفعة من المدن إلى الضواحي*. والرأي هنا هو أن النزوح من المناطق الحضرية إلى الضواحي قد ترك مراكز المدن مأهولة بما تبقى من الأسر الفقيرة نسبيا، الأمر الذي أثبت أنه مكلف من وجهة النظر المالية، كما أنه ولد تدهورا متزايدا لنوعية الحياة في المدن.

ولكن، هل الدليل الواقعي يؤيد هذا الرأي ؟ ولإلقاء الضوء على هذا فإننا ربما نتساءل عما يمكن أن نتوقعه بشأن النتائج القابلة للمشاهدة والقياس لهذه العملية، ثم نقوم بفحص البيانات الملائمة لتحديد ما إذا كانت، بالفعل، متسقة مع توقعاتنا. فعلى سبيل المثال، يمكننا مقارنة مدن عديدة بالولايات المتحدة لنرى ما إذا كانت هذه المدن التي قطعت فيها ظاهرة النزوح إلى الضواحي شوطا طويلا قد أصبحت في مركز سئ مقارنة بضواحيها. ويعرض جدول (٢-٢) بعض البيانات الخاصة بذلك حصل عليها من عينة مكونة من خمسة عشرة مدينة كبيرة بالولايات المتحدة. وبصورة محددة، دع P_i^c تشير إلى عدد سكان المدينة i، ودع P_i^s تشير إلى عدد سكان منطقة الضواحي المحيطة بالمدينة رقم i. ويوضح الجدول (٢-٢) لكل واحدة من الخمس عشرة مدينة نسبة سكان منطقة الحضر التي تقيم في المدينة نفسها، أي[$(P_i^c + P_i^s) / P_i^c$] 100. ودع، أيضا، Y_i^cوY_i^s تشيران إلى متوسط دخل الأسرة في المدينة ومتوسط دخل الأسرة في ضواحي المدينة i على التوالي. ويعرض الجذول (٢-٢) بيانات عن نسبة الدخل بين المدينة والضواحي لكل واحدة من الخمس عشرة مدينة، أي[Y_i^s / Y_i^c] 100. ولو أن «فرضية النزوح» كانت صحيحةفإننا نتوقع أن المدن التي لديها نسبة ضئيلة نسبيا من سكان حاضرتها

* لدراسة قياسية مكثفة لهذه القضية، انظر:

David Bradford and Harry Kelejian. "An Econometric Model of the Flight to the Suburbs." *Journal of Political Economy*, 81 (May, June, 1973), pp. 566-589.

(أي قيمة منخفضة نسبيا لـ $100\,[P_i^c / (P_i^c + P_i^s)]$ سوف تحتوي على أغلبية فقيرة دوما في مركز المدينة. وبالنسبة لهذه المدن فإننا نتوقع أن تكون نسبة الدخل $100\,(Y_i^c / Y_i^s)$ منخفضة نسبياً. وباختصار، فإنا نتوقع وجود اقتران بين المتغيرين $100\,[P_i^c / (P_i^c + P_i^s)]$ و $100\,(Y_i^c / Y_i^s)$.

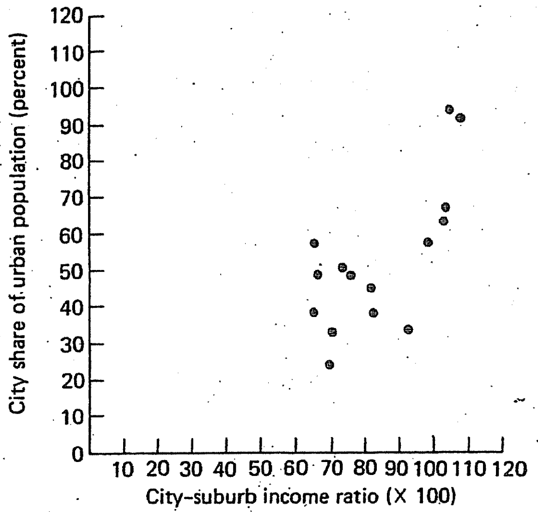
جدول (٢-٢)

المدينة	النصيب النسبي للمدينة من سكان الحضر ٪[a]	نسبة دخل المدينة إلى دخل الضواحي × 100[b]
بالتيمور	٥٧	٦٥
بوسطن	٢٤	٦٩
شيكاغو	٥٠	٧٣
كليفلاند	٣٨	٦٥
دالاس	٦٣	١٠٢
ديترويت	٣٨	٨٢
انديانابولس	٩١	١٠٧
لوس انجلوس	٣٤	٩٢
ممفيس	٩٤	١٠٤
نيويورك	٤٩	٦٦
فيلادليفيا	٤٩	٧٥
فينكس	٦٧	١٠٣
سان دياجو	٥٨	٩٨
سانت لويس	٣٣	٧٠
سياتل	٤٥	٨١

[a] عمود (٢) يشير إلى سكان مركز المدينة كنسبة من إجمالي سكان المنطقة الحضرية لعام ١٩٧٠.

[b] عمود (٣) يوضح نسبة متوسط دخل الأسرة في مركز المدينة إلى متوسط دخل الأسرة في المنطقة خارج المدينة وداخل حدود المنطقة الحضرية لعام ١٩٦٩ (باستخدام تعريف التعداد المتفق عليه احصائيا للمنطقة الحضرية).

والإجراء اللازم الآن هو أن نفحص البيانات لنرى ما إذا كانت توضح مثل هذا الاقتران الطردي أم لا، ومن الواضح أن شكل الانتشار (٢-٩) يوحي بذلك. فالقيم الأكبر لمتغير نسبة السكان تبدو في المتوسط مقترنة بالقيم الأكبر لمتغير الدخل النسبي، هذا على الرغم من أن نمط الاقتران ليس كاملا.



شكل (٢-٩)

وعلى سبيل التوضيح للحسابات اللازمة، نقوم الآن بتقدير الارتباط بين متغيري نسبة السكان ونسبة الدخل. وللتبسيط، دع:

$$X_i = 100\left[P_i^c / \left(P_i^c + P_i^s\right)\right] \text{و} \; Y_i = 100\left(Y_i^c / Y_i^s\right)$$

ومن ثم، فإنه، باستخدام (2.16)، نجد أن معامل ارتباط العينة بين هذين المتغيرين هو:

$$\hat{\rho}_{X,Y} = \frac{\hat{\sigma}_{X,Y}}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y} = \frac{\Sigma\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right) / n-1}{\sqrt{\Sigma\left(X_i - \overline{X}\right)^2 / n-1}\sqrt{\Sigma\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 / n-1}}$$
$$= \frac{\Sigma\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sqrt{\Sigma\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\sqrt{\Sigma\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}} \quad (2.21)$$

ويمكن تبسيط الحسابات باستخدام بعض المتطابقات من ملحق A في الفصل الأول [على وجه التحديد (1A.10) و(1A.13)]كي نضع (2.21) في صورة مختلفة لحد ما:

$$\hat{\rho}_{X,Y} = \frac{\Sigma X_i Y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sqrt{\Sigma X_i^2 - n\overline{X}^2}\sqrt{\Sigma Y_i^2 - n\overline{Y}^2}} \tag{2.22}$$

وتظهر الحسابات الفعلية في جدول (٢-٣)، ويتضح في النهاية أن معامل ارتباط العينة بين المتغيرين هو 0.71. وبالتأكيد، فإن هذه النتيجة متسقة مع «فرضية النزوح».

جدول (٢-٣) حساب معامل ارتباط العينة

	X_t	Y_t	X_tY_t	X_t^2	Y_t^2
	57	65	3.705	3,249	4,225
	24	69	1,656	576	4,761
	50	73	3,650	2,500	5,329
	38	65	2,470	1,444	4,225
	63	102	6,426	3,969	10,404
	38	82	3,116	1,444	6,724
	91	107	9,737	8,281	11,449
	34	92	3,128	1,156	8,464
	94	104	9,776	8,836	10,816
	49	66	3,234	2,401	4,456
	49	75	3,675	2,401	5,625
	67	103	6,901	4,489	10,609
	58	98	5,684	3,364	9,604
	33	70	2,310	1,089	4,900
	45	81	3,645	2,205	6,651
المجموع	790	1,252	69,113	47,224	108,052

$$\overline{X} = 52.7 \quad \overline{Y} = 83.5$$

$$\hat{\rho}_{X,Y} = \frac{\Sigma X_i Y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sqrt{\Sigma X_i^2 - n\overline{X}^2}\sqrt{\Sigma Y_i^2 - n\overline{Y}^2}}$$

$$= \frac{69,114 - (15)(52.7)(83.5)}{\sqrt{47,224 - (15)(52.7)^2}\sqrt{108,052 - (15)(83.5)^2}} = 0.71$$

(٢-٢) وصف العلاقات السلوكية

لقد قدمنا في القسم السابق مقياسين للاقتران الإحصائي بين متغيرين، ومع أخذهما في الحسبان نستمر الآن مع المسألة التي تعد ذات أهمية قصوى لنا: وهي

تحديد العلاقة الاقتصادية المفترضة وتقديرها. ولهذا الغرض نعود إلى مشكلة تقدير دالة الاستهلاك التي تعرضنا لها باختصار في الفصل الأول.

فالنظرية الاقتصادية تفترض أن الانفاق الاستهلاكي (C) دالة في الدخل المتاح(Y_d)، حيث إنه كلما زاد الدخل المتاح للأسرة زاد مستوى الإنفاق الاستهلاكي لها. ويفرض أن شكل هذه العلاقة الدالية خطي، كمايلي:

$$C_t = a + bY_{dt} \tag{2.23}$$

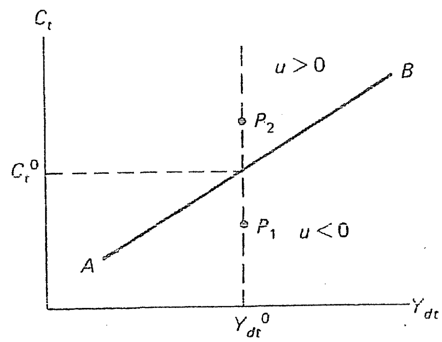
حيث (C_t) هي القيمة t للإنفاق الاستهلاكي و (Y_{dt}) هو القيمة t للدخل المتاح المقابل. فعلى سبيل المثال قد تشير t إلى الفترات الزمنية، وفي هذه الحال فإن المعادلة (2.34) تربط بين الإنفاق الاستهلاكي في الفترة الزمنية t ومستوى الدخل المتاح في الفترة نفسها. وكما قد تشير t إلى أفراد عند نقطة زمنية معينة. وفي هذه الحال فإن (2.23) تربط بين الإنفاق الاستهلاكي للفرد t ومستوى دخله المتاح.

ومن الجدير بالملاحظة أولا أننا نحدد هنا علاقة سببية مفترضة. وتقول النظرية إن مستوى الإنفاق الاستهلاكي يعتمد على مستوى الدخل المتاح. فكلما زاد الدخل المتاح للأسرة، فمن المتوقع أن تنفق جزءاً من هذه الزيادة على الاستهلاك. وثانيا، فإن المعادلة (2.23) تحدد علاقة تامة بين(C_t) و(Y_{dt}). فلو أنه، على سبيل المثال، إذا كانت $a = 100$ و $b = 0.9$ فإن المعادلة (2.23) تقرر أن $C_t = \$13600$ لو أن$Y_{dt} = \$15000$. وعلى الرغم من ذلك، إذا نظرنا إلى البيانات بإمعان لن نجد علاقة تامة. فلايوجد هناك مجموعة من النقاط التي تقع على طول خط مستقيم بدقة، ولكن، بدلا من ذلك نجد انتشارا من النقاط. فالعلاقة بين الاستهلاك والدخل المتاح التي نريد تقديرها ليست علاقة تامة، وانما هي علاقة نمطية. ومانفكر فيه هو النوع غير المحدد مثل: «إذا كان الدخل المتاح للأسرة يساوي 15000$، فإنه في المتوسط سوف يكون الإنفاق الاستهلاكي للأسرة مساو لـ 13600$. وفي أي حالة خاصة، فنحن نتوقع لعديد من الأسباب التي سوف نناقشها بعد قليل – أن تنحرف C_t إما لأعلى

أو لأسفل عن القيمة النمطية. وهذا يتضمن أن دالة الاستهلاك البسيطة يمكن كتابتها كمايلي:

$$C_t = a + bY_{dt} + u_t \tag{2.24}$$

حيث u_t قد تأخذ قيما موجبة أو سالبة، ولكن، بمتوسط يساوي الصفر، حيث إن القيمة المتوسطة لـ C_t المقابلة لقيمة محددة لـ Y_{dt} تكون مساوية لـ $(a + bY_{dt})$. افترض، على سبيل، المثال أن العلاقة المتوسطة بين C_t و Y_{dt} ممثلة بالخط AB في الشكل (٢-١٠). ومن ثم، لو أن $Y_{dt} = Y_{dt}^0$، فإن متوسط C_t سوف يكون C_t^0. وعلى الرغم من ذلك فإنه عموما عندما $Y_{dt} = Y_{dt}^0$ فإن قيمة C_t سوف تنحرف بمقدار ما عن C_t^0 وفي بعض الحالات C_t^0 و C_t، كما عند النقطة P_1 مما يتضمن أن $u_t < 0$، وفي حالات أخرى، تكون $C_t > C_t^0$ مع $u_t > 0$ كما هو عند النقطة P_2 في الشكل (٢-١٠).



شكل رقم (٢-١٠)

والحد u_t الذي هو ذو أهمية كبرى في الاقتصاد القياسي يسمى حد الخطأ disturbance (or error) term (أو أكثر شيوعا الخطأ العشوائي). إنه الوسيلة التي تمكننا من توضيح أن العلاقات الاقتصادية ليست تامة (مؤكدة) ولكنها تمثل أنماطا سلوكية

متوسطة. ويثير هذا قضية فحواها: لماذا لانجد في الاقتصاد علاقات دقيقة تنطبق بدون استثناءات.* أي لماذا تختلف u دائما عن الصفر ؟ ويرجع هذا لعدد من الأسباب أهمها:**

(١) المتغيرات المحذوفة

دعنا نعود مرة أخرى إلى حالة الإنفاقات الاستهلاكية، فلاشك أن الاستهلاك يعتمد على عدد من المتغيرات الأخرى غير الدخل المتاح. وعلى سبيل المثال إذا كانت C_t تشير إلى الإنفاقات الاستهلاكية في الفترة t، فإننا قد يمكننا افتراض أن:

$$C_t = a + b_1 Y_{dt} + b_2 L_t + b_3 \dot{P}_t + b_4 R_t + \cdots, \qquad (2.25)$$

حيث L_t تشير إلى رصيد الأصول السائلة في الفترة t، $\dot{P}_t$ تشير إلى التغير النسبي في الأسعار خلال الفترة t و R_t تشير إلى معدل الفائدة خلال الفترة t وهكذا.

ومن ناحية أخرى، فإننا قد نشعر أن Y_{dt} هو، في الأقل، أهم العوامل المحددة للاستهلاك C_t تحت الظروف العادية، وأن آثار المتغيرات الأخرى سوف تكون ضعيفة وسوف يلغي بعضها بعضا مع مرور الزمن.

وفي هذه الحالة، فإن الخطأ العشوائي يمثل مجموع كل هذه الحدود المحذوفة:***

$$u_t = \left(b_2 L_t + b_3 \dot{P}_t + b_4 R_t + \cdots\right) \qquad (2.26)$$

* ينبغي علينا الإشارة إلى وجود بعض العلاقات التامة في الاقتصاد، ولكنها ليست علاقات سلوكية إقترحتها النظرية الاقتصادية، وتعرف هذه «بالمتطابقات المحاسبية»، وتعتبر صحيحة بالتعريف. فعلى سبيل المثال، فإن واحدة من المتطابقات المحاسبية المعروفة في الاقتصاد هي تقرير الميزانية الأساسي والذي يعتبر أن:

الأصول = الخصوم + الرصيد الصافي

وتعد هذه العلاقة صحيحة دائما بسبب الطريقة التي يعرف بها الرصيد الصافي:

الرصيد الصافي = الأصول - الخصوم

فالرصيد الصافي هو المقدار المتبقي الذي يؤكد أن الميزانية متوازنة.

** تعتمد المناقشة التالية على:

J. Johnston. *Econometric Methods*, 2nd ed. New York: McGraw. Hill, 1972, pp. 10-11.

*** سوف نتعرض لاحقا للحالة التي لاتميل فيها هذه المتغيرات المحذوفة لإلغاء أثر بعضها بعضا.

وباختصار فإن حد الخطأ قد يظهر لأن كل العوامل المؤثرة قد لايمكن أخذها جميعًا في الاعتبار.

(٢) السلوك غير المتوقع للأفراد

إن الأنماط السلوكية للناس نــادرًامايمكن التنبؤ بها على وجه الدقة. ومن ناحية أخرى، فإن السلوك البشري ليس ذا صفة عشوائية بحتة عموما. وفي هذا الصدد يمكننا أن ننظر إلى نموذج الإستهلاك (2.24) على أنه يتضمن جزئين: جزءًا محددا وهو الذي يربط الإنفاق بالدخل ($a + bY_{dt}$) وجزءا لايمكن التنبؤ به (أو غير محدد) u. وفي هذا الاطار، فإن حد الخطأ يعكس أو يأخذ في الاعتبار «الاحتياجات الطارئة»، و «التغيرات في الرأي»، أو التغيرات في الموقف التي تحفز المستهلكين على أن ينفقوا أكثر أو أقل مما اعتادوا عليه. وهذا المقدار الذي اعتادوا على انفاقه يمثل في الجزء المحدد($a + bY_{dt}$). وفي الإطار نفسه، فإن حد الخطأ يمكن النظر إليه على أنه يعكس آثار الأحداث التي لايمكن التنبؤ بها على السلوك الاقتصــادي. فعلى سبيل المثال، لو أن صديقا من خارج المدينة قام بزيارة غير متوقعة، فــإن مضيفه قد يتجاوز ميزانيته العادية بأن يأخذ صديقه لعشاء في الخارج.

(٣) تباين سلوك الأفراد

وبالمثل نعرف، جميعا، أنه بسبب الاتجاهات المختلفة، يكون لبعض الأسر ميل أكبر للادخار من الأسر الأخرى. ولو أننا استخدمنا المعــادلــة (2.24) لنفسر الإنفاقات المختلفة للأسر عند نقطة زمنية معينة يمكننا، اعتبار ($a + bY_{dt}$) هي انفاق الأسرة العادية (المتوسطة) التي دخلها هو Y_{dt} ونعتبر حد الخطأ u_t هو الانحراف عن المتوسط. أي أن u سوف تعكس المواقف المختلفة تجاه الادخار: فالأسر ذات الميل المرتفع للأدخار نسبيا تقابل القيم السالبة لـu_t، والأسر ذات الميل المنخفض للادخار سوف تقترن بالقيم الموجبة لـu_t.

(٤) أخطاء القياس

حتى لو كانت $C_t = a + bY_{dt}$ مؤكدة، فإنه قد لايمكننا قياس C_t بدقة كاملة. ونتيجة لمثل هذه الأخطاء في القياس، فقد نشاهد في الواقع $\tilde{C}_t$ المرتبطة بـ C_t كما تصفها الصيغة التالية:

$$\tilde{C}_t = C_t + u_t$$

وتمثل u_t هنا خطأ القياس. وهذا يعني أنه، بينما نقلل من قيمة C_t أو نبالغ فيها تبعا لما إذا كانت u_t موجبة أو سالبة، فإننا نفترض أن أخطاء القياس تميل إلى أن يلغى بعضها بعضا، فلو أخذنا قياسات متكررة لـ C_t فإن متوسط هذه القياسات من المتوقع أن يكون C_t. ولو احللنا $\tilde{C}_t = C_t + u_t$ في $C_t = a + bY_{dt}$ نحصل على:

$$\tilde{C}_t = a + bY_{dt} + u_t$$

وبمعنى آخر حتى لو كانت العلاقة بين الإنفاق الاستهلاكي والدخل المتاح مؤكدة، فإن العلاقة بين الإنفاق المقاس والدخل قد تتضمن خطأ عشوائيا.*

ولهذا، فإننا سوف نكون العلاقات الدالية التي تصف السلوك الاقتصادي بأنه علاقات متوسطة، وسوف نوضح هذا بإدخال خطأ عشوائي، u_t في النموذج. ومن الأمثلة الأخرى على تلك العلاقات الاقتصادية المثالان التاليان:

$$I_t = e + fR_t + u_t \tag{2.27}$$

$$Q_t = g + hL_t + u_t \tag{2.28}$$

حيث I_t = الاستثمار، R_t = سعر الفائدة، Q_t = مستوى الناتج و L_t = عنصر العمل مقاسا بساعات عمل. ويتضح أنه، في كل واحدة من هذه المعادلات أن هناك متغيرات إضافية أخرى مهمة تؤثر في المتغير التابع: فمن الواضح أن الاستثمار يعتمد على متغيرات أخرى بجانب مستوى معدلات الفائدة كالطلب على الناتج. وفي الحالة الثانية فإن مستوى الناتج يتغير مع تغير كميات المدخلات الأخرى التي

* لاحظ أننا، لأغراض التبسيط افترضنا عدم وجود أخطاء في قياس المتغير المستقل.

تستخدم مع العمل في التوليفة نفسها. ولهذا السبب وحده، نتوقع عدم دقة العلاقات بين هذه المتغيرات.

(٢-٣) نموذج انحدار المتغيرين

افترض أننا كونا علاقة سلوكية من النوع الذي سبقت مناقشته، وبشكل أعم افترض أن لدينا العلاقة الخطية التالية:

$$Y_t = a + bX_t + u_t, \quad t = 1, \cdots, n \tag{2.29}$$

حيث:

Y_t المشاهدة رقم t للمتغير التابع،

X_t المشاهدة رقم t للمتغير المستقل،

u_t القيمة المقابلة للخطأ العشوائي t و a، b هما معلمتان مجهولتا القيمة.

والمعادلة (2.29) علاقة خطية بين Y_t، X_t و u_t بها معلمتان مجهولتان هما a و b ونفترض أن هذه العلاقة تتحقق لجميع القيم المحددة عند t أي $t=1,2,...,n$. لاحظ أن قيم t تقابل الـ n مشاهدة لكل من Y_t و X_t. ومن المتوقع أن تتغير قيمة الخطأ العشوائي u_t في العلاقة السابقة من مشاهدة لأخرى لتعكس الانحرافات عن أنماط السلوك النمطية. وعلى العكس من قيم Y_t و X_t، فنحن لانفترض أن قيم الخطأ العشوائي قابلة للمشاهدة.

وتتمثل المشكلة الأولى في تقدير قيمتي المعلمتين a و b حتى نتمكن من عمل تقدير كمي للعلاقة بين Y_t و X_t. ولإتمام ذلك لابد أولا من وضع عدد من الافتراضات الرياضية الخاصة بالطريقة التي نحصل بمقتضاها على كل من قيم المتغير المستقل X_t وقيم الخطأ العشوائي u_t. وسوف تتضح فيما بعد ضرورة هذه الافتراضات خاصة تلك المتعلقة بـ u_t. فعلى سبيل المثال، طالما أن Y_t تعتمد على كل من X_t و u_t، فإنه يتبع ذلك أن تعتمد طبيعة أي علاقة بين Y_t و X_t على خصائص الخطأ العشوائي u_t.

الافتراضات الأساسية The Basic assumptions

١- نفترض أولا أن قيم المتغير المستقل X ليست متساوية. ففى الأقل، لابد أن توجد هناك قيمة واحدة تختلف عن البقية. وكما سنرى، فمالم يتحقق هـذا الشرط فلن نستطيع تقدير a وb . ولحد ما، فإنه من البديهي إذا لم تتغير X مطلقا فإننا لن نتمكن من مشاهدة الكيفية التي تتغير بها Y مع X.

ويثير هذا تساؤلا عن ما الذي يحدد القيـم الخـاصـة بـــ X. والافتراض التقليدي هو أن القائم بالتجربة نفسه يختار قيم X وعندئذ، يشاهد القيم المقابلة أو الناتجة لـ Y . فعلى سبيل المثال، دع المعادلة (2.29) تمثل العلاقة بين الناتج من القيم بالبوشل bushel لكل فدان أرض (Y)، وعنصر السماد للفدان (X) مقاسا بالرطل. ولاستكشاف هذه العلاقة، فإن القائم بالتجربة قد يضع X=1 في الفدان الأول من الأرض و X=2 في الفدان الثاني (أي $X_1=1$, $X_2=2$) وهكذا.

غير أنه من الثابت أن الاقتصاديين ليسوا، عادة، محظوظين بهذا الشكل. افترض، على سبيل المثال، أننا نريد أن نفحص العلاقة بين معدل التضخم ومعدل البطالة. في هذه الحالة، يمكننا تعريف Y في المعادلة (2.29) بأنها التغير النسبي في الأسعار من عام لآخر و X بأنها التغير النسبي في قوة العمل العاطلة خلال الفترة نفسها. ومن الواضح أنه لايمكننا الاستمرار في تحرى العلاقة بين X وY عن طريق وضع معدل بطالة عند نسبة مختلفة كل عام ثم ملاحظة معدل التضخم الناتج عن ذلك. فمعدل البطالة يتحدد بحركة الاقتصاد ككل. ولهذا السبب، فهو خـارج تحكمنا التجريبي، حيث لايمكننا اختيار قيم المتغير المستقل وتغييره بانتظام. ومن ثم، فلابد أن نشاهد في هذه الحالة كلا مـن X وY معا. ولذا، فسوف نواصل مناقشتنا مع افتراض أنه، مهما كانت الآلية التي تنتج عنها قيـم X، فإنها سوف تعطي في الأقل، قيمتين مختلفتين للمتغير X.

٢- الافتراضات المتعلقة بخصائص الخطأ العشوائي نفسه:

$$2a.\ E(u_t) = \mu_u = 0$$
$$2b.\ E(u_t - \mu_u)^2 = E(u_t^2) = \sigma_u^2,$$
$$2c.\ u_t \text{ is independent of } u_s \text{ for } s \neq t, \text{ and so}$$
$$E[(u_t - \mu_u)(u_s - \mu_u)] = \text{cov } (u_t, u_s) = 0$$

ويقرر الافتــراض 2a أنه، لكل مشاهدة، فإن القيمة المتوقعة للخطأ العــشــوائــي تساوي الصفر. وعلى سبيل مثال بسيط، نفترض أنه لكل مشاهدة، تتحدد قيمة u كمايلي: شخص غير معروف لنا رمي عملة، فلو ظهرت الشارة فإنه يضع $u_t=1$، ولو ظهرت الكتابة فإن يضع $u_t = -1$. وفي هذه الحالة:

$$E(u_t) = \tfrac{1}{2}(1) + \tfrac{1}{2}(-1) = 0$$

والمنطق وراء افتراض أن متوسط الخطأ العشوائي يساوي الصفر منطق مبــاشــر. فنحن نفترض أن نظريتنا المتمثلة في المعادلة (2.29) تصف، بدقة، السلوك المتوسط للمتغير Y والمقابل للقيم المختلفة لــ X. أي أنه مهما كانت قيمة X، فإن القيمة المتوسطة لـ Y سوف تكون $Y^m = (a + bX)$. وعلى العكس من ذلك لو أن $E(u_t) \neq 0$ فإن الأمر لن يكون كذلك. أفترض، مثلاً، أن u_t في المعادلة (2.29) كانت دائما موجبة، ومن ثم، فإن هذا سوف يتضمن أن القيمة المتوسطة لـ Y المقابلة لكل قيمة من قيم X سوف تفوق $(a+bX)$ لذلك، فإن المعادلة (2.29) يمكن النظر إليها على أنها مشتقة من معادلة أخرى متوسط الخطأ العشوائي فيها لايساوي صفر. فعلى سبيل المثال، افترض أن $E(u_t) = d \neq 0$ حيث d ثابت، عندئذ، يمكن تعريف:

$$v_t = u_t - d, \tag{2.30}$$

ولاحظ أن $E(v_t) = E(u_t) - d = d - d = 0$. وباستخـدام (2.30) فإننا نستطيــع إحــلال $u_t = v_t + d$ في (2.29) لنحصل على:

$$\begin{aligned} Y_t &= (a+b) + bX_t + v_t \\ &= a^* + bX_t + v_t, \end{aligned} \tag{2.31}$$

حيث $a^* = a + d$، وكما هو ملاحظ فإن $E(v_t) = 0$. ولذا فإننا يمكن أن نأخذ (2.30)، على أنه نموذجنا للانحدار.

ويوضح الافتراض (2b) أن تباين الخطأ العشوائي ثابت ويساوي σ_u^2. ولذا فهو لايتغير بانتظام مع تغير t. فلو استخدمنا سلسلة من المشاهدات عن الإنفاقات الاستهلاكية والدخل المتاح عبر الزمن، فإن هذا الافتراض يعني أن تباين الحد العشوائي لايزيد ولاينقص مع مرور الزمن.* أو باستخدام مثالنا البسيط السابق، فإن هذا الافتراض سوف يخرق لو أنه عند رمي قطعة العملة، قام الشخص غير المعروف لنا بوضع $u_t = +t$ ووضع $u_t = -t$ عندما يظهر الشعار أو الكتابة على التوالي. وفي هذه الحالة، سوف تظل القيمة المتوقعة لـ u مساوية الصفر.

$$E(u_t) = \tfrac{1}{2}(t) + \tfrac{1}{2}(-t) = 0$$

ولكن، من الواضح أن تباين u_t سوف يصبح أكبر مع كل مشاهدة تالية. أما المنطق وراء هذا الافتراض والطرق التي تعالج مشاكل التقدير التي تظهر عندما يخرق هذا الافتراض، فسوف نتعرض لها رياضيا فيما بعد بالكتاب (انظر الفصل السادس). وعند هذه النقطة، فإننا نلاحظ أنه لو لم يكن تباين u_t متساويا عند جميع المشاهدات، فإن جميع المشاهدات لايمكن الاعتماد عليها أو الوثوق بها بالدرجة نفسها. فعلى سبيل المثال، افترض أننا عرفنا أن تباين u_t كان مساويا الصفر لمشاهدتين معينتين ولتكونا الأولى والثانية، ولكنه كان موجبا للمشاهدات الأخرى. عندئذ، فطالما أن متوسط u_t يساوي الصفر، فإن هاتين المشاهدتين مع كون احتمالهما مساويين الواحد الصحيح يحققان المعادلة التالية $Y = a + bX$، ويمكننا كتابة:

$$\begin{aligned} Y_1 &= a + bX_1, \\ Y_2 &= a + bX_2, \end{aligned} \tag{2.32}$$

* ولو كنا، بدلا من ذلك، نبحث مسح ميزانية يوضح الإنفاقات الاستهلاكية للأسر ذات الدخول المختلفة، فإن هذا الافتراض سوف يتضمن أن تباين حد الخطأ σ_u^2 لايتغير بانتظام مع تغير الدخل المتاح. انظر الفصل السادس.

وعندئذ، نحل المعادلتين في (2.32) لـ a وb . وبمعنى آخر يمكننا أن نهمل كل المشاهدات الأخرى ونقدر a وb ببساطة باستخدام هاتين النقطتين الأوليين. وباختصار، فإن المشاهدات التي تقابل تباينات صغيرة ذات أهمية أكبر لحد ما من المشاهدات التي تقابل تباينات كبيرة. ومن أجل ذلك تكون جميع مشاهداتنا على القدر نفسه من الأهمية في هذه المرحلة فلقد وضعنا الافتراض (2b).

ويقرر الافتراض (2c) أن قيمة الخطأ العشوائي رقم t مستقلة عن قيمة أي خطأ عشوائي آخر وليكن رقم s. والسبب وراء هذا الافتراض هو أننا، على وجه التحديد، نريد أن نعين نموذج توجد فيه قوة منتظمة واحدة متنبأ بها قابلة للتنبؤ (X_t) تؤثر على المتغير التابع Y_t. ولو أن الأخطاء العشوائية كانت مرتبطة مع بعضها البعض فإنه من الواضح أن هذا لن يحدث. فعلى سبيل المثال، افترض أن u_t كانت مرتبطة عكسيا مع القيمة السابقة لها مباشرة u_{t-1}. عندئذ، فإن قيمة Y_t سوف تعتمد بانتظام ومتنبأ بها على قيمة X_t وقيمة u_{t-1} طالما أن u_{t-1} تحدد u_t ، في الأقل جزئيا. وعلى الرغم من أننا سوف نتناول مثل هذه النماذج في الفصل السادس فسوف نبدأ مناقشتنا لتحليل الانحدار على مستوى ابسط بافتراض أن قيمة الخطأ العشوائي لأي مشاهده لاتعتمد على قيمته عند أي مشاهدة أخرى.

ومع هذه المجموعة من الافتراضات، نكون قد وصفنا حد الخطأ في المعادلة (2.29) بأنه متغير عشوائي غير قابل للمشاهدة، وسطه الحسابي يساوي صفرًا، وتباينه ثابت σ_u^2 بالإضافة إلى أن قيمه في أي ظرف معين مستقلة. ولذا غير مرتبطة مع قيمه في أي ظروف أخرى.

٣- وافتراضنا النهائي هو أن u_t مستقلة عن كل القيم n للمتغير المستقل X. ويتبع هذا أن$\text{cov}(u_t, X_t) = 0$ ، وحيث إن $E(u_t) = 0$ من الافتراض 2a، فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned}\text{cov}(u_t, X_t) &= E\left[(u_t - 0)(X_t - \mu_X)\right] = E(u_t X_t) - E(u_t \mu_X)\\ &= E(u_t X_t) - \mu_X E(u_t) = E(u_t X_t) = 0\end{aligned}$$

ومن ثم، فإن الافتراضات تتضمن أن$E(u_t, X_t) = 0$.

والمنطق وراء الافتراض بأن X_t و u_t مستقلان*، ومن ثم، $cov(u_t, X_t) = 0$ مشابهة للمنطق نفسه وراء الافتراض $E(u_t) = 0$ فلو أن أي واحد من هذين الافتراضين لم يتحقق فإن القيمة المتوسطة للمتغير Y_t، مثل Y_t^m والمقابلة لقيمة معينة للمتغير X_t لن تكون، عموما، هي $(a + bX_t)$. دعنا نأخذ على سبيل المثال الحال التي يرتبط فيها X_t و u_t طرديا. ومن ثم، فإن هذا الارتباط الطردي يتضمن أن قيم u_t الأكبر من المتوسط [الموجبة حيث إن $E(u_t) = 0$] سوف تميل للاقتران بقيم X_t الأكبر من المتوسط، وبالطريقة نفسها سوف تميل قيم u_t الأقل من المتوسط (السالبة) للاقتران بقيم X_t الأقل من المتوسط. ويتضمن هذا أن متوسط u_t المقابل لقيم X_t *الكبيرة* فقط، سوف يكون *موجبا*، وعلى العكس من ذلك، فإن متوسط u_t المقابل لقيم X_t الصغيرة فقط سوف يكون *سالبا*. ومن هذا فإننا نرى أن متوسط Y_t أي Y_t^m يفوق $(a + bX_t)$ عندما تكون X_t صغيرة.

ونوضح هذه المشكلة في الشكل (٢-١١). افترض أن الخط AB يمثل العلاقة $Y_t^* = a + bX_t$، وبنفس الطريقة دع الخط CD يشير إلى متوسط قيمة Y_t (الذي يرمز لها Y_t^m) والتي تقابل القيم المختلفة لـ X_t. وعندئذ، فإن الارتباط الطردي بين الخطأ العشوائي والمتغير المستقل يتضمن أن العلاقة بين Y_t^m و Y_t^* سوف تكون، إلى حد ما، كما هي موضحة بالشكل (٢-١١).**

وبهذا نستكمل مناقشتنا حول الافتراضات، فتعيين العلاقة بين Y, X في الصيغة التالية:

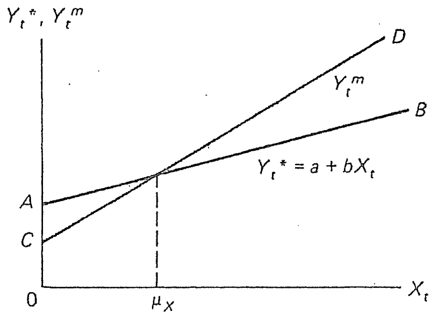
$$Y_t = a + bX_t + u_t$$

بالإضافة إلى الافتراضات التي ناقشناها، تكون نموذجنا الخطي للانحدار. ومهمتنا التالية هي أن نرى كيف يمكننا استخدام افتراضاتنا للحصول على مقدرات لـ a و b. وفي مجرى مناقشتنا، فسوف نرى، بوضوح، ما الدور الدقيق لكل افتراض وكيف تعتمد نتائجنا عليها.

---

*أهمية الافتراض بأن u_t مستقل عن جميع الـ n قيمة للمتغير X هي أهمية فنية، وسوف نبحثها فيمابعد.

** نحن نتجاوز هنا قليلا لأنه في النظرية CD ليس من المتعين أن يكون خطا مستقيما.



شكل (٢-١١)

(٢-٤) تقدير معادلة الانحدار - طريقة المتغير المساعد

عرف المدخل الذي نستخدمه في الأدب الاقتصادي بتقدير المتغير المساعد وهي طريقة تتضمن تطبيق افتراضاتنا المتعلقة بنموذج الانحدار الأساسي مباشرة على القيم المشاهدة للعينة X وY.* وكما سوف نرى بعد قليل، فإن هذا يمكننا من توليد مقدرات لكل من b, a. وسر الإعجاب بهذا المدخل هو أنه يسمح لنا بأن نرى، بوضوح، الأهمية الخاصة أو الدور الذي يقوم به كل افتراض وضعناه في نموذج الانحدار.

دعنا نعود إلى معادلة الانحدار (2.29) الأساسية:

$$Y_t = a + bX_t + u_t, \qquad t = 1, \cdots, n$$

وبسبب افتراضنا $E(u_t) = 0$ أن القيمة المتوسطة لـ Y_t والمقابلة لقيمة معينة لـ X_t تصبح:

$$Y_t^m = a + bX_t \qquad (2.33)$$

* الصيغة الخاصة بطريقة المتغير المساعد التي سوف نستخدمها كان قدمها من قبل Arthur S. Goldberger في كتابه *Topics in Regression Analysis*. New York: Macmillan, 1968.

والمعادلة (2.33) قد يمكن تفسيرها بوصفها متوسطة بين Y_t وX_t. ويظهر من (2.29) و (2.33) أن:

$$Y_t = Y_t^m + u_t \tag{2.34}$$

وتقرر المعادلة (2.34)، ببساطة، أن Y_t يمكن التعبير عنها باعتبارها مجموعًا لمكونين: مكون المتوسط، ومكون الحد الذي يسبب انحرافها عن المتوسط. وبإعادة تنظيم حدود (2.34)، يمكن التعبير عن حد الخطأ كمايلي:

$$u_t = Y_t - Y_t^m \tag{2.35}$$

افترض الآن أن لدينا مقدرين لـ a وb وليكونا $\hat{a}$ و$\hat{b}$. وفي ضوء (2.33)، فإن مقدر القيمة المتوسطة لـ Y_t سوف يكون:

$$\hat{Y}_t = \hat{a} + bX_t \tag{2.36}$$

حيث إننا قد بسطنا الصيغة بعدم الإشارة إلى الدليل العلوي من المقـدر الخـاص بـY_t^m. بالمثل، فإن مقدرنا للخطأ العشوائي الموضح بالمعادلة (2.35) سوف يكون:

$$\hat{u}_t = Y_t - \hat{Y}_t \tag{2.37}$$

أي من الممكن الحصول على مقدر للخطأ العشوائي من المعادلة (2.35) عن طريق إحلال المعلمتين المجهولتـين a وb بمقدريهما. ومرة أخرى بإعادة ترتيب حـدود (2.37) نحصل على معادلة مقابلة للمعادلة (2.34):

$$\begin{aligned} Y_t &= \hat{Y}_t + \hat{u}_t \\ &= \hat{a} + \hat{b}X_t + \hat{u}_t \end{aligned} \tag{2.38}$$

ويلاحظ أن (2.38) تعبر عن قيمة Y_t بدلالة مقدراتنا لـ $\hat{a}$، $\hat{b}$ و $\hat{u}_t$ (أي a وb و u_t) وقيمة X_t.

دعنا الآن نعود إلى مشكلة الحصول على $\hat{a}$، $\hat{b}$. فمن بين افتراضات نموذج الانحدار أن u_t لها متوسط يساوي الصفر $E(u_t) = 0$. وهذا يقودنا بدهيا إلى توقع أنه لو أمكننا الحصول على متوسط قيم u_t ذات العدد n أي $\bar{u} = \Sigma u_t/n$ فإن هذا المتوسط سوف يأخذ قيمة صغيرة. واصطلاحًا يمكننا القول إن $E(u_t) = 0$ يتضمن

أن $E(\overline{u})=0$. ويتضمن هذا كله أنه إذا كانت $\hat{u}_t$ معرفة بالمعادلة (2.37) فإنه من المرغوب فيه أن يكون:

$$\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{\hat{u}_t}{n}\right)=0 \qquad (2.39)$$

وبالضرب في n:

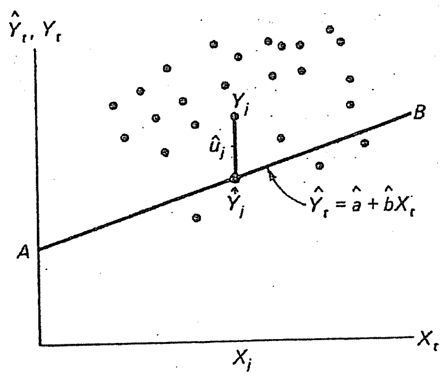
$$\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t=0 \qquad (2.40)$$

أي أننا قد نرغب في أن يتصف $\hat{u}_t$ بخاصية (2.39) أو (2.40) والتي تقابل أحد افتراضاتنا الأساسية الخاصة بالخطأ العشوائي، أي $E(u_t)=0$.

وقبل الاستطراد قد يكون من المفيد تفسير معنى (2.40) جبريا. فمن (2.38) نرى $\hat{u}_t$ أنه إذا كان $\Sigma\hat{u}_t \neq 0$ فإن $\Sigma Y_t \neq \Sigma\hat{Y}_t$. ولغرض التوضيح افترض أن $\Sigma\hat{u}_t = 500$ ، ومن ثم، سوف يتبع ذلك أن تكون $\Sigma Y_t > \Sigma\hat{Y}_t$. والآن تمعن في الشكل رقم (2.12) والذي تمثل فيه الـ n مشاهدة لكل من Y_t و X_t بنقاط الانتشار. وتمثل المعادلة المقدرة بين Y_t و X_t أي:

$$\hat{Y}_t=\hat{a}+\hat{b}X_t$$

بالخط AB. ويلاحظ عموما أن النقاط تقع فوق الخط. والسبب في ذلك هو أن ارتفاع الخط المقابل لقيمة معينة للمتغير المستقل ولتكن X_j هو $\hat{Y}_j$. ولكن عموما سوف تكون هذه القيمة $\hat{Y}_j$ أقل من القيمة المشاهدة للمتغير التابع Y_j طالما $\Sigma Y_t > \Sigma\hat{Y}_t$. ولقد أصبح من الواضح أنه إذا كانت $\Sigma\hat{u}_t$ سالبة فإنه بنفس المنطق سوف يقع انتشار النقاط عموما تحت خط العلاقة المقدرة بين Y_t وX_t. ومن ثم، فإن الشرط (2.40) بأن $\Sigma\hat{u}_t=0$ يتضمن أنه في المتوسط لاتتركز النقاط فوق الخط المقدر أو أسفله.



شكل (٢-١٢)

وقد يكون من الواضح الآن ما دور (2.40) في الحصول على المقدرات a وb فلو جمعنا (2.38) عبر n مشاهدة، فسوف نحصل على:

$$\begin{aligned} \Sigma Y_t &= \Sigma \hat{Y}_t + \Sigma \hat{u}_t \\ &= n\hat{a} + \hat{b}\Sigma X_t \end{aligned} \tag{2.41}$$

طالما أن $\Sigma \hat{u}_t = 0$ من (2.40)، وبقسمة (2.41) على n نحصل على:

$$\overline{Y} = \hat{a} + \hat{b}\overline{X} \tag{2.42}$$

حيث $\overline{Y}$ و $\overline{X}$ هما متوسطا العينة، لكل من Y و X. وطالما أن $\overline{Y}$ و $\overline{X}$ معروفان من العينة، فإننا يكون لدينا معادلة ذات مجهولين، أي $\hat{a}$ و $\hat{b}$ وباللغة الفنية للاقتصاد القياسي فإن المعادلة (2.42) أو (2.41) تعرف «بالمعادلة الطبيعية».

وقبل الاستمرار في تفسير هذه المعادلة واشتقاق معادلة أخرى، قد يكون من المفيد أن نشتق هذه المعادلة الطبيعية بديهيا. ولنقوم بهذه المهمة، دعنا نرجع إلى نموذج الانحدار الأساسي.

$$Y_t = a + bX_t + u_t$$

فلو قمنا بتجميع الطرفين الأيمن والأيسر لهذه المعادلة عبر جميع القيم المشاهدة n للمتغيرين XوY ثم، قسمنا كلا من الطرفين على n نحصل على:

$$\frac{\Sigma Y_t}{n} = \frac{\Sigma a}{n} + \frac{\Sigma b X_t}{n} + \frac{\Sigma u_t}{n} \tag{2.43}$$

التي يمكن تبسيطها إلى الصورة:

$$\overline{Y} = a + b\overline{X} + \frac{\Sigma u_t}{n} \tag{2.44}$$

ومن الافتراض (2a) في نموذج الانحدار، نعرف أن:

$$E(u_t) = 0$$

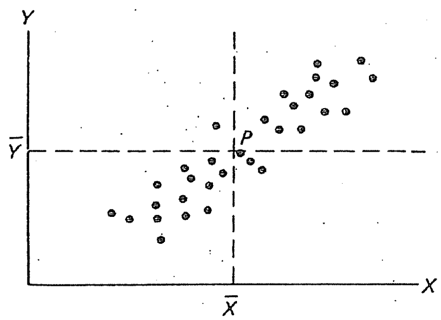
وهذا يعني أن *القيمة المتوقعة* للحد الأخير في (2.44) سوف تكون صفرا. ويتعين ملاحظة أن هذا لايعني أن $\Sigma u_t/n$ سوف تساوي الصفر. وعموما، فليس من المحتمل أن تساوي صفرا بالضبط، هذا على الرغم من أنه كلما كبر حجم العينة تناقص احتمال انحرافها عن الصفر بأي مقدار. وتنحو طريقة المتغير المساعد تجاه إهمال الحد $\Sigma u_t/n$ في (2.44) لأن قيمته المتوقعة تساوي صفرا. ولو تجاهلنا هذا الحد (أي افترضنا أنه يساوي صفرا) فإننا نحصل على:

$$\overline{Y} = \hat{a} + b\overline{X} \tag{2.45}$$

التي هي متماثلة مع (2.42). ويتعين ملاحظة أنه بالانتقال من (2.44) إلى (2.45) فقد تم إحلال $\hat{a}$ و$\hat{b}$ بدلا من a و b. والسبب في ذلك هو أن العلاقة المعبر عنها في المعادلة الطبيعية (2.45) تتسق مع (2.44) *فقط* في حالة أن يكون $\Sigma u_t/n = 0$. ومن ثم، فإنه إذا تحقق هذا الشرط فإن $\hat{a} = a$ و $\hat{b} = b$.

ولكن عموما طالما أن $\Sigma u_t/n$ لايساوي صفر بالضبط فإن $\hat{a}$ و$\hat{b}$ لايساويان a و b. وأن كان $\hat{a}$ و$\hat{b}$ يعتبران مقدرين لـ a و b. ولعل الشئ التالي الذي توضحه المعادلة الطبيعية للعلاقة المقدرة بين X وY ، هو أن الخط الممثل لانتشار النقاط لابد أن يمر بالنقطة التي يمثل محوراها متوسطي المتغيرين بالعينة. وباستخدام الشكل (٢-١٣) فإن المعادلة الطبيعية توضح أن النقطة P تقع على الخط المقدر. ويمكن أن

نرى الآن، بوضوح، الدور الذي يؤديه افتراضنا بـأن $E(u_t) = 0$. فهذا الافتراض يسمح لنا بأن نرصد نقطة [أي $P(\overline{X}, \overline{Y})$] على الخط الذي سوف نقدره من انتشار النقاط. وحيث إن أي نقطتين يحددان خطا مستقيما، فمن الواضح أنه إذا أمكننا إيجاد نقطة إضافية فسوف يصبح بمقدورنا تحديد معادلة للخط، كما سنحصل على علاقة مقدرة بين X و Y.



شكل (٢-١٣)

ولعمل ذلك، لابد من استخدام افتراض آخر، ويتمثل هذا في الافتراض الثالث بنموذج الانحدار والذي ينص على أن الخطأ العشوائي u_t يتعين أن يكون مستقلا عن X_t حيث: $cov(u_t, X_t) = 0$. وقد وضحنا أن هذا يتضمن:

$$E(u_t X_t) = 0$$

ويقودنا هذا إلى توقع بديهي وهو لو أن لدينا عينة من المشاهدات عن u_t و X_t فإن التغاير المقدر بينهما الذي توضحه المعادلة التالية:

$$\hat{\sigma}_{X,u} = \frac{\Sigma(u_t X_t)}{n}$$

سوف يساوي الصفر تقريبا. وحيث إن $E(u_t, X_t) = 0$ يتضمن أن $E(\hat{\sigma}_{x,u}) = 0$ فإن هذا يوضح أن الشرط الثاني الذي يمكن أن نفرضه على $\hat{u}_t$ هو:

$$\frac{\Sigma(\hat{u}_t X_t)}{n} = 0 \tag{2.46}$$

أو: بضرب الطرفين في n:

$$\Sigma(\hat{u}_t X_t) = 0 \tag{2.47}$$

وبالعودة مرة أخرى للمعادلة (2.38):

$$Y_t = \hat{a} + \hat{b}X_t + \hat{u}_t$$

وبضرب طرفي المعادلة (2.38) في X_t نحصل على:

$$X_t Y_t = \hat{a}X_t + \hat{b}X_t^2 + \hat{u}_t X_t \tag{2.48}$$

وبجمع طرفي المعادلة (2.48) عبر كل القيم المشاهـدة n للمتغيرين Y, X والقسمـة على نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma(X_t Y_t)}{n} &= \frac{\Sigma(\hat{a}X_t)}{n} + \frac{\Sigma(\hat{b}X_t^2)}{n} + \frac{\Sigma(\hat{u}_t X_t)}{n} \\ &= \hat{a}\overline{X} + \hat{b}\frac{\Sigma X_t^2}{n} + \frac{\Sigma(\hat{u}_t X_t)}{n} \end{aligned} \tag{2.49}$$

وبتطبيق الشرط $\Sigma(\hat{u}_t X_t) = 0$ على قيم العينة فإن هذا يتضمن أن الحد الأخير من (2.49) وهذا يعطينا:

$$\frac{\Sigma(X_t Y_t)}{n} = \hat{a}\overline{X} + \hat{b}\frac{\Sigma X_t^2}{n} \tag{2.50}$$

ويتوافر لدينا بذلك علاقة ثانية بين القيم المشاهده للمتغيرين Y, X وقيم $\hat{a}$ و $\hat{b}$ التي سوف تحدد فيما بعد. وتمثل هذه العلاقة *المعادلة الطبيعية الثانية*.

ونظرا للأهمية المركزية للمعادلتين الطبيعيتين، فقد يكون من المـفـيـد أن نستخدم مرة أخرى مدخلا أكثر بديهية لهذه العلاقة. وبالبدء مرة أخرى بعلاقـة الانحدار الأساسية:

$$Y_t = a + bX_t + u_t$$

وبضرب جانبي المعادلة في X_t، نحصل على:

$$X_tY_t = aX_t + bX_t^2 + u_tX_t$$

وبالجمع بالنسبة لكل المشاهدات والقسمة على n نحصل على:

$$\frac{\Sigma(X_tY_t)}{n} = \frac{\Sigma(aX_t)}{n} + \frac{\Sigma(bX_t^2)}{n} + \frac{\Sigma(u_tX_t)}{n} \qquad (2.51)$$
$$= a\overline{X} + \frac{b\Sigma X_t^2}{n} + \frac{\Sigma(\hat{u}_tX_t)}{n}$$

ونحن نعرف من افتراض سابق أن القيمة المتوقعة للحد الأخير في (2.51) تساوي الصفر. ولذا فإننا سوف نهمله بافتراض أن قيمته تساوي صفراً. ومن ثم، تصبح المعادلة الطبيعية كمايلي:

$$\frac{\Sigma(X_tY_t)}{n} = \hat{a}\overline{X} + \hat{b}\frac{\Sigma X_t^2}{n}$$

وجدير بالملاحظة أنه، بالانتقال من (2.51) التي تحتوي على المعلمتين a و b إلى المعادلة الطبيعية (2.50)، فإننا نكون قد أحللنا $\hat{a}$ و $\hat{b}$ محل a و b طالما أن $\Sigma(u_tX_t)/n$ لايساوي بالضبط صفر. ويصبح أن تكون $\hat{a}=0$ و $\hat{b}=0$ فقط إذا كان $\Sigma(u_tX_t)/n$. ويتوافر لدينا الآن معادلتان (2.42)، (2.50) ومجهولان $\hat{a}$ و $\hat{b}$. ومن ثم، تصبح في وضع يمكننا من القيام بالحل للحصول على المقدرين $\hat{a}$ و $\hat{b}$، ولعمل ذلك فمن المتعين أولا أن نضرب (2.42) في X:

$$\overline{X}\overline{Y} = \hat{a}\overline{X} + \hat{b}\overline{X}^2 \qquad (2.52)$$

ثم نطرح هذه المعادلة من (2.50) لنحصل على:

$$\frac{\Sigma(X_tY_t)}{n} - \overline{X}\overline{Y} = \hat{b}\left(\frac{\Sigma X_t^2}{n} - \overline{X}^2\right) \qquad (2.53)$$

وبذلك نكون قد تخلصنا من $\hat{a}$ وأصبح لدينا معادلة واحدة في مجهول واحد هو b. وبحل (2.53) بالنسبة لـ $\hat{b}$ نحصل على:

$$\hat{b} = \frac{\left[\Sigma\left(X_t Y_t\right)/n\right] - \overline{X}\overline{Y}}{\left[\left(\Sigma X_t^2/n\right) - \overline{X}^2\right]} = \frac{\Sigma\left(X_t Y_t\right) - n\overline{X}\overline{Y}}{\Sigma X_t^2 - n\overline{X}^2}$$
$$= \frac{\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)\left(Y_t - \overline{Y}\right)}{\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2} \qquad (2.54)$$

وبعد حصولنا على $\hat{b}$ ، يمكننا ببساطة استخدام (2.42) للحصول على $\hat{a}$:

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} \qquad (2.55)$$

وطالما أن هذا يعد أهم قسم في الكتاب، كما أنه أساسي لكل مايأتي فيما بعد، فمن المفيد، في هذه المرحلة، أن نلخص ماتعرضنا له من قبل وأن نقدم مثالا رقميا بسيطا. فلقد بدأنا بعلاقة خطية مفترضة بين متغيرين، ولم تكن هذه العلاقة مؤكدة وانما كان مسموحا فيها للمتغير التابع أن يتغير حول المتوسط عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل. ولقد وصفنا طبيعة هذه العلاقة بنوع من التفصيل من خلال مجموعة من الافتراضات المتعلقة بخصائص التغيرات في قيمة المتغير التابع. وهذا يمثل ماهو معروف بنموذج الانحدار الخطي لمتغيرين أو الثنائي المتغيرات.

وتمثلت مشكلتنا في ايجاد طريقة لتقدير قيم معلمات هذه العلاقة. ولعمل ذلك تبنينا طريقة المتغير المساعد، التي وضعنا من خلالها مباشرة عددا من الشروط على مقدار الخطأ العشوائي. وعبرنا عن تلك الشروط من خلال افتراضات نموذج الانحدار نفسه. وعلى وجه التحديد لكي نحصل على $\hat{a}$ و $\hat{b}$ وضعنا شرطين هما $\Sigma\hat{u}/n = 0$ و $\Sigma\left(\hat{u}_t, X_t\right)/n = 0$. ونجم عن كل واحد من هذين الشرطين معادلة طبيعية. أو بمعنى آخر مكننا كل شرط من تحديد موقع نقطة على الخط الذي يمثل انتشار النقاط المشاهدة، ومن خلال النقطتين، أمكننا أن نحل العلاقة المقدرة.

مثال

دعنا نستخدم الآن هذه الطريقة لتقدير علاقة اقتصادية باستخدام بيانات

الجدول (٢-٤) والذي يظهر مستويات الاستهلاك السنوي والدخل المتاح في الولايات المتحدة للسنوات ١٩٦٠-١٩٦٩م. وربما تتذكر أننا، في فحصنا للعلاقة بين الاستهلاك والدخل المتاح من قبل، ركزنا انتباهنا على مستويات الإنفاق الاستهلاكي للأسر ذات مستويات الدخول المختلفة. ومن خلال ماهو معروف *بالتحليل القطاعي*، استخدمنا معلومات عن ميزانيات عينة من الأسر عند *نقطة زمنية معينة*، ثم، بدأنا فحص كيفية تغير الإنفاق الاستهلاكي للأسر ذات الدخول المختلفة عند هذه النقطة من الزمن.

جدول (٢-٤) الإستهلاك والدخل المتاح في الولايات المتحدة (بليون دولار بالأسعار الجارية)

السنة	الاستهلاك(C)	الدخل التاح(Y_d)
١٩٦٠	٣٢٥	٣٥٠
١٩٦١	٣٣٥	٣٦٤
١٩٦٢	٣٥٥	٣٨٥
١٩٦٣	٣٧٥	٤٠٥
١٩٦٤	٤٠١	٤٣٨
١٩٦٥	٤٣٣	٤٧٣
١٩٦٦	٤٦٦	٥١٢
١٩٦٧	٤٩٢	٥٤٧
١٩٦٨	٥٣٧	٥٩٠
١٩٦٩	٥٧٦	٦٣٠

المصدر: التقرير الاقتصادي *للرئيس*، واشنطن، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة، فبراير ١٩٧٠م، ص ص ١٨٩-١٩٥.

وربما نكون قد درسنا مثلا بيانات الدخل والاستهلاك للأسر عن عام ١٩٧٠م، ومن ثم، فإن التحليل القطاعي يثبت الزمن.

ومن المداخل البديلة استخدام *تحليل السلاسل الزمنية*، والذي نفحص، من خلاله، سلوك وحدة اقتصادية أو الوحدات ككل *عبر الزمن*. فعلى سبيل المثال، قد نفحص كيف يستجيب الإنفاق الاستهلاكي الكلي للمجتمع للتغير في الدخل

المتاح عبر الزمن. وهو ماسنفعله هنا مستخدمين بيانات تجميعية عن الـولايـات المتحدة الأمريكية. وعلى وجه التحديد، سوف نستخدم عشر مشـاهـدات عـن الاستهلاك الكلي والدخل المتاح للولايات المتحدة في الجدول رقم (٢-٤) لتقدير أثر مستوى الدخل المتاح على الإنفاق الاستهلاك. ونفترض أولا:

$$C_t = a + bY_{dt} + u_t$$

ثم نقدر قيمتي b و a، حيث b يمكن تفسيرها على أنها الميل الحدي للاستهلاك.

ولذا لابد أن نحسب:

$$\hat{b} = \frac{\Sigma\left(C_t - \overline{C}\right)\left(Y_{dt} + u_t\right)}{\Sigma\left(Y_{dt} - \overline{Y}_d\right)^2}$$

وأيضا

$$\hat{a} = \overline{C} - \hat{b}\overline{Y}_d$$

وتظهر الحسابات اللازمة في الجدول (٢-٥)، وتصبح المعادلة المقدرة هي:

$$C = 13 + 0.89Y_d \qquad (2.59)$$

ويظهر خط الانحدار AB المقدر وانتشار النقاط العشرة في الشكل (٢-١٤)* ومن الواضح أن الخط يمدنا بتقريب جيد لنمط الاقتران بـين C و Y_{dt}، وهذا أمر سوف نتكلم عنه أكثر فيما بعد. ومن المثير للاهتمام، أيضا، أن تتفق العـلاقـة المقدرة مع توقعاتنا النظرية المسبقة. فالقيمة المقدرة للميل الحدي للاستهلاك 0.89 وهي موجبة وتقع بين الصفر والواحد الصحيح، والقيمة المقدرة للحد الثابت هي 13 وهي موجبة أيضا.

ولقد لاحظت من جدول (٢-٥) أن تحديد $\hat{a}$ و $\hat{b}$ قد تطلب قدرا كبيرا من الحسابات. وباستخدام بعض خصائص التجميع فإنه يمكن تخفيض هذه الحسابات لحد ما، وعلى وجه التحديد يلاحظ أن**

* عند هذه النقطة، تجاهل الخط CD في شكل (٢-١٤).

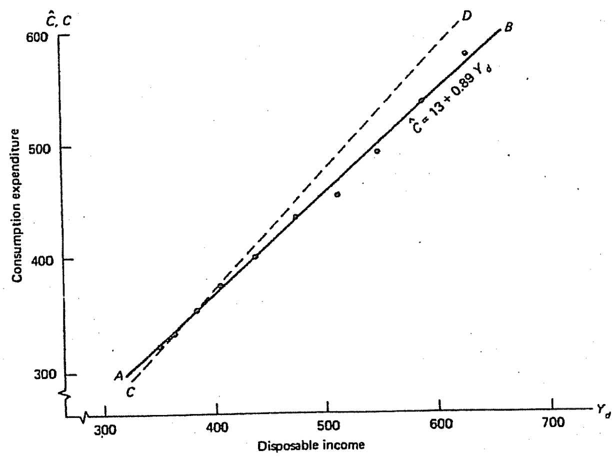
** انظر الافتراض الرابع في ملحق أ (A) من الفصل الأول.

جدول رقم (٢-٥)

(1) C_t	(2) Y_{dt}	(3) $(C_t - \overline{C})$	(4) $(Y_{dt} - \overline{Y}_d)$	(5)=(3)x(4) $[(C_t - \overline{C})(Y_{dt} - \overline{Y}_d)]$	(6) $(Y_{dt} - \overline{Y}_d)^2$
325	350	-105	-119	12,495	14,161
335	364	-95	-105	9,975	11,025
355	385	-75	-84	6,300	7,056
375	405	-55	-64	3,520	4,096
401	438	-29	-31	899	961
433	473	3	4	12	16
466	512	36	43	1,548	1,849
492	547	62	78	4,836	6,084
537	590	107	121	12,947	14,641
576	630	146	161	23,506	25,921

$$SC_t = 4,295 \quad \overline{C} = 430$$
$$SY_{dt} = 4,694 \quad \overline{X}_d = 469$$

$$\Sigma(C_t - \overline{C})(Y_{dt} - \overline{Y}_d) = 76,038$$
$$\Sigma(Y_{dt} - \overline{Y}_d)^2 = 85,810$$
$$\hat{b} = \frac{76,038}{85,810} = 0.89$$
$$\hat{a} = \overline{C} - \hat{b}Y_d = 430 - 0.89(469) = 13$$



شكل (٢-١٤)

وبالمثل :

$$\Sigma(X_t-\overline{X})^2=\Sigma(X_t-\overline{X})(X_t-\overline{X})=\Sigma(X_t-\overline{X})X_t$$

وباستخدام هذه العلاقات، يمكننا تبسيط صيغة b لتبسيط الحسابات :

$$\hat{b}=\frac{\Sigma(Y_t-\overline{Y})(X_t-\overline{X})}{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}=\frac{\Sigma(Y_t-\overline{Y})X_t}{\Sigma(X_t-\overline{X})X_t}$$

$$=\frac{\Sigma(Y_tX_t)-\overline{Y}\Sigma X_t}{\Sigma X_t^2-\overline{X}\Sigma X_t}=\frac{\Sigma(Y_tX_t)-n\overline{Y}\ \overline{X}}{\Sigma X_t^2-n\overline{X}^2} \tag{2.57}$$

ولكن، حتى في هذه الصيغة، يتطلب $\hat{a}$ و$\hat{b}$ عملا كثيرا، خاصة إذا كان هناك عدد كبير من المشاهدات، ولحسن الحظ، فإن هذه الحسابات يمكن اجراؤها بسهولة على الحاسوب، وهناك عدد كبير من البرامج المتاحة التي تنجز هذه الأعمال وتقدر قيم $\hat{a}$ و$\hat{b}$ بسهولة.

ملاحظة على أحد الافتراضات

قبل أن نبدأ في توضيح خصائص $\hat{a}$ و$\hat{b}$ يجب أن نتوقف برهة لتوضيح أهمية أحد الافتراضات الأساسية: وهو أنه يتعين أن تأخذ X الأقل، قيمتين مختلفتين. ولإثبات أهمية هذه النقطة، دعنا نتصور أن هذا الافتراض قد اختل بحيث إن X_t تأخذ قيمة معينة ولتكن X_0 وعندئذ، فإن المعادلتين الطبيعيتين المستخدمتين في تحديد $\hat{a}$, $\hat{b}$ وهما (2.42) و (2.50) سوف يصبحان:

$$\overline{Y}=\hat{a}+\hat{b}X_o \tag{2.42A}$$

and

$$X_o\overline{Y}=\hat{a}X_o+\hat{b}X_o^2 \tag{2.50A}$$

وحيث إن $\Sigma X_t/n=X_0$ و $\Sigma(X_tY_t)/n=X_0\overline{Y}$ ، بقسمة (2.50A) على X_0 نحصل على:

$$\overline{Y}=\hat{a}+\hat{b}X_o$$

وتتماثـل هذه المعادلة مع (2.42A). وكل هذا يعني أن لدينا معادلة واحـدة هـي (2.42A) ومجهولين هما $\hat{a}$ و $\hat{b}$. ومن ثم، لانستطيع أن نحل النموذج للحصول على قيم وحيدة $\hat{a}$ و $\hat{b}$، كما لانستطيع أن نقدر a و b. والسبب البديهي لهذا هو أنه لو X_t كانت مساوية دائما X_0 فإن نموذج الانحدار:

$$Y_t = a + bX_t + u_t$$

سيصبح:

$$Y_t = a + bX_0 + u_t \tag{2.58}$$

وطالما أن X_0 ثابتة فإنها يمكن أن تدمج مع الحد الثابت a حيث يصبح النموذج:

$$Y_t = A + u_t \tag{2.59}$$

حيث $A=(a+bX_0)$، وبالتالي، فإن نموذج الانحدار يتراجع إلى نموذج يحتوي على حد ثابت وخطأ عشوائي.

ولو أردنا تقدير A فسوف نلجأ إلى طريقة المتغير المساعد مرة أخرى. وعلى وجه التحديد، سوف نلاحظ أولا من المعادلة (2.59) أن:

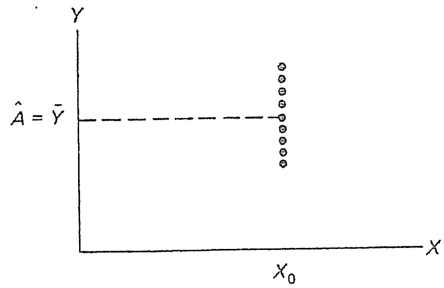
$$Y_t = \hat{A} + \hat{u}_t \tag{2.60}$$

ومن الافتراض $E(u_t) = 0$، نجد أن $\Sigma\hat{u}_t / n = 0$، وبالتالي، فإن المعادلة الطبيعيـة سوف تصبح:

$$\frac{\Sigma Y_t}{n} = \hat{A} \tag{2.61}$$

وبمعنى آخر، فإن مقـدر A سوف يكون: $\hat{A} = \overline{Y}$* ومن الشكل رقـم (٢-١٥) يتضح أنه، إذا كانت X_t مساويـة X_0 دائما فإن شكل الانتشار سوف ينهار إلـى سلسلة من النقاط المتراصة عموديا فوق X_0. ومن الواضح، أيضا، أن هذه المجموعة من النقاط سوف تمكننا فقط من تقدير القيمة المتوسطة لــ Y و A المقابلة للقيمة المحددة لمتغير المستقل X و X_0.

* لاحظ أنه، طالما لدينا معلمة واحدة فقط، A، نريد تقديرها، فإننا نحتاج لمعادلة طبيعية واحدة، فقط.



شكل (٢-١٥)

ومن ثم، نجد أنه، لو لم تتغير قيمة X_t، فإن طريقة المتغير المساعد لن تمكننا من تقدير أثر المتغير X على Y، أي b، منفصلا عن قيمة الحد الثابت. وفي هذه الحال فإن كل مايمكن عمله هو أن نحصل على مقدرة للأثر المزدوج $A=(a+bX_0)$. ومرة أخرى، فإن من البديهي لو أن X_t تأخذ دائما قيمة واحدة، فإن أثرها على Y_t يصبح مختلطا بالحد الثابت أو لايمكن متصلة عنه. وسوف نستكمل هذه المناقشة في الفصل الرابع عندما نعمم هذه المشكلة في حالة الانحدار المتعدد.

(٢-٥) خواص $\hat{a}$ و $\hat{b}$

يتوافر لدينا الآن طريقة للحصول على مقـدري $\hat{a}$ و $\hat{b}$. ولكن يتبقى لدينا التساؤل عما إذا كانت هذه الطريقة جيدة. بالطبع توجد هناك طرق أخرى للحصول على مقدرين لهاتين المعلمتين. فعلى سبيل المثال، يمكننا أن نأخذ أي نقطتين من انتشار النقاط بالشكل (٢-١٤)، ومن خلالهما، نشتق خطا يمكن استـخدامـه علاقة مقدرة بين الاستهلاك والدخل المتاح. ومن الواضح أن هذا سوف يكـون أسهل بكثير من الإجراء الذي اتبعناه للوصول إلى المعـادلـتـين (2.54) و (2.55). ولكن، بديهيا ربما تشعر بأن الطريقة التي تبنيناها هي أفضل الاثنين ذلك لأنهـا تستخدم كمية أكبر من المعلومات بانتظـام. فـالخـط AB الذي وفقناه من شكـل الانتشار رقم (٢-١٤) يبدو أنه يصف بصورة معقولة السلوك الـذي تـعـرضـه المشاهدات. وعلى العكس من ذلك، إذا استخدمنا نقطتين فقط، يمكننا الحصول

على خط مثل CD في الشكل (٢-١٤) والذي يبدو أنه مقدر أقل جودة للعلاقة النمطية بين C و Y_d.

وسوف نوضح الآن أن $\hat{a}$ و $\hat{b}$ مقدرين جيدين، بمعنى أنهما يتمتعان بخصائص إحصائية معينة مرغوب فيها. وعلى وجه التحديد سوف نوضح أن:

١- القيمة المتوقعة لكل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$ هي a و b على التوالي.

٢- تباين $\hat{a}$ و $\hat{b}$ صغير نسبيا.

ونتيجة لذلك، فسوف نعرف، في الأقل، أن مقدرينا موجهان إلى الهدف الصحيح وأن هامش الخطأ لهما صغير نسبيا بالمقارنة بالمقدرات الأخرى.

عدم التحيز*

سوف نثبت أولا أن القيم المتوقعة لكل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$ هي في الحقيقة b, a على التوالي، أو بمعنى آخر أن $\hat{a}$ و $\hat{b}$ مقدران غير متحيزين. وسوف نستخدم في الاثبات خمس خصائص لعملية الجمع.**

$$\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right) = 0 \tag{2.62}$$

$$\Sigma\left(X_t + Y_t\right) = \Sigma X_t + \Sigma Y_t \tag{2.63}$$

$$\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)\left(Y_t - \overline{Y}\right) = \Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)Y_t \tag{2.64}$$

$$\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)\left(Y_t - \overline{Y}\right) = \Sigma\left(Y_t - \overline{Y}\right)X_t \tag{2.65}$$

$$\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2 = \Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)\left(X_t - \overline{X}\right) = \Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)X_t \tag{2.66}$$

* تتبع معالجة عدم التحيز تلك المعالجة الخاصة بجونستون:
J. Johnston, *Econometric Methods*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1972, pp. 18-20.

** اثبتنا كل هذه الخصائص رياضيا في الملحق ا (A) في الفصل الأول.

ومن صيغة $\hat{b}$ في المعادلة (2.54)، نجد أن:

$$\hat{b}=\frac{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)\left(Y_t-\overline{Y}\right)}{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2}$$

وباستخدام (2.64)، يمكن تبسيط هذه الصيغة إلى:

$$\hat{b}=\frac{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)Y_t}{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2} \tag{2.67}$$

ولو أننا أحللنا الآن $Y_t=a+bX_t+u_t$ في بسط المعادلة (2.67)، نحصل على:

$$\hat{b}=\frac{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)\left(a+bX_t+u_t\right)}{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2} \tag{2.68}$$

وبتوسيع بسط المعادلة (2.68) واستخدام الخاصية الموجودة في المعادلة (2.63)، نحصل على:

$$\hat{b}=\frac{a\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)+b\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)X_t+\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)u_t}{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2} \tag{2.69}$$

دعنا الآن نكتب المعادلة (2.69) على النحو:

$$\hat{b}=\frac{a\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)}{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2}+\frac{b\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)X_t}{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2}+\frac{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)u_t}{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2} \tag{2.70}$$

ومن (2.62)، يتضح أن الحد الأول في الطرف الأيمن بالمعادلة (2.70) يساوي الصفر، وباستخدام (2.66) لتغيير صيغة المقام في الحد الثاني بالطرف الأيمن في المعادلة (2.70) إلى $\Sigma(X_t - \overline{X})X_t$، نجد أن الثاني، ببساطة، يساوي b. ومن ثم، فإن:

$$\hat{b}=b+\frac{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)u_t}{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2} \tag{2.71}$$

ولتبسيط التحليل التالي، دعنا نستخدم الرموز التالية:

$$A = \Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2 \tag{2.72}$$

و

$$w_t = \left(X_t - \overline{X}\right) \tag{2.73}$$

وباستخدام هذه التعريفات، فإن صيغة $\hat{b}$ في (2.71) تصبح:

$$\begin{aligned}\hat{b} &= b + \frac{\Sigma w_t u_t}{A} = b + \frac{w_1 u_1}{A} + \frac{w_2 u_2}{A} + \cdots + \frac{w_n u_n}{A} \\ &= b + \left(\frac{w_1}{A}\right)u_1 + \left(\frac{w_2}{A}\right)u_2 + \cdots + \left(\frac{w_n}{A}\right)u_n\end{aligned} \tag{2.74}$$

ونصبح في وضع الآن يمكننا من إثبات أن $\hat{b}$ غير متحيزة. وعلى وجه التحديد، من (2.74) لدينا:

$$E\left(\hat{b}\right) = b + E\left[\left(\frac{w_1}{A}\right)u_1\right] + E\left[\left(\frac{w_2}{A}\right)u_2\right] + \cdots + E\left[\left(\frac{w_n}{A}\right)u_n\right] \tag{2.75}$$

وطالما أن الحدود (w_1/A)،...،(w_n/A) تعتمد، فقط، على الـ n قيمة للمتغير المستقل X_t، وأن قيم المتغير المستقل وقيم الخطأ العشوائي يفترض أنها مستقلة عن بعضها، يصبح لدينا:

$$E\left(\hat{b}\right) = b + E\left(\frac{w_1}{A}\right)E(u_1) + E\left(\frac{w_2}{A}\right)E(u_2) + \cdots + E\left(\frac{w_n}{A}\right)E(u_n) \tag{2.76}$$

ونحن نعرف من نموذج الانحدار أن $E(u_t) = 0$. ولهذا، فإن القيم المتوقعة لكل الحدود ماعدا الأول تساوي الصفر، ومن ثم:

$$E\left(\hat{b}\right) = b \tag{2.77}$$

ولذا، فإن $\hat{b}$ هي مقدر غير متحيز لـ b.

وبالتحول الآن إلى $\hat{a}$، فإن لدينا من (2.55):

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} \tag{2.55}$$

وطالما أن $Y_t=a+bX_t+u_t$ فإنه يتبع ذلك:

$$\overline{Y} = a + b\overline{X} + \overline{u} \qquad (2.78)$$

وبإحلال (2.78) في (2.55)، نحصل على:

$$\hat{a} = a + b\overline{X} + \overline{u} - \hat{b}\overline{X} \qquad (2.79)$$

وبإحلال (2.74) بدلا من $\hat{b}$ في (2.79)، نحصل على:

$$\hat{a} = a + b\overline{X} + \overline{u} - b\overline{X} - \left(\frac{w_1\overline{X}}{A}\right)u_1 - \left(\frac{w_2\overline{X}}{A}\right)u_2 - \cdots - \left(\frac{w_n\overline{X}}{A}\right)u_n \qquad (2.80)$$

وبملاحظة أن $b\overline{X}$ تسقط مع $b\overline{X}$ - وبأخذ القيمة المتوقعة لـ $\hat{a}$ نحصل على:

$$E(\hat{a}) = a + E(\overline{u}) - E\left(\frac{w_1\overline{X}}{A}\right)E(u_1) - E\left(\frac{w_2\overline{X}}{A}\right)E(u_2) - E\left(\frac{w_n\overline{X}}{A}\right)E(u_n) = a \qquad (2.81)$$

وحيث إن $E(u_t) = 0 \, , E(\overline{u}) = 0$ فإن $\hat{a}$ أيضا، يكون مقدر غير متحيز.

تباينات $\hat{a}$ و $\hat{b}$: بعض الأساسيات

تتبقى قضية تباين كل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$. ونحن نعرف الآن أن طريقة المتغير المساعد قد انتجت مقدرين قيمتا وسطيهما هما قيمتا المعلمتين المقابلتين لهما. والسؤال الذي يبرز الآن هو عن المدى يتوقع أن تنحرف به $\hat{a}$ و $\hat{b}$ عن قيمتي الوسطين a و b. ونأمل بالطبع أن يتمخض اجراؤنا عن مقدرين تباينهما أقل نسبيا من تباين المقدرات التي تتولد عن طرق أخرى. وقبل أن نشتق صيغتي التباين لكل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$، فقد يكون من المفيد أن نناقش، باختصار، لماذا يوجد هناك تباين لهذين المقدرين في المقام الأول.

دعنا نبدأ بافتراض وجود عينتين تتكون كل واحدة منهما من خمس مشاهدات عن X و Y:

	عينة (١)	عينة (٢)
مشاهدة ١	$(Y_{11} \quad X_1)$	$(Y_{12} \quad Y_1)$
مشاهدة ٢	$(Y_{21} \quad X_2)$	$(Y_{22} \quad X_2)$
مشاهدة ٣	$(Y_{31} \quad X_3)$	$(Y_{32} \quad X_3)$
مشاهدة ٤	$(Y_{41} \quad X_4)$	$(Y_{42} \quad X_4)$
مشاهدة ٥	$(Y_{51} \quad X_5)$	$(Y_{52} \quad X_5)$

ويشير الرقم الأول في الدليل السفلي للمتغير Y إلى المشاهدة، في حين يشير الرقم الثاني إلى العينة. وفي مثالنا هذا، نفترض أن مجموعة قيم المتغير X واحدة في العينتين. وبالطبع، لايتضمن هذا الافتراض الخاص بقيم المتغير X أن قيم المتغير Y سوف تكون متساوية في العينتين. والسبب في ذلك هو أن قيم المتغير Y تعكس أثرين: (١) أثر قيمة X التي تعمل من خلال العلاقة المتوسطة $Y^m=a+bX$، و(٢) أثر حد الخطأ u الذي هو متغير عشوائي متوسطه صفر ويفترض فيه أنه مستقل عن المتغير X.

دعنا الآن نفحص المشاهدة الأولى في كل عينة من العينتين. ففي غياب الخطأ العشوائي، تتساوي Y_{11} مع Y_{12} طالما أن Y في كل حالة تعكس أثر X_1 فقط. وفي هذا المثال تأخذ كل من Y_{11} و Y_{12} القيمة $Y=a+bX_1$. ولو كان هذا صحيحا لكل المشاهدات فإنه من الواضح أن مجموعتي القيم المشاهدة لكل من X و Y سوف تكون متطابقة في العينتين، ومن ثم، فإن القيمتين اللتين يمكن حسابهما لكل من $\hat{a}$ و$\hat{b}$ سوف تتساويان في كل حالة مع القيمتين الفعليتين لـ a وb. غير أن ظهور خطأ عشوائي يتضمن أن القيمة المشاهدة للمتغير Y سوف تنحرف لحد ما عن القيمة التي تعكس أثر X فقط. وعلى وجه التحديد:

$$Y_{11} = a + bX_1 + u_{11} \qquad\qquad Y_{12} = a + bX_1 + u_{12}$$

حيث $u_{11} \neq u_{12}$ عموما. وهذا يعد صحيحا، أيضا، للقيم المشاهدة الأخرى للمتغير Y، حيث نجد، عموما، أن $Y_{t1} \neq Y_{t2}$. وطالما أن $\hat{a}$ و $\hat{b}$ تحسبان مباشرة من القيم المشاهدة X و Y، فمن الواضح، عموما أن $\hat{a}_1$ و $\hat{b}_1$ لن تساوي $\hat{a}_2$ و $\hat{b}_2$ على التوالي، حيث يشير الدليل السفلي إلى رقم العينة التي قدر $\hat{a}$ و $\hat{b}$ منها. ومن ثم، فإن الخطأ العشوائي سوف يؤدي إلى اختلاف القيمة المشاهدة لـ Y وبالتالي القيم المحسوبة لـ $\hat{a}$ و $\hat{b}$ من عينة لأخرى.

دعنا الآن نعمم ماسبق. افترض أن لدينا عدد P عينة مكونة من عدد محدد من المشاهدات عن X و Y، وأن مجموعة القيم الخاصة بالمتغير المستقل X نفسها في كل العينات، وأفترض، أيضا أن $\hat{a}_i$ و $\hat{b}_i$ هي قيمتي $\hat{a}$ و $\hat{b}$ المحسوبتان من العينة i. وطالما أن قيم Y تختلف من عينة لأخرى. ومن ثم، فإنه في ظل شروط عامة، لو أن P كانت لانهائية (أي إذا كان هناك عدد لانهائي من العينات) فإن المجاميع (A) و (B) في (2.82) سوف تساوي تباين $\hat{a}$ و $\sigma^2_{\hat{a}}$، وتباين $\hat{b}$ و $\sigma^2_{\hat{b}}$، وباحتمال يساوي الواحد الصحيح:

$$\frac{\sum_{i=1}^{p}(\hat{a}_i - a)^2}{P} \tag{2.82A}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{p}(\hat{b}_i - b)^2}{P} \tag{2.82B}$$

وسوف نشتق صيغا خاصة بتباين كل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$ في القسم التالي، وحتى هذه اللحظة يتعين ملاحظة أن التباينات المشار إليها أعلاه تسمى *التباينات المشروطة*. أي أن صيغ التباينات السابقة بنيت على أساس افتراض أن مجموعة قيم X هي نفسها عبر كل العينات. ومن ثم، فإن اختلاف قيم $\hat{a}$ و $\hat{b}$ عبر العينات ترجع تماما إلى اختلاف قيم الخطأ العشوائي من عينة لأخرى. وبالطبع، كما يتوقع المرء أن

قيم الصيغ الموضحة في المعادلـة (2.82) تعتمد جزئيا على قيـم X عموما. وفـي الواقع، فإن قيمة التباين المشروط تعطي الباحث مؤشرا عن درجة عدم التـأكـد الخاصة بالمقدر الذي بنى على بيانات معينة للمتغير X. وفي النهاية، فإننا نلاحظ أنه، لكون $E(\hat{a})=a$ و $E(\hat{b})=b$ فسوف تتحقق الصيغ التالية تحت شروط عامة:

$$\sum_{i=1}^{P}\frac{\hat{a}_i}{P}=a \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{P}\frac{\hat{b}_i}{P}=b \qquad (2.83)$$

باحتمال يساوي الواحد الصحيح.

تباين المقدرات*

سوف نشتق الآن صيغتين أولهما لتباين $\hat{b}$ وثانيهما لتبايـن $\hat{a}$. ولنبدأ أولا بالصيغة الأساسية لـ $\hat{b}$:

$$\hat{b}=\frac{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)\left(Y_t-\overline{Y}\right)}{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2}$$

ولقد أوضحنا في إثباتنا لخاصية عدم التحيز أن:

$$\hat{b}=b+\frac{w_1u_1}{A}+\frac{w_2u_2}{A}+\cdots+\frac{w_nu_n}{A} \qquad (2.74)$$

حيث:

$$w_t=\left(X_t-\overline{X}\right) \quad \text{و} \quad A=\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2$$

وحتى نستخـدم (2.74) في اشتقاق صيغة لتبايـن $\hat{b}$ و $\text{var}(\hat{b})$، فنحن في حاجـة لاستخدام علاقة أساسية عن تباين مجموع توليفة خطية من متغيرات عشوائية.

---

* سوف نبسط التعبير الذي نستخدمه، أحيانا، باستعمال تباينات $\hat{a}$ و $\hat{b}$، ويتعين على القارئ أن يتذكر أن هذه تباينات مشروطة. أرجع إلـى: J. Johnston, *Econometric Methods*, 2nd ed., 1972, pp. 18-20. لاشتقاق مماثل للنتائج الواردة نفسها في هذا القسم

وعلى وجه التحديد (هذه الصيغة مشتقة في ملحق الفصل الثاني) لو أن لدينا متغيرًا عشوائيا M معرف على النحو التالي:

$$M = a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \cdots + a_n Z_n \tag{2.84}$$

حيث إن الـ a's ثوابت، والـ Z's هي متغيرات عشوائية، فبافتراض أن Z's غير مرتبطة فإن:

$$\operatorname{var}(M) = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + a_n^2 \sigma_n^2 \tag{2.85}$$

حيث:

$$\sigma_j^2 = \operatorname{var}\left(Z_j\right)$$

وتصبح الآن أهمية مفهوم التباين المشروط واضحة. فعلى وجه التخصيص، لو أننا مهتمون بتباين $\hat{b}$ المقابل لمجموعة من قيم X المعطاة عبر عدد من العينات، فإن العدد n من قيم X يمكن اعتبارها، ببساطة، ثوابت. ونستخلص من (2.74) أن الـ n قيمة لـ w_t وقيمة A يمكن اعتبارها ثوابت كذلك. وفي ظل هذه الشروط، فإن $\hat{b}$ في (2.74) تصبح ببساطة توليفة خطية من أخطاء عشوائية. وطالما أن هذه الأخطاء العشوائية مستقلة، ومن ثم، غير مرتبطة مع بعضها بعضا افتراضا، كما أن لها التباين σ_u^2 نفسه، يصبح لدينا، بتطبيق (2.82):

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(\hat{b}\right) = \sigma_{\hat{b}}^2 &= \frac{w_1^2 \sigma_u^2}{A^2} + \frac{w_2^2 \sigma_u^2}{A^2} + \cdots + \frac{w_n^2 \sigma_u^2}{A^2} \\
&= \frac{\sigma_u^2}{A^2} \Sigma w_t^2 = \sigma_u^2 \frac{\Sigma\left(X_t - X\right)^2}{\left[\Sigma\left(X_t - X\right)^2\right]^2}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

ومن ثم، تكون نتيجتنا:

$$\operatorname{var}\left(\hat{b}\right) = \sigma_u^2 = \frac{\sigma_u^2}{\Sigma\left(X_t - X\right)^2} \tag{2.87}$$

وتمثل الصيغة (2.87) تباين $\hat{b}$ المقابل لأي مجموعة معينة من قيم X. وليس من

المفاجئ أن نجد أن تباين المقدر $\hat{b}$ يتغير مباشرة مع تباين الخطأ العشوائي، فـلأي مجموعة من قيم X_t، كلما زاد تباين الخطأ العشوائي كلما زاد تباين $\hat{b}$. وبديهيا، كلما زاد عدم التأكد في نموذج الانحدار الأساسي، انخفضت الثقة في المقدر الذي نحصل عليه.

وبالمثل، يمكن أن نشتق تباين $\hat{a}$ ، فالصيغة الأصلية لـ $\hat{a}$ هي:

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} \tag{2.55}$$

وبملاحظة أن $\overline{Y} = a + b\overline{X} + \overline{u}$ ، يمكن إحلال (2.74) بدلا من $\hat{b}$ في (2.55) لنحصل على:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= a + b\overline{X} + \overline{u} - b\overline{X} - \left(\frac{\overline{X}w_1}{A}\right)u_1 - \cdots - \left(\frac{\overline{X}w_n}{A}\right)u_n \\ &= a + \overline{u} - \left(\frac{\overline{X}w_1}{A}\right)u_1 - \cdots - \left(\frac{\overline{X}w_n}{A}\right)u_n \end{aligned} \tag{2.88}$$

وبالتعبير عن $\overline{u}$ كمايلي:

$$\overline{u} = \frac{u_1}{n} + \cdots + \frac{u_n}{n} \tag{2.89}$$

وإحلالها في (2.88) مع دمج الحدود نحصل على:

$$\hat{a} = a + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_n u_n \tag{2.90}$$

حيث:

$$\gamma_1 = \left[(1/n) - \overline{X}w_t / A\right]$$

ومن ثم، يتضح أنه، في ظل الافتراضات المتعلقة بقيـم X، فإن $\hat{a}$ تتناقص إلى توليفة خطية من أخطاء عشوائية. ولهذا فإنه بتطبيق (2.85) نجد أن تباين $\hat{a}$ يصبح:

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(\hat{a}) &= \sigma_{\hat{a}}^2 = \gamma_1^2\sigma_u^2 + \cdots + \gamma_n^2\sigma_u^2 \\ &= \sigma_u^2 \sum_{t=1}^{n} \gamma_t^2 \end{aligned} \tag{2.91}$$

والآن، لاحظ أن:

$$\begin{aligned}\Sigma\gamma_t^2 &= \Sigma\left[\frac{1}{n^2}+\left(\frac{\overline{X}^2}{A^2}\right)w_t^2-\left(2\frac{\overline{X}}{nA}\right)w_t\right] \\ &= \frac{1}{n}+\left(\frac{\overline{X}^2}{A^2}\right)\Sigma w_t^2-\left(\frac{2\overline{X}}{nA}\right)\Sigma w_t\end{aligned} \tag{2.92}$$

وحيث إن:

$$\Sigma w_t^2=\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2=A \tag{2.93}$$

و

$$\Sigma w_t=\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)=0 \tag{2.94}$$

فإن تباين $\hat{a}$ كما هو معطى في (2.91)، يمكن التعبير عنه كمايلي:

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{a}}^2 &= \sigma_u^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{A}\right) \\ &= \sigma_u^2\left(\frac{A+n\overline{X}^2}{nA}\right)\end{aligned} \tag{2.95}$$

وأخيرا، نجد من الملحق A في الفصل الأول أن:

$$\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2=\Sigma X_t^2-n\overline{X}^2$$

وبالإحلال مباشرة في (2.95)، نحصل على:

$$\sigma_{\hat{a}}^2=\frac{\sigma_u^2\Sigma X_t^2}{n\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2} \tag{2.96}$$

وكما هو في حالة $\sigma_{\hat{b}}^2$ نجد أنه، لأي مجموعة معطاة من قيم X_t، فإن قيمة $\sigma_{\hat{a}}^2$ تتغير بصورة مباشرة مع تباين الخطأ العشوائي σ_u^2.

وقد يكون من المفيد من هذا المنطلق أن نقوم بحساب التباينات الخاصة بـ $\hat{a}$

و $\hat{b}$ لعينة افتراضية من قيم X_t ولـσ_u^2. افترض أننا بناءً على معلومات أخرى نعرف أن تباين الخطأ العشوائي σ_u^2 يساوي عشرة، وافترض أن لدينا مجموعة من القيم المشاهدة لكل من X و Y كما هو موضح بالجدول رقم (٢-٦)

جدول رقم (٢-٦)

Y	X
8	3
12	6
14	10
15	12
15	14
18	15

ومن ثم، فإنه، في هذه الحالة:

$$\Sigma X_t^2 = 710, \quad \Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2 = 110, \quad n = 6$$

وباستخدام التعبيرات (2.87) و (2.96)، نجد أنه لهذه المجموعة من القيم الخاصة بـ X_t، يوجد لدينا:

$$\operatorname{var}\left(\hat{b}\right) = \frac{10}{110} = 0.09, \quad \operatorname{var}\left(\hat{a}\right) = \frac{10(710)}{6(110)} = 10.8$$

خاصية أصغر تباين

يتوافر لدينا الآن صيغتان لتباين كل من $\hat{a}$ و$\hat{b}$ وسوف تتضح أهميتهما في تقدير فترات الثقة عندما نأتي لمشكلة اختبار الفرضيات. ولكن قبل ذلك نريد أن نعرف أولا ما إذا كان هذان التباينان أكبر أم أصغر للتباينات المصاحبة لطرق تقدير أخرى لـ a و b. وفي هذا الصدد يمكن إثبات أنه *لاتوجد مقدرات خطية غير متحيزة* لـ a و b تتميز بتباينات أقل من تباين كل من $\hat{a}$ و$\hat{b}$ التي اشتقت في هذا الفصل. ونقصد بالمقدرات الخطية تلك المقدرات التي يمكن التعبير عنها بوصفها توليفات خطية من قيم المتغير التابع Y. فعلى سبيل المثال، نتذكر من (2.67) أن:

$$\hat{b} = \frac{\Sigma(X_t - \overline{X})Y_t}{\Sigma(X_t - \overline{X})^2} = \frac{\Sigma w_t Y_t}{A}$$
$$= \left(\frac{w_1}{A}\right)Y_1 + \cdots + \left(\frac{w_n}{A}\right)Y_n \qquad (2.97)$$

ومن (2.55)، نجد أن:

$$\hat{a} = \overline{Y} - \overline{X}\hat{b} = \frac{\Sigma Y_t}{n} - \overline{X}\frac{\Sigma w_t Y_t}{A}$$
$$= \Sigma \gamma_t Y_t = \gamma_1 Y_1 + \cdots + \gamma_n Y_n \qquad (2.98)$$

وعلى الرغم من أن إثبات خاصية أقل تباينا ليس صعبا، إلا أنه طويل لحد ما، ولهذا السبب، فقد اخترنا أن نضعه في ملحق بنهاية هذا الفصل. ونحن نشجع القارئ على محاولة تتبع خطوات الإثبات بنفسه، ولكن، إذا فضلت أن تأخذ هذا القول اعتقادا (في الأقل في الظروف الحالية) فلن يسبب لك هذا أيه مصاعب في فهم المادة العلمية القادمة.

والآن، لم يعد يتوافر لدينا طريقة لتقدير a وb فقط، بل لدينا من الأسباب مايجعلنا نعتقد أنها طريقة جيدة. فأولاً هي طريقة يتولد عنها مقدرات غير متحيزة للمعلمات، وثانيا تتمتع هذه المقدرات بخاصية أقل تباينا بين كل مجموعة المقدرات الخطية غير المتحيزة لكل من a وb.

مقدرات التباين

يوجد هناك معلومة إضافية لم ننته منها بعد تخص تباين $\hat{a}$ و$\hat{b}$. فبالرغم من أن لدينا صيغتين خاصتين بهما في المعادلتين (2.87) و (2.96) فإن هاتين الصيغتين تحتويان على σ_u^2 أي تباين الخطأ العشوائي في نموذج الانحدار. والمشكلة هنا أن σ_u^2 غير معروفة مثلها في ذلك مثل كل من a و b. وهذا يعني أنه، لكي نحصل على قيمتي التباين لكل من $\hat{a}$ و$\hat{b}$ فإنه يتعين علينا أولا أن نقدر σ_u^2. وسوف نتابع الآن

مشكلة اشتقاق مقدر لـ σ_u^2.

تذكر أولا أن: $$\sigma_u^2 = E(u_t - 0)^2 = E(u_t^2)$$

أي أن تباين الخطأ العشوائي يتمثل، ببساطة، في متوسط تربيعه. والآن، من نموذج الانحدار الأساس نعرف أن:

$$u_t = Y_t - a - bX_t = Y_t - Y_t^m \tag{2.35}$$

وافترض أننا عرفنا قيمتي a و b. وفي هذه الحالة لو أن لدينا عينة بحجم n من المشاهدات الخاصة بقيم X و Y يمكننا باستخدام (2.35)، اشتقاق عدد n من القيم لـ u_t. وعندئذ، سوف يكون من المعقول أن نقدر σ_u^2 عن طريق الحصول على القيمة المتوسطة لـ u_t^2 في العينة:

$$\frac{\Sigma u_t^2}{n} = \frac{\Sigma(Y_t - a - bX_t)^2}{n} \tag{2.99}$$

غير أن هذا لايمكن عمله في الواقع، لأننا، عموما، لايمكننا معرفة قيمتي a و b. والاجراء الواضح هو أن نحصل على مقدر لـ σ_u^2 وليكن $\hat{\sigma}_u^2$، من المعادلة (2.99) عن طريق إحلال $\hat{a}$ و $\hat{b}$ محل a و b. وعندئذ سوف يكون لدينا:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\Sigma(Y_t - \hat{a} - \hat{b}X_t)^2}{n-2} = \frac{\Sigma(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n-2} = \frac{\Sigma \hat{u}_t^2}{n-2} \tag{2.100}$$

ويلاحظ أن مقام المعادلة (2.100) هو (n-2) وليس n، الأمر الذي يوضح (كما ناقشنا من قبل) أن لدينا، فقط، (n-2) درجة حرية في البسط. ولقد فقدنا درجتي حرية لأننا أحللنا مقدرين محل معلمتين. وبالرغم من أننا لن نثبت ذلك هنا، إلا أن هذه الحالة تتضمن أن:

$$E(\hat{\sigma}_u^2) = \sigma_u^2 \tag{2.101}$$

حيث $\hat{\sigma}_u^2$ هو مقدر غير متحيز لـσ_u^2.

ويتوافر لدينا الآن مقدر لتباين الخطأ العشوائي، ومن ثم، فإن تباين $\hat{a}$ و$\hat{b}$ يمكن الحصول عليهما، ببساطة بإحلال $\hat{\sigma}_u^2$ محل σ_u^2 في المعادلتين المقابلتين (2.87) و (2.96)وعلى وجه التحديد فإن مقدري تباين كل من $\hat{a}$ و$\hat{b}$ يصبحان:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_u^2 \Sigma X^2}{n\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2} \qquad (2.102)$$

وأخيرا، فإنه نتيجة لأن $\hat{\sigma}_u^2$ غير متحيزة من المعادلة (2.101)، فإن $\hat{\sigma}_{\hat{a}}^2$ و $\hat{\sigma}_{\hat{b}}^2$ مقدران غير متحيزين.

مثال

لقد استخدمنا سابقا في جدول رقم (٢-٥) بيانات عن الاستهلاك والدخل المتاح للولايات المتحدة الأمريكية لحساب قيم $\hat{a}$ و$\hat{b}$ لدالة الاستهلاك المقدرة. وربما نتذكر أن المعادلة المقدرة كانت:

$$C = 13 + 0.89Y_d \qquad (2.56)$$

ونحن الآن في وضع يمكننا فيه حساب القيم المقدرة للتباينات المقابلة. فأولا، بالإشارة إلى الجدول رقم (٢-٧) يمكننا حساب قيمة$\hat{\sigma}_u^2$:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{92}{10-2} = 11.5$$

ومن الجدول (٢-٥)، نجد أن:

$$\Sigma\left(Y_{dt} - \overline{Y}_d\right)^2 = 85{,}810$$

ومن ثم، نجد:

$$\Sigma\left(Y_{dt}^2\right) = 2,289,172$$

وبالتالي:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}}^2 = \frac{11.5(2,289,172)}{10(85,810)} = 31$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 = \frac{11.5}{85,810} = 0.0001$$

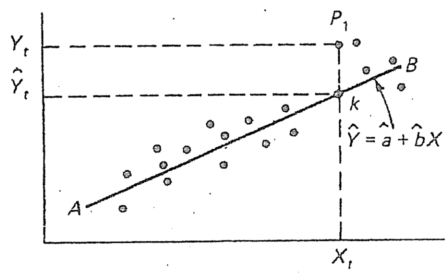
خاصية أصغر المربعات لكل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$

يوجد هناك خاصية أخيرة للمقدريـن $\hat{a}$ و $\hat{b}$ نريد أن نشير إليها. فلكي نـقـدر العلاقة بين X و Y يوجد هناك مدخل آخر وهو أن نحاول توليف خط لنقاط الانتـشـار بحيث يكون اقرب مايمكن إلى هذه النقاط. وافترض على سبيل المثال أنه علينا الآن اختيار $\hat{a}$ و $\hat{b}$ اللتين تجعلان الخط AB في الشكل (٢-١٦) يمثل نقاط الانتشار أفضل تمثيل.

جدول رقم (٢-٧)

Year	C	$\hat{C}$	$\hat{u} = C - \hat{C}^a$	$\hat{u}^2 = \left(C - \hat{C}\right)^2$
1960	325	325	0	0
1961	335	337	-2	4
1962	355	356	-1	1
1963	375	373	2	4
1964	401	403	-2	4
1965	433	434	-1	1
1966	466	469	-3	9
1967	492	500	-8	64
1968	537	538	-1	1
1969	576	574	2	4
				$\Sigma\left(C_t - \hat{C}\right)^2 = 92$

بسبب تقريب الأرقام فإن $\Sigma\hat{u}_t$ ليس صفرا.



شكل رقم (٢-١٦)

وفي هذا الصدد، دعنا نأخذ نقطة مثل P_1 بشكل الانتشار (٢-١٦)، وبالطبع، فإنها لن تقع، عموما، على الخط حرفيا، وإنما بسبب وجود الخطأ العشوائي u_t، فإنها تقع أعلى أو أسفل الخط AB. ويلاحظ هنا أن المسافة الرأسية التي تنحرف بها النقطة عن الخط وهي P_1k في هذه الحالة، تمثل الفرق بين القيمة المشاهدة للمتغير Y (Y_t) والتي تقابل القيمة X_t، والقيمة المحسوبة للمتغير نفسه Y وهي $\hat{Y}_t$، حيث يمكن الحصول على $\hat{Y}_t$ من العلاقة المقدرة الممثلة بالخط AB:

$$P_1k = \left(Y_t - \hat{Y}_t\right) = \left(Y_t - \hat{a} - \hat{b}X_t\right) \tag{2.103}$$

افترض الآن أننا نريد وضع الخط AB حيث يدني المسافة التي تمثل انحرافات القيم المشاهدة عنه. وإحدى المشاكل التي تواجهنا عند تدنية مجموع هذه الانحرافات هي أن $0 < \left(Y_t - \hat{Y}_t\right)$ للنقاط التي تقع فوق الخط، هذا في حين أن $0 > \left(Y_t - \hat{Y}_t\right)$ للنقاط التي تقع تحت الخط AB. ومن ثم، فإنه من الممكن أن يوجد هناك انتشار واسع جدا للنقاط حول الخط بالرغم من أن المجموع الجبري للانحرافات يكون صغير جدا وربما صفرا. وفي الحقيقة، يمكننا تدنية هذا المجموع حرفيا بوضع الخط AB في أعلى مستوى ممكن طالما أن هذا سوف ينتج عنه قيمة سالبة كبيرة للمجموع $\Sigma\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)$. وإحدى الطرق التي تتجاوز هذه المشكلة هي أن نربع هذه الانحرافات (فتصبح جميعها موجبة) ثم، ندني مجموع هذه المربعات.

وتسمى هذه *بطريقة المربعات الصغـرى* للحصول على مقـدري a و b. وتتمثل المشكلة عندئذ في إيجاد الخط الذي يتوسط نقاط الانتشار حيث يجعل المجموع:

$$S = \Sigma\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2 = \Sigma\left(Y_t - \hat{a} - \hat{b}X_t\right)^2$$

أقل مايمكن.

وباستخدام حساب التفاضل. تعد هذه مشكلة مباشرة لتحديد قيمتي $\hat{a}$ و $\hat{b}$ اللتان تدنيان $E\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2$. وينصح القارئ الذي لديه فكرة عن المبادئ الأساسية لحساب التفاضل أن يقوم بعمل الاشتقاقات المطلوبة التي هي معروضة أصلا في ملحق هذا الفصل. وكل الذي نريدك أن تعرفه هو أننا عندما نحسب مقدري a و b باستخدام طريقة المربعات الصغرى، فإننا نحصل بالضبط على النتائج نفسها التي توصلنا إليها باستخدام طريقة المتغير المساعد. أي أن مقدرات طريقة المربعات الصغرى هي، أيضا:

$$\hat{b} = \frac{\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)\left(Y_t - \overline{Y}\right)}{\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2}$$

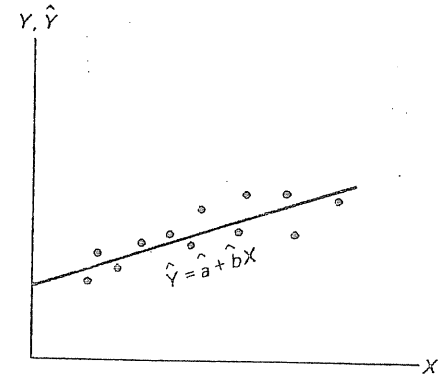
$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X}$$

ويعد هذا أمرًا مهمًا لأنه عادة مايمر القارئ في الأدب الاقتصادي على المعادلات التي أوضح المؤلف أنه توصل إليها بطريقة المربعات الصغرى، ومن الضروري أن يعرف أن هذه المعادلات متطابقة مع تلك المعادلات التي التوصل إليها باستخدام إجراء التقدير الذي طور في هذا الفصل. ولقد حدث أن مثل هذا الإجراء يؤدي إلى تدنية مجموع مربعات انحرافات القيم المشاهدة عن القيم المحسوبة لـ Y.

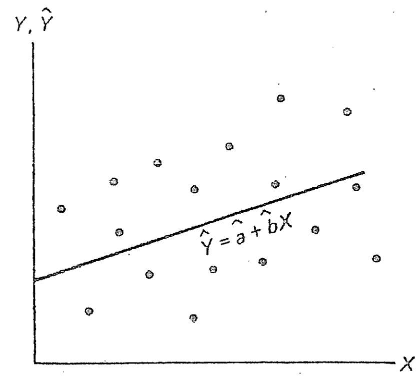
(٢-٦) قياس القوة التفسيرية لنموذج الانحدار

أصبح لدينا الآن طريقة لتقدير ما أسميناه بالعلاقة المتوسطة بين متغيريـن، حيث تمكننا هذه الطريقة من الحصول على مقدرين للمعلمـتـين a و b في نموذج

الانحدار. غير أنه لايوجد لدينا، حتى الآن، مقياس لدرجة قوة هذه العــلاقــة. على سبيل المثال، يلاحظ أن العلاقة بين Y و X في الشكلين رقم (٢-١٧) و (٢-١٨) واحدة، غير أن هاتين العلاقتين تختلفان في جانب مهم ألا وهو أن انتشار النقاط في الشكل الأول أقرب بكثير من الخط المستقيم منها بالشكل الثاني. وبمعنى آخر، لدينا تمثيل أدق "tighter fit" للنقاط المشاهدة على خط الانحدار.



شكل (٢-١٧)



شكل (٢-١٨)

ومن ثم، بالإضافة إلى وجود مقدرين لـ a وb من المهم أن نطور قياسا لهذا الجانب الآخر من العلاقة بين X و Y*، أي أننا نريد معرفة إلى أي مدى يعد نموذجنا جيدًا. ونحن، عموما، نحاول أن نفسر التغير في القيم المشاهدة للمتغير Y_t باستخدام هذا النموذج. وإذا لم يكن لدينا نموذج فليس بوسعنا تفسير تحركات Y وأقصى مايمكن عمله في هذه الحالة هو أن تأخذ $\overline{Y}$ على أنها القيمة المتنبأ بها لـ Y_t بغض النظر عن قيمة X_t. والسؤال الآن هو ما إذا كان نموذجنا يمكنه أن يسمح لنا بعمل شئ أفضل من هذا، وإذا كان هذا هو الأمر، فبأي مقدار. ولهذا السبب، فسوف نقدم مقياسا للمقدرة التفسيرية لنموذج الانحدار الذي لدينا. أي أننا سوف نقدم مقياسا لمقدار التغير في Y الذي يمكن تفسيره بدلالة العلاقة الخطية المقدرة بين X و Y.

معامل التحديد The Coefficient of Determination

دعنا الآن نفحص شكل الانتشار (٢-١٩) والذي قدرنا له خط الانحدار الممثل بالمعادلة $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$. ويتضح بالشكل متوسطي العينة $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ للمتغيرين X و Y. وتوضح (2.45) إحدى خصائص المعادلة المقدرة والتي تتمثل في:

$$\overline{Y} = \hat{a} + \hat{b}\overline{X}, \tag{2.45}$$

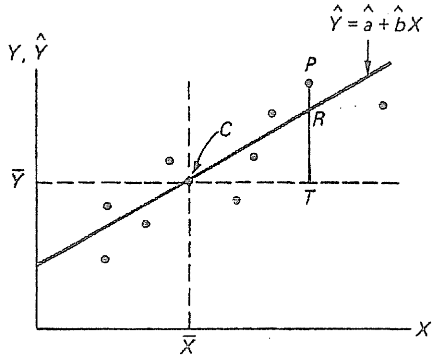
وتعني هذه المعادلة أن خط الانحدار يمر عبر النقطة ($\overline{X}$ و $\overline{Y}$) التي هي النقطة "C" في الشكل رقم (٢-١٩). وبالنظر بعد ذلك إلى المشاهدة الممثلة بالنقطة P، نجد أن انحراف قيمة Y عند النقطة P عن قيمة متوسطها بالعينة $\overline{Y}$ يساوي PT. كما سوف نلاحظ أن جزءا من انحراف Y عن وسطها $\overline{Y}$ يمكن تفسيره بمعادلة الانحدار. وعلى وجه التحديد، فإن المعادلة المقدرة تفسر الجزء RT وتترك الجزء PR من الانحراف بدون تفسير. ويمكن التعبير عن هذه المسافات كمايلي:

* في الحقيقة، يتوافر لنا مقياسا لهذا الأمر، وذلك من المعالجة السابقة وهو تباين الخطأ العشوائي. فعلى سبيل المثال، يوضح شكل رقم (٢-١٧) أن هناك تباينا أقل للخطأ العشوائي بالمقارنة بالشكل رقم (٢-١٨).

الانحراف الكلي لـ Y_t عن متوسط العينة = $PT = Y_t - \overline{Y}$

انحراف Y_t عن $\overline{Y}$ المفسر = $RT\left(\hat{Y}_t - \overline{Y}\right)$

انحراف Y_t عن $\overline{Y}$ غير المفسر= $PR\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)$



شكل (٢-١٩)

ومع وجود هذه الخلفية، يمكننا الآن أن نشتق مقياسا للمقدرة التفسيرية لمعادلة الانحدار.

فلنتذكر أولا من المعادلة (2.38) أن:

$$Y_t = \hat{Y}_t + \hat{u}_t \tag{2.38}$$

وبتجميع جانبي المعادلة (2.38) نحصل على:

$$\Sigma Y_t = \Sigma \hat{Y}_t + \Sigma \hat{u}_t \tag{2.104}$$

ولكن حيث إننا افترضنا مسبقا أن $\Sigma \hat{u}_t = 0$ ، فإن:

$$\Sigma Y_t = \Sigma \hat{Y}_t \tag{2.105}$$

وبقسمة طرفي المعادلة (2.105) على n نحصل على:

$$\overline{Y} = \overline{\hat{Y}} \tag{2.106}$$

وسوف تكون هذه النتائج مفيدة فيما بعد. دعنا نعود الآن إلى (2.38)، فبتربيع طرفيها، نحصل على:

$$Y_t^2 = \hat{Y}_t^2 + \hat{u}_t^2 + 2\hat{u}_t \hat{Y}_t \tag{2.107}$$

وبتجميع مشاهدات العينة، نحصل على:

$$\Sigma Y_t^2 = \Sigma \hat{Y}_t^2 + \Sigma \hat{u}_t^2 + 2\Sigma\left(\hat{u}_t \hat{Y}_t\right) \qquad (2.108)$$

وبما أن:

$$\Sigma\left(\hat{u}_t \hat{Y}_t\right) = 0$$

ويتبع هذا بحكم أننا فرضنا الشرط

$$\Sigma \hat{u}_t = 0 \qquad \text{و} \qquad \Sigma\left(\hat{u}_t X_t\right) = 0$$

في طريقة التقدير. وطالما أن: $\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$، فإن:

$$\Sigma\left(\hat{u}_t \hat{Y}_t\right) = \hat{a}\Sigma\hat{u}_t + \hat{b}\Sigma\left(\hat{u}_t X_t\right) = 0$$

وهذا يعني أن الحد الأخير في المعادلة (2.108) يساوي الصفر، وبالتالي تصبح هذه المعادلة:

$$\Sigma Y_t^2 = \Sigma \hat{Y}_t^2 + \Sigma \hat{u}_t^2 \qquad (2.109)$$

وبطرح $n\overline{Y}^2$ من المعادلة (2.109) نحصل على:

$$\Sigma Y_t^2 - n\overline{Y}^2 = \left(\Sigma \hat{Y}_t^2 - n\overline{Y}^2\right) + \Sigma \hat{u}_t^2 \qquad (2.110)$$

وحيث إننا قد أوضحنا أن $\overline{Y} = \overline{\hat{Y}}$، فإنه يمكننا التعبير عن (2.110) بالصيغة التالية:

$$\Sigma\left(Y_t - \overline{Y}\right)^2 = \Sigma\left(\hat{Y}_t - \overline{Y}\right)^2 + \Sigma \hat{u}_t^2 \qquad (2.111)$$

وتعد المعادلة (2.111) مفيدة جدا لخدمة أغراضنا فيما يتعلق بقياس المقدرة التفسيرية، ولذا، فإنه من المهم أن نفحص بعناية معنى كل حد من حدودها. ويلاحظ في هذا الصدد أن الجانب الأيسر من هذه المعادلة يعبر عن مجموع مربعات انحرافات Y_t عن متوسطها المقدر من العينة. ويعد هذا مقياسا للتغير في المتغير التابع الذي نبحث عن تفسير له من خلال معادلة الانحدار. وهذا يعني بديهيا أننا نريد أن يشرح نموذج الانحدار لدينا لماذا لايبقى المتغير التابع Y_t ثابتا دائما. دعنا الآن نسمي الحد الأول على الجانب الأيسر من المعادلة (2.111) المجموع الكلي للمربعات Total Sum of Squares (TSS). ويأتي الدور الآن لفحص الجانب الأيمن من المعادلة

(2.111). وطالما أن $\hat{u}_t = \left(Y_t - \hat{Y}_t\right)$، فإن $\hat{u}_t$ تشير إلى الجزء الذي لم يمكن تفسيره. أي أن $\hat{u}_t$ تمثل انحراف القيمة المشاهدة للمتغير Y_t عن القيمة المحسوبة من معادلة الانحدار والتي تأخذ الصيغة التالية: $\hat{Y}_t = \left(\hat{a} + \hat{b}X_t\right)$، ويشير الحد الأخير في المعادلة (2.111) $\Sigma\hat{u}_t^2$ إلى مجموع مربعات الأخطاء، أي الجزء غير المفسر من التغير في Y_t. وسوف نطلق على هذا المجموع تسمية «مجموع مربعات الأخطاء» Error Sum of Squares (ESS). ويمثل الفرق بين TSS و ESS الحد $\left(\hat{Y}_t - \bar{Y}\right)^2$ في المعادلة (2.111)، ومن الواضح أنه يعبر عن الجزء الذي يفسره نموذج الانحدار من المجموع الكلي للمربعات. وسوف نسمي هذا الجزء «مجموع مربعات الانحدار» Regression Sum of Squares (RSS) (أي مجموع المربعات المفسر بنموذج الانحدار). وتتكون لدينا بذلك معادلة مقابلة للمعادلة (2.111) هي:

$$TSS = RSS + ESS \tag{2.112}$$

وقد يكون من المفيد أن نشرح هذه المعادلة باستخدام الشكل رقم (٢-١٩). فإذا أخذنا القيمة المشاهدة للمتغير Y_t الممثلة بالنقطة P، فإننا نجد أن PT تمثل انحراف Y_t عن متوسط العينة $\overline{Y}$ بينما تمثل PR انحراف Y_t عن خط الانحدار، وبمعنى آخر، ذلك الجزء من انحراف Y_t عن $\overline{Y}$ الذي لايمكن تفسيره بدلالة خط الانحدار. أما عن المكون الآخر لـ PT الذي هو، على وجه التحديد، RT فإنه يمثل ذلك الجزء من Y_t الذي يفسره خط الانحدار. ويعني كل ما أوضحناه في المعادلة (2.111) أننا إذا حددنا مايقابل المسافات PT، PR و RT لكل نقطة من نقاط العينة، فإن مجموع مربعات المسافات المقابلة لـ PT يساوي مجموع مربعات المسافات المقابلة لـ PR مضافا إليها مجموع مربعات المسافات المقابلة لـ RT. ونلخص ماسبق كما يلي:

$$TSS = (Y_t - \overline{Y})^2 \quad = \quad \text{المجموع الكلي للمربعات}$$

$$RSS = \left(\hat{Y}_t - \bar{Y}\right)^2 = \quad \text{مجموع مربعات الانحدار (المفسرة)}$$

$$ESS = \Sigma\hat{u}_t^2 \quad = \quad \text{مجموع مربعات الأخطاء (غير المفسرة)}$$

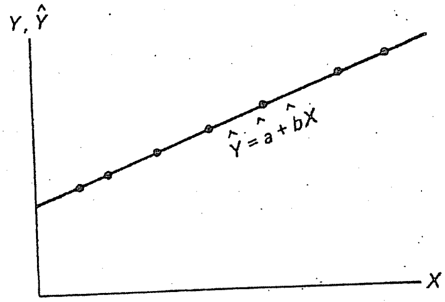
حيث : $TSS = RSS + ESS$. وطالما أن $ESS \geq 0$ و $RSS \geq 0$ ، فإنه يترتب على ذلك أن تكون $TSS \geq ESS$ و $TSS \geq RSS$. ولكي نقيس المقدرة التفسيرية لمعادلة الانحدار، فإننا في حاجة لمقياس يوضح النسبة التي يمكن لمعادلة الانحدار أن تفسرها من التغير في Y_t، ويتمثل هذا المقياس في:

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{ESS}{TSS}, \tag{2.113}$$

ويسمى R^2 معامل التحديد. ولو أن معادلة الانحدار تفسر كل التغير في Y_t (أي أن $\hat{Y}_t = Y_t$ لكل قيم t)، فإن $\hat{u}_t = 0$ ، ومن ثم، فإن $ESS = 0$. وفي هذه الحالة تكون $RSS = TSS$، وبالتالي فـإن $R^2 = 1$. وطالما أن $Y_t = \hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$ فـإن Y_t سوف تكون على علاقة تامة مع X_t. ولهذا، فإن جميع نقاط شكل الانتشار بين Y_t و X_t سوف تقع على خط مستقيم (أي أن جميع قيم حد الخطأ سوف تساوي صفر). وتوضح هذه الحالة بالشكل (٢-٢٠).

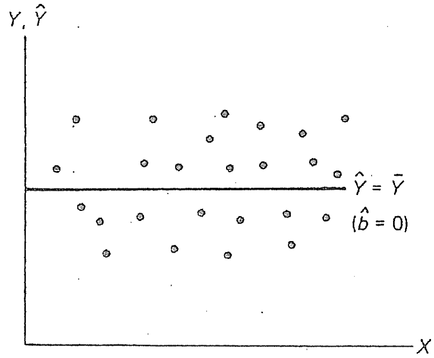
وعلى النقيض من ذلك، لو أن معادلة الانحدار لاتفسر أي جزء، فـإن ESS تصل لحدها الأقصى، وعلى وجه التحديد فإن $ESS = TSS$ ومن ثم، فـإن $RSS = 0$، $R^2 = 0$، فإن $\hat{Y}_t = \overline{Y}$ لكل قيم t. وهذا يتضمن أن $\hat{b} = 0$. وللتحقق من ذلك، دعنا نحل $\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\,\overline{X}$ في $\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$ لكي نحصل على:

$$\hat{Y}_t = \overline{Y} + \hat{b}\left(X_t - \overline{X}\right) \tag{2.114}$$



شكل (٢-٢٠)

وحيث إن قيم X_t ليست كلها متساوية، أي أن $X_t \neq \overline{X}$، فإن هذا يعني أن كون $\hat{Y}_t = \overline{Y}$ يتضمن أن $\hat{b} = 0$. وفي هذه الحال، لايعد النموذج ملائما قطعيا حيث إن القيم المحسوبة لـ Y_t وبالتحديد $\hat{Y}_t$ لاتعتمد البته على قيم المتغير X_t ويوضح الشكل (٢-٢١) مثل هذه الحالة.



شكل (٢-٢١)

وفي الحالات العادية مثل تلك التي يوضحها شكلان (٢-١٧) و (٢-١٨) فإن معادلة الانحدار تفسر بعض التغير في Y وليس كله، ومن ثم، فإن R^2 تقع بين الصفر والواحد الصحيح. وكلما زادت النسبة التي تفسرها معادلة الانحدار من التغير في Y (أي كلما اقتربت نقاط الانتشار من خط الانحدار) اقتربت قيمة R^2 من الواحد الصحيح، وكلما كانت العلاقة بين Y و X أضعف كلما اقتربت قيمة R^2 من الصفر. ولعل هذا يعني أن R^2 توضح النسبة التي تفسرها المعادلة المقدرة من التغير في المتغير التابع. ومن ثم، فلو أن $R^2 = 0.63$، مثلا، فإن هذا يعني أن العلاقة المقدرة تفسر ٦٣٪ من التغير في المتغير ا تابع.

$$R^2 = \hat{\rho}^2_{Y,\hat{Y}}$$

لقد قدمنا في القسم الأول من هذا الفصل مقياسا لمدى قوة الاقتران الخطي بين متغيرين، وأسميناه معامل الارتباط. عرف هذا المعامـل بأنه يتمثل في نسبة

التغاير بين المتغيرين إلى حاصل ضرب انحرافيهما المعياريين. ويمكننا، أيضا أن نستخدم معامل الارتباط في قياس قوة العلاقة في معادلة الانحدار. فعلى سبيل المثال، يمكن لمعامل الارتباط بين Y_t و $\hat{Y}_t$ أي $\rho_{Y,\hat{Y}}$ أن يقيس مدى اقتراب Y_t و$\hat{Y}_t$. ومن ثم، يمكن أن يؤخذ مقياسا لمدى مقدرة نموذج الانحدار على تفسير قيم Y_t.

وللأسف، فإن $\rho_{Y,\hat{Y}}$ سوف يكون، عموما، غير معلوم. ومن ثم، يتعين تقديره. واتساقا مع المعادلة (2.16) في القسم الأول من هذا الفصل، فإن مقدر $\rho_{Y,\hat{Y}}$ سوف يكون:

$$\hat{\rho}_{Y,\hat{Y}} = \frac{\Sigma\left(Y_t - \overline{Y}\right)\left(\hat{Y}_t - \overline{Y}\right)}{\sqrt{\Sigma\left(Y_t - \overline{Y}\right)^2 \Sigma\left(\hat{Y}_t - \overline{Y}\right)^2}} \qquad (2.115)$$

طالما أن $\overline{Y} = \overline{\hat{Y}}$.

وسوف نثبت الآن أن $\hat{\rho}^2_{Y,\hat{Y}} = R^2$ أي أن R^2 هي، ببساطة، مربع مقدر معامل الارتباط بين Y_t و$\hat{Y}_t$. ولذا لايعد R^2 و $\hat{\rho}_{Y,\hat{Y}}$ مقياسان بديلين لقوة العلاقة بين Y و $\hat{Y}$.

دعنا الآن نفحص بسط المعادلة (2.115)، فنحن نتذكر من الملحق A بالفصل الأول أنه، لأي متغيرين، وليكونا Z_{1t} و Z_{2t}، بمتوسطي عينة $\overline{Z}_1$ و Z_2 نجد أن:

$$\Sigma\left(Z_{1t} - \overline{Z}_1\right)\left(Z_{2t} - \overline{Z}_2\right) = \Sigma\left(Z_{1t} - \overline{Z}_1\right)Z_{2t}$$

حيث يمكن تبسيط بسط المعادلة (2.115) فيما يلي:

$$\Sigma\left(\hat{Y}_t - \overline{Y}\right)Y_t$$

وبما أننا نعرف أن $Y_t = \hat{Y}_t + \hat{u}_t$ فإننا نحصل على:

$$\Sigma\left(\hat{Y}_t - \overline{Y}\right)Y_t = \Sigma\left(\hat{Y}_t - \overline{Y}\right)\left(\hat{Y}_t - \hat{u}_t\right) = \Sigma\left(\hat{Y}_t - \overline{Y}\right)\hat{Y}_t$$

طالما أن:

$$\Sigma\left(\hat{Y}_t\hat{u}_t\right)=0 \text{ و } \Sigma\left(\hat{u}_t\bar{Y}\right)=\bar{Y}\Sigma\hat{u}_t=0$$

وأخيرا، يمكن وضع البسط في الصيغة التالية:

$$\Sigma\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)Y_t=\Sigma\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)=\Sigma\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)^2=RSS.$$

وبملاحظة أن مقام $\hat{\rho}_{Y,\hat{Y}}$ هو:

$$\sqrt{\Sigma\left(Y-\bar{Y}\right)^2\Sigma\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)^2}=\sqrt{(TSS)(RSS)}$$

فإن:

$$\rho_{Y,\hat{Y}}=\frac{RSS}{\sqrt{(RSS)(TSS)}}=\frac{\sqrt{RSS}}{\sqrt{TSS}} \tag{2.116}$$

ومن المعادلة (2.116) نلاحظ أن $R^2=\hat{\rho}^2_{Y,\hat{Y}}$

مثال

قد يكون من المفيد، لغرض التوضيح، أن نعود مرة أخرى لدالة الاستهلاك التي قدرناها سابقا في هذا الفصل ونوجد قيمة R^2. ولتبسيط الحسابات، دعنا نستخدم الصيغة التالية:

$$R^2=\frac{\Sigma\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)^2}{\Sigma\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2}=\frac{\Sigma\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)\hat{Y}_t}{\Sigma\left(Y_t-\bar{Y}\right)\hat{Y}_t}=\frac{\Sigma\hat{Y}_t^2-n\bar{Y}^2}{\Sigma Y_t^2-n\bar{Y}^2}, \tag{2.117}$$

حيث إن $\bar{Y}=\bar{\hat{Y}}$ كما أثبتنا سابقا.

والخطوة التالية لحساب R^2 هي أن نستخدم معادلة الانحدار المقدرة لحساب القيم المقدرة لـ Y (أي $\hat{Y}_t$) ويوضح الجدول رقم (٢-٨) هذه الحسابات.

جدول رقم (٢-٨)[a]

$$\hat{C} = 13 + 0.89\ Y_d$$

C	Y_d	C2	$\hat{C}$	$\hat{C}^2$
325	350	105,625	325	105,625
335	346	112,225	337	113,569
355	385	126,025	356	126,736
375	405	140,625	373	139,129
401	438	160,801	403	162,409
433	473	187,489	434	188,356
466	512	217,156	469	219,961
492	547	242,064	500	250,000
537	590	288,369	538	289,444
576	630	331,776	574	329,476

$$\Sigma\hat{C}^2 = 1,912,155$$

$$\Sigma\hat{C}^2 = 1,924,705$$

$$\overline{C}^2 = 184,900$$

$$n\overline{C}^2 = 1,849,000$$

$$R^2 = \frac{\Sigma\hat{C}_i^2 - n\overline{C}^2}{\Sigma C_i^2 - n\overline{C}^2} = 0.99$$

(a) لأن قيم المعاملات في معادلة الانحدار مقربة إلى رقمين عشريين، فقط، فإن قيمة R^2 المحسوبة من الأرقام أكبر من الواحد بشئ بسيط نتيجة أخطاء التقريب. ولو أن المعاملات حسبت باستخدام كل الأرقام العشرية الموجودة فإن قيمة R^2 سوف تكون 0.99

ومن الواضح أن قيمة R^2 لدالة الاستهلاك المقدرة هي 0.99، الأمر الذي يشير إلى وجود اقتران قوي جدا بين C و Y_d. وهي تعني أن معادلة الانحدار المقدرة تفسر ٩٩٪ من التغير في C، وأن ١٪، فقط، يبقى غير مفسر. وهذا يؤكد النتيجة التي توصلنا إليها سابقا من خلال النظر إلى شكل الانتشار وخط الانحدار بالشكل (٢-١٤).

(٢-٧) توضيح: تقدير دالة تكلفة

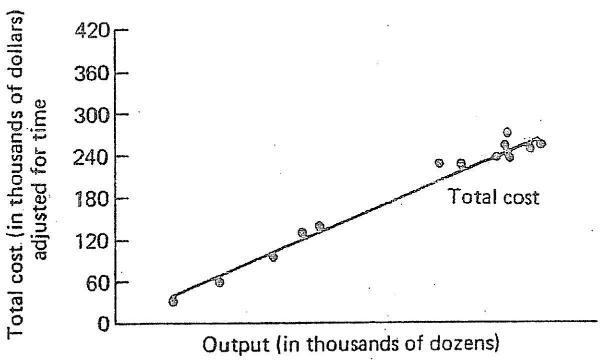
ونختتم هذه المقدمة عن نموذج الانحدار البسيط بدراسة تطبيقية من الأدب

الاقتصادي. ومن النقاط التي تركز نظرية الاقتصاد الجزئي للمنشأة على توضيحها دالة تكاليف المنشأة. فمعظم المراجع تقدم مناقشة مطولة على وجه الخصوص للعلاقة بين التكاليف ومستوى إنتاج المنشأة. ويمكن صياغة دالة التكاليف في الصورة العامة التالية:

$$C = f(Q),$$

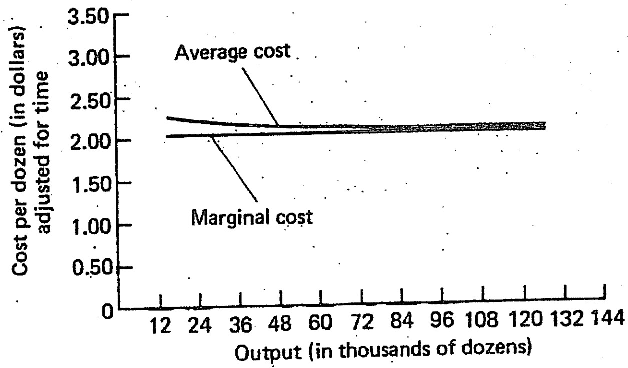
حيث C التكاليف و Q حجم ناتج المنشأة وللحصول على مزيد من المعرفة عن شكل هذه العلاقة، فإن بعض الاقتصاديين استخدموا تحليل الانحدار في تقدير دوال التكلفة من بيانات فعلية عن التكاليف والناتج.

ومن الدراسات المبكرة والرائدة في هذا المجال دراسة Joel Dean* عن دالة التكاليف لمصنع جوارب حريرية. فلقد قام Dean بجمع بيانات شهرية عن إنتاج المصنع وتكاليف. ويعرض الشكل (٢-٢٢) هذه البيانات في شكل انتشار. ويلاحظ أن النقاط تقترب في انتشارها إقترابا كبيرا من الخط المستقيم بالشكل. وهذا يعني أن الصيغة الخطية سوف تصف دالة تكاليف المصنع جيدا. وباستخدام نموذج انحدار المتغيرين نجد أن:



شكل رقم (٢-٢٢)

* Joe; Dean "Statuslical Cost Function of a Hosiery Mill." *Journal of Business Studies in Business Administration*, vol. X1, No. 4 (July 1941), pp. 1-116



شكل رقم (٢-٢٣)

$$C_i = a + bQ_i + u_i \qquad (2.118)$$

حيث: C= التكاليف الكلية شهريا مقاسة بالألف دولار،

Q= الكمية المنتجة شهريا مقاسة بالألف دستة من أزواج الجوارب،

u= خطأ عشوائي.*

وتتضمن الدالة (2.118) بعض النقاط المهمة لطبيعة تكاليف المصنع. فحيث إن هذه الدالة هي دالة تكاليف كلية فإن التكلفة الحدية المتوقعة والمصاحبة لكل وحدة مضافة شهريا من الناتج تساوي b وحدة نقدية. ووفقا لوحدات القياس المستخدم، فإن هذا يعني أنه إذا زاد الناتج الشهري بمقدار ألف دستة، فإن التكاليف الشهرية سوف تزداد بمقدار b ألف دولار. ويتضمن هذا بدوره أن كل زيادة في الناتج الشهري بمقدار دستة واحدة تؤدي إلى زيادة التكاليف الشهرية بمقدار b دولار. وتوضح المعلمة a أن التكاليف الشهرية سوف تساوي a ألف دولار إذا كان مستوى الناتج الشهري مساوياً صفر. أي أنها تمثل التكاليف الثابتة الشهرية للمنشأة. ومن الملاحظ أنه إذا كانت a موجبة فإن متوسط التكلفة الثابتة الشهرية للمصنع سوف تتناقص مع تزايد الناتج، طالما أن التكاليف الثابتة تتوزع على وحدات إنتاج أكثر.

* وهذا كمثال لتوضيح القياسات فقيمة C= ٢٧ تقابل ٢٧,٠٠٠ $، وقيمة Q= ١٧ تقابل ١٧,٠٠٠ دستة أو (١٢×١٧٠٠٠) = ٢٠٤,٠٠٠ زوج جوارب

وقدر Dean معادلة الانحدار (2.118) باستخدام طريقة المربعات الصغرى التي تكافئ طريقة المتغير المساعد التي عرضت في هذا الفصل، فجاءت على النحو التالي:

$$C = 2.936 + 2.00Q$$
$$R^2 = 0.95 \quad (2.119)$$

وكما يوضح شكل الانتشار، فإن توفيق الخط للنقاط جيد، ويبلغ معامل التحديد 0.95 وهو مايعني أن المعادلة المقدرة (2.119) تفسر ٩٥٪ من التغير المشاهد في التكاليف الكلية. وبالإضافة إلى ذلك، فإن القيم المقدرة للمعاملات تمدنا ببعض المعلومات المحددة عن التكاليف. فهي توضح أن التكاليف الثابتة للمصنع تبلغ ٢٩٣٦$ شهريا وأن التكلفة الحدية لدستة أزواج الجوارب تساوي ٢$. ويوضح الشكل (٢-٢٣) دالتي التكلفة الحدية والمتوسطة. وتعد مثل هذه المعلومات مهمة ليس، فقط، للاقتصادي الذي يدرس علاقات التكلفة، وإنما أيضا لإدارة المنشأة.

ملحق: إثباتات لثلاث نتائج

لقد أشرنا في المتن إلى ثلاث نتائج، إحداها تتعلق بتباين مجموع المتغيرات العشوائية غير المرتبطة، وأخرى تتعلق بخاصية التباين الأدنى لمقدرات طريقة المتغير المساعد، والثالثة تتعلق بخاصية المربعات الصغرى للمقدرات، وسوف نقدم هنا اثباتات لهذه النتائج.

تباين مجموع المتغيرات العشوائية

دعنا نفترض أن X_1، X_2، ...، X_n متغيرات عشوائية، وأن a_1، a_2، ...، a_n ثوابت، وأن متوسطات هذه المتغيرات وتبايناتها على التوالي هي μ_1، μ_2، ...، μ_n و σ_1^2 ، σ_2^2 ، ...، σ_n^2 .

ودعنا نعرف Y كمايلي:

$$Y = a_0 + a_1X_1 + \cdots + a_nX_n \quad (2A.1)$$

ويتعين ملاحظة أنه، طالما أن Y مكونة من توليفة خطية من مجموعة متغيرات عشوائية، فإن Y نفسها تعد متغيرًا عشوائيًا. وسوف نوضح مايلي:

الأول: إذا كانت X_1، X_2، ...، X_n متغيرات عشوائية غير مرتبطة، وبجعل σ_Y^2 تشير إلى تباين Y عندئذ:

$$\sigma_Y^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2 \qquad (2A.2)$$

وتعني المعادلة (2A.2) أنه إذا كانت قيم المتغيرات X's غير مرتبطة خطيا مع بعضها بعضا، فإن تبايـن Y يساوي مجموع حاصل ضرب تباينات المتغـيـرات X، كل مضروبا بمربع معامله المرتبط به.

ولكي نثبت النتيجة الأولى، يتـعـين أولا مـلاحـظـة أن مـتـوسـط Y، أي $E(Y) = \mu_Y$، هو، ببساطة، متوسط الجانب الأيمن من المعادلة (2A.1):

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E(a_0) + E(aX_1) + \cdots + E(a_nX_n) \\ &= a_0 + a_1\mu_1 + a_2\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n \end{aligned} \qquad (2A.3)$$

وحيث إن تباين Y يسـاوي $E(Y - \mu_Y)^2$ بالتعريف، وباستخدام كل من (2A.3) و (2A.1) فإننا نحصل على:

$$\sigma_Y^2 = E(Y-\mu_Y)^2 = E\left[a_1(X_1-\mu_1) + a_2(X_2-\mu_2) + \cdots + a_n(X_n-\mu_n)\right]^2 \quad (2A.4)$$

وبفك المعادلة (2A.4)، نحصل على نوعين من الحدود، النوع الأول حدود مربعة والنوع الثاني مجموعة من حواصل ضرب تقاطعية:

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 = E\Big[&a_1^2(X_1-\mu_1)^2 + a_2^2(X_2-\mu_2)^2 + \cdots + a_n^2(X_n-\mu_n)^2 \\ &+ \cdots + 2a_3a_4(X_3-\mu_3)(X_4-\mu_4) + \cdots\Big] \end{aligned} \qquad (2A.5)$$

ويلاحظ أن الحد الأخير في (2A.5) هو حاصل ضرب مجموعة من العناصر. وقد يوجد هناك عدد كبير من هذه العناصر، وفقا لمدى كبر n. والنقطة الأساسية هنا هي، طالما أن المتغيرات X's غير مرتبطة افتراضا فإن القيمة المتوقعة لحاصل ضرب كل عنصرين من عناصر الحد الأخير سوف تساوي صفرًا. وللتوضيح، فإن هـذا يعني لـ (2A.5) أن:

$$E\left[2a_3a_4\left(X_3-\mu_3\right)\left(X_4-\mu_4\right)\right]=2a_3a_4E\left(X_3-\mu_3\right)\left(X_4-\mu_4\right)$$
$$=2a_3a_4\operatorname{cov}\left(X_3,X_4\right)=0 \qquad (2A.6)$$

حيث $cov(X_3, X_s)$ هي التغاير بين X_3 و X_4، وبما أن القيمة المتوقعة لحاصل ضرب كل عنصرين تقاطعين تساوي الصفر، فإن المعادلة (2A.5) تصبح:

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= E\left[a_1^2\left(X_1-\mu_1\right)^2+a_2^2\left(X_2-\mu_2\right)^2+\cdots+a_n^2\left(X_n-\mu_n\right)^2\right]\\ &=a_1^2E\left(X_1-\mu_1\right)^2+a_2^2E\left(X_2-\mu_2\right)^2+\cdots+a_n^2E\left(X_n-\mu_n\right)^2 \qquad (2A.7)\\ &=a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2+\cdots+a_n^2\sigma_n^2\end{aligned}$$

المقدرات ذات أصغر تباين لكل من a و b*

لقد أوضحنا في المتن أن طريقة المتغير المساعد يتولد عنها مقدرات $\hat{a}$ و $\hat{b}$ غير متحيزة لمعاملات نموذج الانحدار. وسوف نثبت الآن أن *مقدري طريقة المتغير المساعد $\hat{a}$ و $\hat{b}$ يتصفان بكون تباينهما المشروط هو الأقل من بين مجموعة المقدرات الخطية غير المتحيزة للمعلمتين a، b. ويعرف هذا في الأدب القياسي بنظرية جاوس – ماركوف* *Gauss-Markov theorem*.

ويلاحظ في البداية، من المتن، أن:

$$\hat{b}=\frac{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)Y_t}{\Sigma\left(X_t-\overline{X}\right)^2}=\frac{\Sigma w_tY_t}{A} \qquad (2A.8)$$
$$=\Sigma Q_tY_t$$

حيث $Q_t = w_t/A$, $w_t = (X_t - \overline{X})$ و $A = \Sigma(X_t - \overline{X})^2$. وبالمقابل فقد ورد في المتن أن:

* يعتمد هذا القسم على: J. Johnston, *Econometric Methods*, 2nd ed. (New York: McGraw-Hill, 1972), pp. 18-23.

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} \\ &= \Sigma\gamma_t Y_t \end{aligned} \tag{2A.9}$$

حيث $\gamma_t = (1/n) - \overline{X}(w_t / A)$. ويلاحظ، كما في المتن، أن كلا من γ_t و Q_t يعتمد على قيم X_t فقط. ولذا، فلو أن قيم X_t كانت معطاة يمكننا اعتبار قيم γ_t و Q_t ثوابت.

ونريد الآن أن نحدد خاصتين للأوزان Q_t. فمن الملاحظ أولا أن:

$$\Sigma Q_t = \Sigma\left(\frac{X_t - \overline{X}}{A}\right) = \frac{1}{A}\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right) = 0 \tag{2A.10}$$

وثانيا:

$$\Sigma(Q_t X_t) = \frac{1}{A}\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)X_t = \frac{1}{A}\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2 = \left(\frac{1}{A}\right)A = 1, \tag{2A.11}$$

حيث، كما نذكر، فإن:

$$\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)X_t = \Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)\left(X_t - \overline{X}\right) = \Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2 = A$$

ولقد أوضحنا في المتن أن:

$$\sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\sigma_u^2}{\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2} \tag{2A.12}$$

ويمكن التعبير عن (2A.12) على النحو التالي:

$$\sigma_{\hat{b}}^2 = \sigma_u^2 \Sigma Q_t^2 \tag{2A.13}$$

حيث:

$$\Sigma Q_1^2 = \frac{\Sigma w_t^2}{A^2} = \frac{\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2}{A^2} = \frac{A}{A^2} = \frac{1}{A} = \frac{1}{\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2}$$

دعنا نفترض الآن أن $\hat{b}^*$ هي *أي* مقدر خطي آخر للمعلمة b، فعليه:

$$\hat{b}^* = \Sigma(Q_t + v_t)Y_t = \hat{b} + \Sigma v_t Y_t \tag{2A.14}$$

حيث v_t (مثـل Q_t) دالة في X_t ولكن ليس فـيY_t. وتقرر المعادلـة (2A.14)، ببساطة، أن $\hat{b}^*$ تساوي $\hat{b}$ مضافا إليها قيمة أخرى تمثل الفرق بينهما. ومع الأخذ في الاعتبار أن$\Sigma Q_t = 0$ و $\Sigma(Q_t X_t) = 1$، فإنه يتبع ذلك أن تكون:

$$\begin{aligned} \hat{b}^* &= \Sigma(Q_t + v_t)Y_t = \Sigma(Q_t + v_t)(a + bX_t + u_t) \\ &= a\Sigma(Q_t + v_t) + b\Sigma(Q_t + v_t)X_t + \Sigma(Q_t + v_t)u_t \\ &= a\Sigma v_t + b + b\Sigma(v_t X_t) + \Sigma(Q_t + v_t)u_t \end{aligned} \tag{2A.15}$$

ومع تذكر أن قيم Q_t و v_t تعتمد فقط، على قيمX_t، ولذا، فإنها قيم ثابتة، فإن القيمة المتوقعة لـ b تصبح:

$$E\left(\hat{b}^*\right) = a\Sigma v_t + b + b\Sigma(v_t X_t) \tag{2A.16}$$

حيث إن $E(u_t) = 0$.

ولو أن $\hat{b}^*$ مقدر غير متحيز للمعلمة b، فلابد أن يتحقق الشرط التالي:

$$E\left(\hat{b}^*\right) = b.$$

ولكي يكون $\hat{b}^*$ غير متحيز، فإن هذا يتضمن من المعادلة (2A.16)، أن تكون:

$$\Sigma v_t = 0 \text{ و } \Sigma(v_t X_t) = 0 \tag{2A.17}$$

وبهذه المعلومات، يمكننا إعادة كتابة الصيغة الأخيرة للمعادلة (2A.15) كما يلي:

$$\begin{aligned} \hat{b}^* &= b + \Sigma(Q_t + v_t)u_t \\ &= b + (Q_1 + v_1)u_1 + (Q_2 + v_2)u_2 + \cdots + (Q_n + v_n)u_n \end{aligned} \tag{2A.18}$$

ويمكن الآن أن نستخدم النتيجة الأولى التي سبقت الإشارة إليها بالقسم الأول من هذا الملحق للحصول على صيغة لتبايـن $\hat{b}^*$. فطالمـا أن $\hat{b}^*$ توليفة خطية مـن قيمu_t، وبما أن قيم $u_t s$ غير مرتبطة لأنها مستقلة، فإن تباين $\hat{b}^*$ يساوي:

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\hat{b}^*} &= (Q_1+\upsilon_1)^2\sigma^2_u + \cdots + (Q_n+\upsilon_n)^2\sigma^2_u \\ &= \sigma^2_u(Q_1+\upsilon_1)^2 \\ &= \sigma^2_u\left[\Sigma Q_t^2 + \Sigma \upsilon_t^2 + 2\Sigma(Q_t\upsilon_t)\right] \\ &= \sigma^2_u\left[\Sigma Q_t^2 + \Sigma \upsilon_t^2\right]\end{aligned} \tag{2A.19}$$

بحكم أن:

$$2\Sigma(Q_t\nu_t) = \frac{2\Sigma(X_t-\overline{X})\nu_t}{A} = \frac{2}{A}\left[\Sigma(X_t\nu_t) - \overline{X}\Sigma\nu_t\right] = 0 \tag{2A.20}$$

ومن (2A.13) و (2A.19) يمكن أن نرى أن:

$$\begin{aligned}\sigma^2_{b^*} &= \sigma^2_u\Sigma Q_t^2 + \sigma^2_u\Sigma\nu_t^2 \\ &= \sigma^2_{\hat{b}} + \sigma^2_u\Sigma\nu_t^2\end{aligned} \tag{2A.21}$$

وحيث إنه من الواضح أن الحد الأخير في (2A.21)، سيكون موجبا إذا كانت بعض قيم$v_t \neq 0$، يمكن أن نخلص إلى:

$$\sigma^2_{\hat{b}^*} \geq \sigma^2_{\hat{b}} \tag{2A.22}$$

ومن الملاحظ أن $\sigma^2_{\hat{b}}$. سوف يساوي $\sigma^2_{\hat{b}}$ إذا كانت $\Sigma v_t = 0$، فقط، وهذا لايحدث إلا إذا كانت جميع قيم$v_t = 0$، وعندئذ، فإن$\hat{b} \equiv \hat{b}^*$. ولقد أوضحنا بذلك أن أي مقدر خطي آخر غير متحيز لـ b سوف يكون تباينه المشروط أكبر من تباين المقـدر الخطي لطريقة المتغير المساعد. وباستخدامنفس الإجراء يمكن إثبات النتيجة نفسهـا للمقدر الخطي الخاص بالمعلمة *a* لطريقة المتغير المساعد. وسوف نترك هذا التمرين للقارئ المهتم.

خاصية أصغر المربعات لكل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$

كما هو موضح في المتن فإن مقدرات المربعات الصغرى تم اشتقاقهـا عـن

طريق تصغير المجموع التالي لـ $\hat{a}$ و$\hat{b}$:

$$S = \Sigma\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2 = \Sigma\left(Y_t - \hat{a} - \hat{b}X_t\right)^2 \qquad (2A.23)$$

وبمفاضلة المعادلة (2A.23) جزئيا لكل من $\hat{a}$ و$\hat{b}$ ومساواة النتيجة بالصفر نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \hat{a}} &= 2\Sigma\left(Y_t - \hat{a} - \hat{b}X_t\right)(-1) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \hat{b}} &= 2\Sigma\left(Y_t - \hat{a} - \hat{b}X_t\right)(-X_t) = 0 \end{aligned} \qquad (2A.24)$$

وبضرب المعادلتين (2A.24) في ($-\frac{1}{2}$) مع التبسيط، نحصل على:

$$\Sigma Y_t = n\hat{a} + \hat{b}\Sigma X_t \quad or \quad \overline{Y} = \hat{a} + \hat{b}\overline{X} \qquad (2A.25)$$

و

$$\Sigma\left(Y_t X_t\right) = \hat{a}\Sigma X_t + \hat{b}\Sigma X_t^2 \qquad (2A.26)$$

وحيث إن (2A.25) متطابقة مع المعادلة الطبيعية الأولى (2.45)، والمعادلة (2A.26)، بعد قسمتها على n، متطابقة مع المعادلة الطبيعية الثانية (2.50) كما وردت في المتن، فإننا نستخلص من ذلك أن مقدرات طريقة المربعات الصغرى متطابقة مع مقدرات طريقة المتغير المساعد.

أسئلة

١ - أثبت أنه يمكن التعبير عن مقدر الحد الثابت $\hat{a}$ على النحو:

$$\hat{a} = \Sigma\left(\frac{1}{n} - \overline{X}W_t\right)Y_t$$

حيث:

$$W_t = \frac{\left(X_t - \overline{X}\right)}{\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2}$$

٢ - اعتبر نموذج الانحدار التالي $Y_t=a+bX_t+u_t$، حيث تأخذ المشاهدات حول X_t و Y_t القيم التالية:

X_t	Y_t
4	8
2	6
3	5
1	7
2	4

قدر كلا من a، b وσ_u^2.

٣ - اقترح أحد محللي الاستهلاك أن دالة الاستهلاك $C_t=a+bY_t$ لافائدة منها، لأن النقاط (Y_t و C_t) في شكل الانتشار لاتقع جميعها علي خط مستقيم. كما اقترح، أيضا، أنه أحيانا، تزداد Y_t في الوقت الذي تنخفض فيهC_t. واستنتج من ذلك أن C_t ليست دالة فيY_t. قوم هذه العبارة.

٤ - دع $Y=5\text{-}3X$. اثبت أن معامل الارتباط $\rho_{X,Y} = \sigma_{X,Y} / \sigma_X\sigma_Y$ يكون مساويا لـ (-١).

٥ - دع قيم تباينات المتغيـرات X_1، X_2 و X_3 هي 1، 3 و 5 على الترتيـب. افترض أن هذه المتغيرات مستقلـة. دع$Y = 13 - 2X_1 + 3X_2 - 10X_3$. أوجد تباين Y.

٦ - يقال إن الأسر متوسطة الدخل ومرتفعته تترك المدن وتذهب للإقـامـة فـي الضواحي لأن معدلات الضرائب داخل المدن أعلى من معدلاتها في الضواحي القريبة منها. افترض أنه يتوافر لنا بيانات حول عدد من المدن في سنة معينة. كون هذه الفرضية في شكل نموذج انحدار. (هناك أكثر من طريقة واحـدة لعمل ذلك !).

٧ - اعتبر النموذج التالي:

$$Y_t = a_1 + b_1X_t + u_t \qquad (1)$$

حيث إن الخطأ u_t يعتمد على X_t على النحو التالي:

$$u_t = a_2 + b_2 X_t + \varepsilon_t \qquad (2)$$

حيث إن ε_t هو خطأ عشوائي مستقل عن X_t ويحقق، أيضا افتراضاتنا المعتادة كافة. افترض أن $b_2 > 0$. بين أن b_1 في (١) يقلل تأثير X_t على Y_t.

٨ - افترض في السؤال السابع أنه تم إحلال معادلة (2) محل المعادلة:

$$u_t = a_2 + b_2 X_t^2 + \varepsilon_t$$

هل سينتهك في هذه الحال أي من افتراضاتنا المعتادة لنموذج الانحدار الثاني الذي يربط Y_t وX_t؟

٩ - كون نموذج انحدار يصف العلاقة بين عمر الطفل وطوله. ناقش هل يعاني هذا النموذج بعض أوجه القصور أم لا؟

١٠- اعتبر النموذج التالي:

$$Y_t = a + bX_t + u_t$$

حيث يوجد لدينا أخطاء في القياس نتيجة عدم ملاحظتنا لـ X_t مباشرة. بدلا من ذلك، افترض أننا لاحظنا:

$$X_t^m = X_t + \varepsilon_t$$

حيث ε_t هو خطأ عشوائي مستقل عن X_t، وله قيمة متوسطة صفرية. ويحقق افتراضاتنا المعتادة الكافة. إضافة إلى ذلك افترض أن ε_t و u_t مستقلان. ويتضمن هذا استقلال X_t^m وu_t.

(أ)- كون نموذج الانحدار الذي يربط Y_t بـX_t^m.

(ب) - هل تم انتهاك أي من افتراضاتنا المعتادة في هذا النموذج؟

الفصل الثالث

تطبيقات نموذج الانحدار

أوضحنا في الفصل السابق نموذج الانحدار الأساسي ذي المتغيرين، وأوجدنا طريقة تقدير معلماته. والآن يمكننا، عن طريق استخدام عينة من القيم المشاهدة للمتغيرين المرتبطين، إيجاد مقدرات لكل من a و b في معادلة الانحدار، وإيجاد كذلك تباينات هذه المقدرات. كما يمكننا أيضا، قياس قوة العلاقة بين المتغيرين عن طريق حساب نسبة التغير في المتغير التابع التي يمكن أن تفسرها معادلة الانحدار المقدرة. وسنبين في هذا الفصل كيف يستخدم الاقتصاديون هذه الطرق لاختبار الفرضيات حول السلوك الاقتصادي لعمل التوقعات.

(٣-١) اختبار الفرضيات وفترات الثقة : مقدمة

وضعنا في الفصل الثاني فرضية أن الإنفاق الاستهلاكي يعتمد على مستوى الدخل المتاح، وقدرنا الشكل الخطي لهذه العلاقة، ووجدنا باستخدام السلاسل الزمنية للبيانات الكلية للولايات المتحدة الأمريكية أن القيمة المقدرة للميل الحدي للاستهلاك موجبة وتنحصر بين الصفر والواحد الصحيح، كما أن تقديرنا لـ a كان موجبا أيضا. وأشرنا إلى أن هذه النتائج تتفق مع النظرية الكينزية المعروفة بدالة الاستهلاك.

ولكن، هل يمكن الركون إلى هذه النتائج ؟ على سبيل المثال، ما مدى ثقتنا في كون المعلمة a موجبة في الحقيقة ؟ مثلا، لو كان تقديرنا لـ a هو 0.001، فهل يكون هذا مقنعا بالقول إن a موجبة وليست صفرا.

وبالمقابل، افترض أننا، وبناء على المعلومات المسبقة والمتاحة، نعتقد أن b =.75، فهل يكون تقديرنا لـ b، تحديدا 0.89، غير متسق مع الافتراض المسبق بأن b =.75 ؟ النقطة الأساسية هنا هي أن التفاوت بين تقديرنا لـ b، 0.89، وبين القيمة المفترضة لها b=.75 نشأ من حجم *العينة* التي استخدمناها في التقدير. وقياسا على ذلك إذا كان طول الأفراد في الولايات المتحدة″10 ′5 مثلا، فلاينبغي لنا أن نتوقع أن الطول المتوسط لمجموعة عشوائية من ثلاثة أفراد (مثلا) يكون″10 ′5 بالضبط.

هذه هي مشاكل اختبار الفرضيات. نهتم، أساسا، في هذه المشاكل بمعرفة هل هناك تناسق بين تقديراتنا للمعلمات والفرضيات المسبقة أم لا. وهناك مشكلة وثيقة الصلة باختبارات الفرضيات هي المرتبطة بفترات الثقة. فتقدير معين لـ b، تحديدا 0.89. ويدعي هذا تقدير النقطة point estimate. فإذا ما اضطررنا لتفسير هذا التقدير، فيحتمل أن نقول أن الميل الحدي للاستهلاك «حوالـي» 0.89 أي يحتمل ألانتوقع أن تكون قيمة b مساوية 0.89 بالضبط.

لذلك نرغب أن نبني فترة ثقة حول تقديرنا بالنقطة التي نشعر، بدرجة من الثقة، أنها تحتوي على قيمة b . وتؤدي نظرية فترات الثقة التي سوف نطورها أدناه هذه المهمة. إنها تمكننا من استخدام تقدير النقطة لإيجـاد *التقدير بالفترة*، ومثل هذه الفترة *مدى من القيم* تؤدي، بسبب طريقة بناؤها، إلى توقع أن قيمة المعلمة موضع الاهتمام مشمولة ضمن هذه الفترة، عند مستوى معين من الثقة، وعلـى سبيل المثال، يمكن أن تظهر عبارة فترة الثقة على النحو التالي: باحتمـال قـدرة 0.95، تحتوي الفتـرة($\hat{b} \pm 0.07$) على قيمة المعلـمـة b. سوف نبين، أخيـرا، أن الطريقة الوحيدة التي نحصل بها على ثقة أو تأكيد أكبر بأن فترتنا تحتوي على b، مع *ثبات العوامل الأخرى*، تكون من خلال توسيع تلك الفترة. فإذا كان لدينـا 95% مستوى ثقة بأن b تقع في حدود 0.07 من b ، ولكننا نحتاج إلى فترة تشتمل علـى b باحتمال قـدره 99%، فإنه ينبغي أن تكون الفترة الجـديـدة أوسـع مـن ($\hat{b} - 0.07 , \hat{b} + 0.07$) على سبيل المثال، يمكن أن تكون فتـرة الـثـقـة 99% هي ($\hat{b} - 0.10 , \hat{b} + 0.10$).

وترتبط مشاكل اختبار الفرضيات وفترات الثقة ببعضها بعضا على النحو التالي: افترض، كما ذكرنا من قبل، أننا نرغب في اختبار الفرضية بأن $(b = 0.75)$. يفترض أن نقوم بتقدير b، وبعدئذ، نرى إلى أي مدى يكون هذا التقدير قريبا من 0.75. فإذا كان الاختلاف بين تقديرنا وبين 0.75 «صغيرا» جدا فإننا سنشعر بأن النتائج تدعم الفرضية. ولكن من الناحية الأخرى إذا كان تقديرنا يختلف عن 0.75 بدرجة «كبيرة» فإننا سوف نستنتج أن الفرضية لم تتأكد بنتائجنا المشاهدة، وسيكون لدينا سبب جيد للاعتقاد بأن $b \neq 0.75$. وحتى يمكننا بناء تحليل ذي معنى من هذا النوع، ينبغي أن نكون قادرين على التمييز بين الاختلافات «الصغيرة» و «الكبيرة» بين القيم المفترضة والقيم المقدرة للمعلمة. وعلى سبيل فكرة تمهيدية عامة، فإننا نميز بين ماهو كبير وماهو صغير من هذه الاختلافات استنادا إلى بناء فترة ثقة للمعلمة موضع السؤال وملاحظة هل تكون القيمة المفترضة للمعلمة تقع داخل هذه الفترة أم لا. وعلى سبيل المثال، إذا كان الاحتمال هو 0.95 أن الفترة$(\hat{b} + 0.07)$ تحتوي على b، فإننا سوف نرفض الفرضية بدرجة ثقة 95% بأن $(b = 0.75)$ إذا كانت b، بناء على بياناتنا، قدرت بـ 0.89. وطالما أن اتساع الفترة يرتبط بالثقة التي نشعر بها حول احتوائها على قيمة المعلمة، فإنه يتبع ذلك أن درجة الثقة التي نشعر بها في نتائج اختبارنا للفرضيات يعتمد مباشرة على الاحتمال المرتبط بفترتنا للثقة.

افتراض إضافي

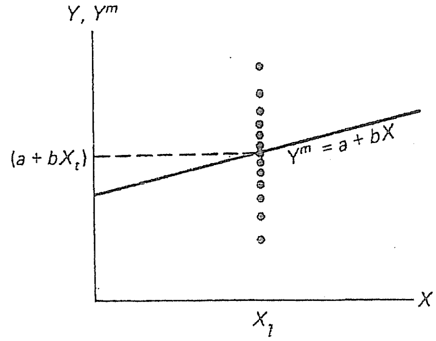
لكي يمكننا اختبار الفرضيات وبناء فترات الثقة لقيم المعلمات في نموذج الانحدار، ينبغي علينا أولا أن نضيف المزيد لـ خصائص الخطأ العشوائي u_t في نموذجنا. ففي الفصل الثاني وضعنا أربعة فروض حول خصائص الأخطاء العشوائية: فهي متغيرات عشوائية ذات قيم متوقعة صفرية، ولها التباين نفسه، ولها تغايرات صفرية وأخيرا هي مستقلة عن المتغيرات الموجودة في الطرف الأيمن من المعادلة. والآن، فمن المفيد أن نضيف افتراضا خامسا: سنفترض أن الأخطاء العشوائية

موزعة توزيعا طبيعيا، أي أن كثافتها، أو دالة احتمالها، هو المنحنى الطبيعي. ولما كان التوزيع الطبيعي له معلمتان فقط الوسط الحسابي والتباين، فإن المتغير الذي يكون موزعا توزيعا طبيعيا يمكن تحديده بوساطة الحسابي وتباينه. ويمكننا أن نلخص بعض الافتراضات المرتبطة بالخطأ العشوائيu_t بوساطة الرموز$N(0, \sigma^2)$ وبالكلمات، تشير$N(0, \sigma_u^2)$ إلى متغير موزع توزيعا طبيعيا بوسط صفر وتباين σ_u^2. *

وباستخدام هذا الافتراض الإضافي الخاص بطبيعة الخطأ العشوائي يمكننا أن نوضح بالرسم السمات الأساسية لنموذج الانحدار كما في الشكل (٣-١). فلأي قيمة معطاة من X ، X_t، مثلا تكون القيمة المتوسطة لـ Y هي $(a+bX_t)$ ولكن لوجود الخطأ العشوائي فإنه لايمكن تحديد Y تماما بوساطة وسطه الحسابي. فإذا كان لدينا مشاهدات متكررة عن Y تناظر جميعها القيمة المعينة لـX (X_t) فلن نتوقع تساوي قيم Y المشاهدة بقيمتها المتوسطة $(a+bX_t)$. فضلا عن ذلك، وطالما أن السبب الوحيد لانحرافات القيم المشاهدة عن وسطها الحسابي هو الخطأ العشوائي، فإنه يترتب على ذلك أن تتوزع هذه الانحرافات توزيعا طبيعيا إذا كان الخطأ العشوائي موزعًا توزيعا طبيعيا كذلك. على سبيل المثال، إذا كان لدينا شكل لانتشار المشاهدات المكررة لـ Y والمناظرة لـ X_t، فإننا نتوقع أنها ستشبه انتشار النقاط في الشكل (٣-١) حيث تكون البيانات (المشاهدات) أكثر كثافة بالقرب من القيمة المتوسطة لـ Y، $(a + bX_t)$، عنه بعيدا عنها. وسبب ذلك هو أن ارتفاع منحنى الكثافة الطبيعي يتناقص تدريجيا كلما تحركنا بعيدا عن قيمته المتوسطة (حيث تكون القيمة المتوسطة في هذه الحال هي الصفر). **

* $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ هو الرمز المعتاد الذي يشير إلى أن المتغير X موزع توزيعا طبيعيا متوسطه μ_X وتباينه σ_X^2 وينبغي عدم الخلط بين N هذه مع n الصغيرة التي تشير إلى حجم العينة.

** لتبسيط العرض، سنفترض، من الآن فصاعدا في هذا الكتاب، أن الخطأ العشوائي موزع توزيعا طبيعيا. ولكن كثيرا من النتائج المذكورة في هذا الكتاب لاتتطلب من الناحية الفنية هذا الافتراض.



شكل (٣-١)

دعنا الآن نتجه إلى مقدراتنا، $\hat{a}$ و$\hat{b}$، لمعلمات نموذج الانحدار. تذكر أنه عندما قمنا بإيجاد تباينات هذه المقدرات من الفصل الثاني أوضحنا أن$\hat{a}$ و$\hat{b}$ توليفات خطية من الأخطاء العشوائية $u_1, u_2, ..., u_n$* وذلك لقيم معطاة من المتغير المستقل. وتوجد نظرية في الإحصاء تنص على أن التوليفات الخطية من متغيرات طبيعية تكون، ايضا، موزعة توزيعا طبيعيا. وينتج عن ذلك أنه لأي مجموعة من قيم X_t، فإن كلا من$\hat{a}$ و$\hat{b}$ ينبغي أن تكون موزعة توزيعا طبيعيا. وقد وجدنا في الفصل الثاني أن القيم المتوسطة لكل من$\hat{a}$ و$\hat{b}$ هي a و b على الترتيب. كما أوجدنا صيغا (في 2.87 و 2.96) لتبايناتها. وباستخدام هذه النتائج مضافا إليها افتراضنا الإضافي بأن u موزعة توزيعا طبيعيا، فإنه يمكننا أن نستنتج أن:

$$\hat{a} \quad is \quad N\left(a, \frac{\sigma_u^2 \Sigma X_t^2}{n\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2}\right) \tag{3.1}$$

$$\hat{b} \quad is \quad N\left(b, \frac{\sigma_u^2}{\Sigma\left(X_t - \overline{X}\right)^2}\right) \tag{3.2}$$

* انظر المعادلات (2.74) و (2.90).

هذه النتيجة مفيدة خاصة، لأنه إذا كانت مقدراتنا $\hat{a}$ و$\hat{b}$ موزعة توزيعا طبيعيا فإنه يمكننا استخدام طرق الإحصاء المعتادة لاختبار الفرضيات المرتبطة بـ a و b. وكما نتذكر من مبادئ الإحصاء الأولية، أنه إذا كان لدينا متغير (مثلا v) موزع توزيعا طبيعيا بوسط حسابي μ_v وتباين σ_v^2 [أي إذا كان $v \sim N(\mu_v, \sigma_v^2)$] فإن:

$$Z = \frac{v - \mu_v}{\sigma_v} \tag{3.3}$$

سيكون متغيرا طبيعيًا معياريًا، وبمعنى آخر، فإن $Z \sim N(0, 1)$. ويمكننا، باستخدام جدول التوزيع الطبيعي، المعياري أن نتذكر بعض النتائج الاحتمالية حول قيمة Z. في مثل هذا الجدول، نجد، مثلا أن*

$$\begin{aligned} \text{Prob}\ (-1.65 \le Z \le 1.65) &= 0.90 \\ \text{Prob}\ (-1.96 \le Z \le 1.96) &= 0.95 \\ \text{Prob}\ (-2.58 \le Z \le 2.58) &= 0.99 \end{aligned} \tag{3.4}$$

وهذا المثال يعني أنه إذا اختيرت قيمة Z عشوائيا، فإن احتمال أن تكون قيمة Z محصورة بين (1.65 -) و (1.655 +) سيكون 90. لاحظ أن العبارة الأولى في (3.4) تتضمن كلا من:

$$\text{Prob}\ (Z \le -1.65) = 0.05 \tag{3.5}$$

و

$$\text{Prob}(Z \ge 1.65) = 0.05 \tag{3.6}$$

ومرة أخرى، تذكر أن سبب ذلك هو تماثل المنحنى الطبيعي، لذلك، فإذا كان 0.90 من المساحة يقع بين 1.65 ± فإن 0.05 من تلك المساحة ينبغي أن تقع إلى يسار 1.65 - و 0.05 إلى يمين 1.65 +.

افترض الآن أن σ_u^2 معلومة. فإذا رمزنا إلى تباينات $\hat{a}$ و $\hat{b}$ المعطاة في

---

* انظر الجدول الإحصائي الأول في نهاية الكتاب.

المعادلتين(3.1) و (3.2) بالرموز$\sigma_{\hat{a}}^2$ و$\sigma_{\hat{b}}^2$ على الترتيب يصبح لدينا :

$$\left(\frac{\hat{a}-a}{\sigma_{\hat{a}}}\right) \sim N(0,1) \quad \text{و} \quad \left(\frac{\hat{b}-b}{\sigma_{\hat{b}}}\right) \sim N(0,1) \qquad (3.7)$$

حيث إن$\hat{a}$ و $\hat{b}$ هي *الانحرافات المعيارية* لكل من a و b على الترتيب. ويمكننا في ضوء المعادلة (3.7) أن نكون النتائج نفسها حول$(\hat{a}-a)/\sigma_{\hat{a}}$ و$(\hat{b}-b)/\sigma_{\hat{b}}$ التي كوناها حول المتغير الطبيعي المعياري Z في المعادلة (3.3)، على سبيل المثال، فإن:

$$\operatorname{Prob}\left(-1.96 \leq \frac{\hat{b}-b}{\sigma_{\hat{b}}} \leq 1.96\right) = 0.95 \qquad (3.8)$$

اختبار$b = b_0$ مقابل $b \neq b_0$، مع معرفة σ_u^2

في مقدورنا-الآن-أن نبني فترات ثقة وأن نستخدمها لاختبار فرضياتنا. فبالنسبة لـ $\hat{b}$، مثلا، يمكننا إعادة ترتيب الحدود الموجودة في المعادلة (3.8) للحصول على :

$$\operatorname{Prob}\left(\hat{b}-1.96\sigma_{b} \leq b \leq \hat{b}+1.96\sigma_{\hat{b}}\right) = 0.95 \qquad (3.9)$$

وتبين المعادلة (3.9) أنه، باحتمال قدره 0.95، تشتمل الفترة :

$$\left(\hat{b}-1.96\sigma_{\hat{b}}, \hat{b}+1.96\sigma_{\hat{b}}\right) \qquad (3.10)$$

على قيمة b، لذلك تكون المعادلة (3.10) هي فترة ثقة 95% لـ b. ويصبح منهج الاختبار المقترح على النحو التالي : نحسب، على أساس عينتنا، كلا من $\hat{b}$ ، $\sigma_{\hat{b}}$. بعد ذلك نحسب كلا من($\hat{b}$ - 1.96 $\sigma_{\hat{b}}$) و ($\hat{b}$ + 1.96 $\sigma_{\hat{b}}$). وأخيرا نتبين هل القيمة المفترضة لـ b تقع داخل الفترة المعطاة في المعادلة (3.10) أم لا. فإذا لم تكن كذلك نرفض فرضيتنا بدرجة ثقة 95%. أما إذا كانت تقع في تلك الفترة فإنا نصرح بأن البيانات تتسق مع فرضيتنا ولذا نقبلها.

ينبغي علينا أن ندرك أن طريقة اختبارنا ليست معصومة من الخطأ، فمثلا، تتضمن المعادلة (3.9) وجود فرصة تعادل 5% بأن الفترة $(\hat{b} \pm 1.96\, \sigma_{\hat{b}})$ لاتحتوي على b. وهكذا، فقد نرفض الفرضية المرتبطة بقيمة b (مثلا $b = 0.75$) حتى ولو كانت فرضية صحيحة. وبدقة أكثر قد نرفض فرضيتنا المسبقة (فرضية العدم) عندما تكون هذه الفرضية صحيحة في الحقيقة. يطلق على هذا الشكل من الخطأ خطأ من النوع الأول (Type I error)، ويرمز لاحتمال الوقوع في هذا الخطأ، عادة، بالرمز α، ويطلق عليه مستوى *المعنوية*. وفي مثالنا، نجد $(\alpha = 0.05)$. وبهذه المناسبة، يشار إلى α، أيضا، بـ «حجم» الخطأ من النوع الأول.

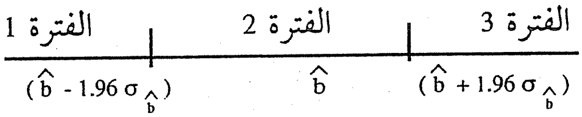
افترض مرة أخرى أن فرضيتنا للعدم(H_0) هي $b=0.75$. فإذا رفضنا$H_0 : b=0.75$ وإذا لم تتوافر لنا معلومات إضافية، فمن الواضح أنه لم يبق لنا سوى القول بأن $b \neq 0.75$ ويشار إلى هذه العبارة في الإحصاء بالفرضية البديلة للفرضية H_0 ويشار إليه عادة بالرمز H_1. وبمعنى آخر تصبح العبارة الكاملة لفرضيتنا محل الاهتمام هي$H_0 : b=0.75$ و$H_1 : b \neq 0.75$ أي أن منهجنا في الاختبار سيؤدي إما إلى H_0 أو H_1.

والخطأ من النوع الأول ليس هو النوع الوحيد من الخطأ الذي يمكن أن نقع فيه، فمثلا، قد نقبلH_0 حتى إذا كان غير صحيح (أي، حتى إذا كان H_1 هي الفرضية الصحيحة). وعلى سبيل المثال، افترض أن فترتنا للثقة اصبحت من (0.86 إلى 0.92) افترض أيضا أن$H_0 : b=0.87$ ولكن القيمة الحقيقية لـ b هي 0.88، حينئذ، فإنه، طالما أن 0.87 تقع في داخل فترتنا فقد نقبل $H_0 : b=0.87$. ولكن في هذه الحال فإن$H_1 : b \neq 0.87$ هو الصحيح، ومثل هذا الاحتمال يوجد، دائما، طالما أن فترتنا للثقة تشتمل على أكثر من قيمة واحدة. ويطلق على هذا النوع من الخطأ (أي قبول فرضية العدم عندما تكون خطأ) الخطأ من النوع الثاني (Type II error) ويشار، عادة، إلى احتمال الوقوع في النوع الثاني من الخطأ (والذي يشار إليه ايضا «بحجم» النوع الثاني من الخطأ) بالرمز β.

ويمكننا أن ندرك أن احتمال الوقوع في النوع الثاني من الخطأ ينخفض عندما تكون القيمة الحقيقية للمعلمة تختلف اختلافا كبيرا عن قيمتها المفترضة. فمثلا، إذا كان H_0 : b=0.75 ولكن في الحقيقة b=0.98 فإن تقديرنا لـ b($\hat{b}$) سيكون قريبا من 0.98، لذلك تحتوي فترتنا للثقة($\hat{b} \pm 1.96\, \sigma_{\hat{b}}$) على مدى من القيم مركزة (تركيزا تقريبيا) حول (0.98). فإذا كان ذلك صحيحا فسوف ننتهي برفض فرضيتنا بأن، b=0.75. ومن الناحية الأخرى، إذا كانت قيمة b=0.751 فإن فترة الثقة ستشتمل عادة، على قيمتنا المفترضة 0.75. وهكذا، فستكون هناك فرصة كبيرة أن نقع في الخطأ من النوع الثاني. وهكذا يتضح لنا أننا سنقع على الأرجح في النوع الثاني من الخطأ عندما تكون القيمة المفترضة للمعلمة «قريبة» من القيمة الحقيقية. باختصار، يصعب وضع حدود فاصلة دقيقة بين الفروض المرتبطة بمعلمات النموذج.

اختبار الفرضيات : تفسير

الخلاصة أن منهجنا للاختبار يتلخص في قبول فرضية العدم أو رفضها على أساس الفرق بين القيمة المفترضة للمعلمة وتقديرنا لها. وحتى يتضح ذلك لنا أكثر بتفصيل اعتبر فترة الثقة 95% لـ b مثل الفترة 2 في الشكل (٣-٢). فإذا كان الفرق بين $\hat{b}$ والقيمة المفترضة لـ b، مثلا b_0(مثل $b_0 = 0.75$) كبير جدا بحيث يزيد على $1.96\, \sigma_{\hat{b}}$ حينئذ، فإن b_0 ستقع إما في الفترة 1 أو الفترة 3. وفي مثل هذه الحالة سنرفض فرضية لعدم بأن $b = b_0$ عند درجة ثقة 95% وهكذا نجد أن مايحدد مانطلق عليه فرقا Discrepancy «كبيرا» مقارنة بفرق «صغير» هو، ببساطة، مضاعف الانحراف المعياري المقدر (أي $1.96\, \sigma_{\hat{b}}$). ويبدو هذا منطقيا. فإذا كانت $\sigma_{\hat{b}}$ مثلا، كبيرة فإن دقة مقدرنا ستكون منخفضة، ومن ثم، سنقبل بوجود فرق كبير بين تقديرنا والقيمة المفترضة للمعلمة قبل رفض فرضية العدم.



شكل (٣-٢)

مناطق القبول والرفض

رأينا في المثال السابق أن فرضية العدم ستقبل إذا كانت:

$$\left|\hat{b}-b_0\right| < 1.96\sigma_{\hat{b}} \qquad (3.11)$$

وبإعادة كتابة المعادلـة (3.11) في صورة أخرى، يتبين لنا أن قبول فرضية الـعـدم يرتبط بالمدى التالي لقيم $\hat{b}$:

$$b_0 - 1.96\sigma_b < \hat{b} < b_0 + 1.96\sigma_{\hat{b}} \qquad (3.12)$$

ويطلق على مدى القيـم لـ $\hat{b}$ والمحددة في المعادلة (3.12) *منطقة القبـول* acceptance region ومنطقة القبول (عموما) هي ذلك المدى من القيم لمقدرنا الذي يؤدي إلى قبول فرضية العدم. وعلى العكس، يطلق على مدى القيم لمقدرنا الذي يؤدي إلى رفض فرضية العدم *منطقة الرفض* rejection region أو في بعض الأحيان *المنطقة الحرجة* critical region. وفي المثال السابق تكون المنطقة الحرجة هي:

$$\begin{aligned} \hat{b} &> b_0 + 1.96\sigma_{\hat{b}} \\ \hat{b} &< b_0 + 1.96\sigma_{\hat{b}} \end{aligned} \qquad (3.13)$$

ومن الواضح الآن، أنه يمكن اختبار الفرضيات بوساطة منهج مماثل يتكون أولا من تحديد مناطق القبول والرفض، وبعد ذلك (وعلى أساس العينة)، نحدد أي المناطق يحتوي على تقدير معلمتنا.

فترات الثقة : تفسير

قبل أن نمضي في التحليل، علينا مناقشة المعادلة (3.9) بشئ من التفصيل. فعلى افتراض أن قيم المتغير المستقل معطاة، فإن المتغير العشوائي في العبارة الاحتمالية هو $\hat{b}$. لاحظ أن b و $\sigma_{\hat{b}}$ ثوابت، أي أنهما ليسا متغيرين عشوائيين. وتقول المعادلة (3.9) إن احتمال أن تحتوي الفترة$(\hat{b} - 1.96\ \sigma_{\hat{b}}\ , b + 1.96\ \sigma_{\hat{b}})$ على b هو 0.95، وبمعنى آخر، افترض أنه يمكننا الحصول على عدد كبير من العينات (1000 عينة، مثلا) كل منهم بحجم 50. افترض، أيضا إن قيمة المتغير المستقل $X_t's$ لم تتغير في جميع هذه العينات. وافترض، أخيرا، أننا حسبنا $\hat{b}$ لكل عينة. وطالما أن الاخطاء العشوائية يتوقع أن تختلف من عينة لأخرى فإن قيم$Y_t's$ سوف تختلف بين العينات حتى ولو لم تتغير قيم$X_t's$ وطالما أن $\hat{b}$ تعتمد على$Y_t's$ فإنها ستختلف من عينة لأخرى. فإذا حسبنا الفترة$(\hat{b} \pm 1.96\ \sigma_{\hat{b}})$ لكل عينة، فإنه سيكون لدينا 1000 فترة مختلفة. وفي الحقيقة، فإن جوهر المعادلة (3.9) هو أننا، نتوقع بهذه الطريقة أن 950=(1000)0.95 من هذه الفترات سيحتوي على الثابت b.

بعض الملاحظات على الأخطاء من النوع الأول والنوع الثاني

بنينا اختباراتنا السابقة على أساس فترة ثقة 95% ومن ثم، مستوى معنوية 5%، ولكن الباحث، في الحقيقة، هو الذي يختار مستوى المعنوية، ولذا، يمكننا، بسهولة، (متى كان ذلك مرغوبا فيه) أن نبني اختباراتنا باستعمال مستويات أخرى من المعنوية. فإذا أردنا، مثلا، أن نتأكد بدرجة عالية أننا لن نرفض الفرضية b=0.75 عندما تكون في الحقيقة صحيحة، علينا أن نبني اختبارا ذا احتمال أصغر لوقوع الخطأ من النوع الأول $\alpha > 0.05$ ونختار α في مثل هذه الحالة معادلة لـ 0.01، على الرغم من أن الباحث حر في اختيار أي قيمة لـــ α. افترض لاكمال مثالنا السابق، أننا نرغب في بناء اختبار حيث يكون $\alpha > 0.01$ حينئذ سوف نختار 0.99 مستوى احتمال في المعادلة (3.8) وسوف ننتهي بالفترة.

$$\left(\hat{b} \pm 2.58\sigma_{\hat{b}}\right) \tag{3.14}$$

ومرة أخرى، سوف نقبل أو نرفض فرضيتنا معتمدين على ما إذا كـانـت الفترة قد اشتملت على القيمة المفترضة لـ b أو لم تشتمل عليها.

وتصبـح فتـرة الثقـة بالمعادلـة (3.14) المرتبطة بخطأ من النوع الأول حجمه $\alpha = 0.01$ أكبر من الفترة بالمعادلة (3.10) التي يكون حجم خطأها من النـوع الأول $\alpha = 0.05$. ومن الواضح أنه إذا كانت فترتنا للثقة أكبر ولاتزال مركزة عند مقدرنا $\hat{b}$ نفسه، فإن احتمال أن نقع في الخطأ من النوع الثاني يكون كبيرا. أي أنه حتى إذا كان H_0 غير صحيح، فإننا، على الأرجح، سنقبله إذا كانت فترة الثقة كبيـرة عما لو كانت صغيرة. ويشير هذا إلى أنه، عندما نقوم بتخفيض احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول فإننا نزيد في الوقت نفسه احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني. هذا *التبادل* trade off معروف جيدا في الإحصاء، لأنه، عموما، (مع وجود عينة معطاة) لايمكن أن نقلل من احتمال الوقوع في الخطأين الأول والثاني في الوقت نفسه. وباختصار، فإن أحدهما يمكن أن يقلل على حساب الآخـر. وعلى ضوء هذه المناقشة نجد أنه، كي نبني فترة ثقة لأغراض اختبار الفرضيات، فإن علينا أولا أن نختار احتمال ارتكاب (الوقوع) في الخطأ من النـوع الأول أو الخطأ من النوع الثاني. وفي العادة، يختبر الاقتصاديون الفرضيات المرتبطة بقيم معينة للمعلمة (b=0.75) عن طريق اختبـار α عند 0.05 أو 0.01، وبالطبع، فإنهم لايوجهون اهتمامهم نحو حجم الخطأ من النوع الثاني المرتبط بذلك الاختبار.

وليس هذا بالطبع هو أفضل الحلول، فإن حجم الخطأ من النوع الأول الذي يحدد، بدوره، حجم الخطأ من النوع الثاني ينبغي اختياره بعناية. والنقطة المهمة التي يجب أن نتذكرها دائما هي أن أي من الخطأين قد يؤدي إلى القيام بعمل (أو اتخاذ قرار) له نتائج غير مرغوب فيها. لذلك، فقد نفكر في الخسارة المرتبطة بكل نوع من الأخطاء ونختار تلك الخسارة الأقل. ينبغي علينا أن نوزن، بطـريـق أو

بآخر، أهمية هذه الخسائر في تحديد حجم الخطأ من النوع الأول. افترض (على سبيل المثال) أن الحكومة تقوم بعمل دراسة لأسباب الشغب. افترض أن فرضية العدم هي أن سياسة حكومية معينة لاتأثير لها في تخفيض المؤثرات (أو الأسباب) التي تؤدي إلى الشغب. افترض أن الفرضية البديلة هي أنها تؤثر. في هذا المثال يؤدي الخطأ من النوع الأول إلى توقع أن السياسة الحكومية تكون مؤثرة في الوقت الذي لاتكون فيه في الواقع كذلك. وأحد النتائج المترتبة على الوقوع في هذا الخطأ هو أن الاعتمادات المالية قد تهدر على سياسة حكومية غير فعالة. ومن الناحية الأخرى، يؤدي الوقوع في الخطأ من النوع الثاني إلى الاستنتاج بأن السياسات الحكومية لاتعمل في الوقت الذي تقلل فيه، فعلا من احتمالات وقوع الشغب. ونتيجة هذا الخطأ هو أن الاعتمادات لن تنفق على سياسة فعالة. ومن الواضح أن تقويم مدى أهمية كل من هذه الأخطاء سيعتمد على بعض الافتراضات الإضافية. افترض على سبيل المثال، أننا نعتبر عددا من تلك السياسات لمواجهة الشغب، إلا أنه بسبب الاعتمادات المحدودة، لايمكن تنفيذ سوى سياسة واحدة. في هذه الحال من الواضح أن الخطأ من النوع الأول سيكون مهما جدا لأنه سيؤدي إلى هدر الاعتمادات المحدودة في بيئة محفزة للشغب. بينما يتطلب الخطأ من النوع الثاني، ببساطة، أن يعتبر الباحثون سياسة أخرى.* وهكذا ففي هذا المثال، قد نضع α عند مستوى منخفض جدا (ربما أقل من 0.01).

وعلى النقيض من ذلك، افترض أن الاعتمادات متوافرة نسبيا وأن واحدة، فقط، من تلك السياسات تعد سياسة فعالة. افترض، أيضا، أن الحكومة (وبسبب توافر الاعتمادات) مستعدة لتنفيذ السياسات كافة التي تبدو واعدة. في هذه الحالة فإن تبديد الاعتمادات على سياسة غير فعالة بسبب الخطأ من النوع الأول قد لايكون خطيرا جدا حيث تصبح الخسارة الوحيدة هي تبديد الاعتمادات ذاتها. ونتيجة لذلك، فإن الحكومة قد ترفض سياسة فعالة ومن ثم، قد تحدث الاضطرابات

* نفترض هنا أن السياسات الأخرى الكفء موجودة بالفعل وسيتم اعتبارها في فترة زمنية «معقولة» من الزمن.

الاجتماعية. في مثل هذه الحال يكون الخطأ من النوع الثاني أكثر أهمية من الخطأ من النوع الأول. لذلك، فإنه في مثل هذه الحالات، سيكون التحديد الصحيح لحجم الخطأ من النوع الأول أكثر ارتفاعا عن (α=0.05)، فمثلا، قد نجعل α=0.30 أو أكبر من ذلك من أجل تقليل حجم الخطأ من النوع الثاني الأكثر تكلفة. ونود بهذه المناسبة أن نشير إلى أن الحل الدقيق لمشكلة تحديد α معقد جدا وهو، في الحقيقة، يبتعد جدا عن مجال هذا الكتاب.* ولكننا نأمل أن يكون لديك الآن تفهم أفضل لبعض هذه القضايا في الأقل.

الفرضية: $b \neq 0$

عند التطبيق، لايكون لدى الاقتصاديين، عادة، افتراضات تحدد قيما معينة للمعلمات. وتقترح النظرية الاقتصادية، غالبا، وجود علاقة موجبة أو سالبة بين متغيرين. وهنا نجد أن الافتراضات التي تهم الاقتصاديين، غالبا، ماتكون، فقط، تحديد إشارة معلمة معينة. وفي الحقيقة، تشير النظرية الاقتصادية في بعض الحالات، فقط، إلى ماهية المتغيرات المرتبطة ببعضها بعضا، ولكن، هل هذه العلاقة موجبة أو سالبة، تعد مسألة تحتاج إلى الفحص التطبيقي.

افترض، على سبيل المثال، أننا نهتم بكيفية تغير استهلاك البطاطس عند تغير مستوى دخل الأسرة. وفرضيتنا هي أن :

$$Q_t = a + bY_t + u_t \tag{3.15}$$

حيث Q_t هي كمية البطاطس المستهلكة بوساطة الأسرة رقم t، Y_t هو مستوى دخل الأسر و u_t هو الخطأ العشوائي. من غير الواضح في هذه الحالة توقع اشارة b (هل تكون موجبة أم سالبة). وبالنسبة لغالبية السلع، نتوقع أن تتزايد الكمية المستهلكة مع الدخل. ولكن هناك فئة من السلع يطلق عليها الاقتصاديون «الدنيا» وهي التي

* لمعرفة المزيد عن هذا الموضوع يرجع إلى:

Chapter 12 of Alexander H. Mood and Franklin and A. Graybill. *An Introduction to the Theory of Statistics* (New York: McGraw-Hill, 1963); and Chapters 1 and 2 in Arnold Zellner. *An Introduction to Bayesian Inferences in Econometrics* (New York: Wiley, 1971).

يتغير استهلاكها عكسيا مع مستوى الدخل. والفكرة المتضمنة هنا هي أن زيادة دخل الأسرة يمكنها من شراء قائمة أكثر تنوعا وأكثر تكلفة من الطعام. ومن غير المحتمل أن نندهش كثيرا إذا وجدنا الأسر مرتفعة الدخل تحل بعض السلع الأخرى من الطعام محل البطاطس. ومن ناحية أخرى، يمكن أن تستهلك الأسر الغنية، في الحقيقة، كميات من البطاطس أكثر من الأسر الأقل دخلا. وفي هذه الحال، نجد أنه على الرغم من أننا نعتقد بوجود علاقة ما بين Q و Y، فإننا لسنا متأكدين من طبيعة (إشارة) هذه العلاقة. وهكذا تصبح الفرضية التي نريد اختبارها في هذه الحال، ببساطة، $b \neq 0$ بدون أية قيود مسبقة على إشارة b.

كيف نختبر الفرضية $b \neq 0$؟ من الواضح أنه لايمكننا أن نبني ببساطة (على سبيل المثال) فترة ثقة 95% ثم، نفحص بعد ذلك هل تتضمن هذه الفترة أي قيمة من قيم b 0. فإذا فعلنا ذلك فإننا سنقبل دائما فرضيتنا، وذلك بسبب أن فترتنا ستتضمن دائما بعض القيم التي يكون فيها $b \neq 0$. ويصبح احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني في هذه الحال، هو الواحد الصحيح.

ومن الواضح، أنه لايمكن أن يكون لدينا أي ثقة في الفرضيات التي نقبلها إذا كان منهج الاختبار يتضمن دائما عدم رفضها. ومن أجل تصحيح ذلك، يختبر الاقتصاديون الفرضيات من النوع b 0 عن طريق وضع حجم الخطأ من النوع الثاني مساويا صغير الحجم، عادة، 0.05 أو 0.01 ويتم ذلك، بسهولة، عن طريق إعادة صياغة relabeling. رقمًا الفرضيات. على سبيل المثال، فإن الفرضية البديلة لفرضية العدم $b \neq 0$ هي $b = 0$. لذلك، يكون الخطأ من النوع الثاني هو قبول $b \neq 0$ عندما يكون في الحقيقة $b = 0$. افترض الآن أننا نعتبر $b = 0$ فرضيتنا للعدم و $b \neq 0$ هي الفرضية البديلة. وأننا اخترنا مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$. يدل اختبارنا أن احتمال رفض $b = 0$ عندما يكون في الحقيقة $b = 0$ هو $\alpha = 0.05$. ولما كان رفض $b = 0$ يعادل قبول $b \neq 0$ فإن نتيجتنا تتحقق (وكما هو مطلوب)، أي أننا بنينا اختبارنا بحيث يكون احتمال قبول الفرضية b 0 عندما تكون في الحقيقة $b = 0$ هو $\alpha = 0.05$. على سبيل المثال، إذا لم تكن هناك علاقة بين كمية البطاطس المستهلكة Q_t

ومستوى دخل الأسرة Y_t، فإن الاحتمال سيكون 0.05. أي أن منهجنا في الاختبار سيؤدي بنا إلى الاعتقاد بوجود علاقة 0 b بين هذه المتغيرات. ولتلخيص ماسبق لاختبار الفرضية بأن قيمة معلمة معينة (مثلا b) ليست صفرا نبني الفرضيات.

$$H_0 : b = 0, \quad H_1 : b \neq 0, \tag{3.16}$$

ونختار α طبقا لمستوى الثقة المرغوب فيه. وكما ذكرنا، يحدد الاقتصاديون، عادة، α عند 0.05 أو 0.01. فإذا رفضنا$H_0 : b=0$ نصرح بأن تقديرنا *مختلف معنويا عن الصفر*، أما إذا قبلنا $H_0 : b=0$ فإننا نذكر أن تقديرنا لايختلف معنويا عن الصفر. لاحظ أن الحالة الأخيرة تعني أننا، في الحقيقة، غير قادرين على إيجاد علاقة منتظمة بين المتغيرات تقابل مستويات المعنوية تم اختيرت.

الفرضيات $b < 0$ و $b > 0$

اختبرنا (في المثال السابق) الفرضيات$H_0 : b=b_0$ و$H_1 : b \neq b_0$ حيث إن b_0 قد تكون صفرا. يطلق على مثل هذا الاختبار *الاختبار ذو الذيلين* two tailed test. أي أن الفرضية البديلة H_1 هي b إما أن تكون أكبر من b_0 أو أقل منها. في ظل منهجنا للاختبار تؤدي الانحرافات الكبيرة الموجبة أو السالبة لـ $\hat{b}$ عن القيمة المحددة لـ b بوساطة H_0 إلى رفض فرضية العدم. وبالمقابل، يهتم الاقتصاديون كثيرا باختبار *الذيل الواحد*. وطالما أن النظرية الاقتصادية تقترح إشارة معينة للعلاقة بين المتغيرات، فإن الفرضيات المشتقة من النظرية تكون في الشكل $b > 0$ أو $b < 0$. افترض (مرة أخرى) أننا نرغب في بناء فترة ثقة 95% للفرضيات التي نقبلها. ستكون، حينئذ، فرضياتنا على النحو$H_0 : b=0$ مقابل$H_1 : b > 0$ أو$H_1 : b < 0$ بحيث يكون احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول هو 0.05.

وتنفيذ الاختبارات ذات الذيل الواحد واضح ومباشر. اعتبر ، على سبيل المثال، الفرضيات:

$$H_0 : b = 0, \quad H_1 : b > 0, \tag{3.17}$$

تنص هذه الفرضيات على أن b إما مساوية الصفر أو أكبر منه، وهكذا لاينبغي أن

نشغل أنفسنا بالقيم السالبة لـ b. وعلى افتراض أننا نرغب في بناء فترة ثقة 95% لفرضيتنا المقبولة، يكون منهجنا في اختبار الفرضيات هو بناء حد أدنى Lower bound لقيمة b باحتمال 95% أن يكون ذلك الحد الأدنى أقل من b . هذا الحد الأدنى يزودنا فعلا بفترة ثقة 95% مفتوحة Open ended. وكما عرفنا من قبل تعتمد قيمة هذا الحد الأدنى على قيمة مقدرنا $\hat{b}$. وسيكون منهجنا للاختبار هو تحديد قيمة $\hat{b}$ (ومن ثم، حدنا الأدنى) من بيانات العينة ثم، تحديد هل يكون ذلك الحد الأدنى أكبر من الصفر أم لا ؟ (أي هل يقع الصفر خارج فترتنا للثقة) فإذا كان حدنا الأدنى موجبا فسوف نرفض الفرضية $b = 0$ وإذا لم يكن كذلك فسوف نقبل الفرضية ونرفض الفرضية البديلة $b > 0$.

نشتق حدنا الأدنى من العبارة :

$$\text{Prob}\left(\frac{\hat{b}-b}{\sigma_{\hat{b}}} < 1.65\right) = 0.95, \tag{3.18}$$

حيث نجد 1.65 في جدول قيم المنحنى الطبيعي المعياري (انظر الجدول الإحصائي ١) ويمكن إعادة كتابة المعادلة (3.18) على النحو :

$$\text{Prob}\left(\hat{b} - 1.65\sigma_{b} < b\right) = 0.95 \tag{3.19}$$

وطالما أن $\hat{b}$ (وليست b أو $\sigma_{\hat{b}}$) هي المتغير، نجد من المعادلة (3.19) أن احتمال أن يكون الحد الأدنى ($\hat{b} - 1.65\,\sigma_{\hat{b}}$) أصغر من قيمة المعلمة b مساويا 0.95.

وبناء على ذلك، نرفض فرضية العدم $b = 0$، وعلى أساس معلومات العينة، إذا كانت $\hat{b} - 1.65\,\sigma_{\hat{b}}$ أكبر من الصفر. وبالمقابل، إذا كانت $0 \le (\hat{b} - 1.65\,\sigma_{\hat{b}})$ فسنقبل الفرضية $b = 0$. وفي حالتنا الأخيرة هذه نقول إن ة دينا ليس مختلفا معنويا عن الصفر.

في الإحصاء، يطلق على الفترة ذات الشكل $b > (\hat{b} - 1.65\,\sigma_{\hat{b}})$ فترة الثقة ذات الطرف الواحد. والآن ينبغي أن تكون قادرا على إثبات أنه، إذا قمنا باختبار

الفرضية$b=0$: H_0 مقابل الفرضية $b<0$ عند 5% مستوى معنوية، فسوف نتتهي بفترة ثقة 95% ذات ذيل واحد*.

$$b < \hat{b} + 1.65\sigma_{\hat{b}} \tag{3.20}$$

ستشمل في هذه الحالة($\hat{b} + 1.65\ \sigma_{\hat{b}}$) *حدنا الأعلى* لقيمة b، سنختبر الفرضية$b=0$: H_0 مقابل الفرضية$H_1 : b > 0$ عن طريق تقويم$\hat{b}$ من عينتنا ثم، نحدد بعد ذلك هل تكون($\hat{b} + 1.65\ \sigma_{\hat{b}}$) أقل من الصفر أم لا. فإذا كانت أقل من الصفر فسوف نرفض الفرضيةH_0 أما إذا كانت أكبر من الصفر فسوف نقبلها. ينبغي علينا أن نذكر أخيرا أنه، على الرغم من أننا قد ركزنا المناقشة على المعلمة b فإن مناهج الاختبارات كافة التي ذكرناها لـ b تنطبق، أيضا، على المعلمة a، إذ يمكننا استخدام الأساليب نفسها لبناء فترة ثقة ذات ذيل واحد أو ذات ذيلين للمعلمة a لاختبار الفرضيات المرتبطة بقيمة الحد الثابت في معادلة الانحدار.

اختبار الفرضيات، مع عدم معرفة σ_u

افترضنا في تحليلنا السابق أنσ_u^2 معلومة ومن ثم، فإن كلا من$\sigma_{\hat{b}}$ و$\sigma_{\hat{a}}$ معلومان أيضا، ولكن الحال ليست هكذا، عادة. والآن جاء الوقت الملائم لإسقاط هذا الافتراض. وكما أوضحنا في الفصل الثاني أنه عندما تكونσ_u^2 غير معلومة فإنه ينبغي أن نستخدم مقدرنا لـ $\hat{\sigma}_u^2$ من أجل الحصول على مقدر لتباينات $\hat{a}$ و $\hat{b}$، وتكون مقدراتنا للتباين هي:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_u^2 \Sigma X_t^2}{n\Sigma\left(X_t - \bar{X}\right)^2} \quad \text{و} \quad \hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\Sigma\left(X_t - \bar{X}\right)^2} \tag{3.21}$$

* إرشاد للحل، نحتاج، في هذه الحالة، إلى *حد أعلى*. وسنحصل عليه من خلال البدء بتعبير مشابه للموجود في المعادلة (3.18) مع جعل إشارة عدم المساواة معكوسة، وبالتحديد سنبدأ بـ

$$\text{Prob}\left(\frac{\hat{b}-b}{\sigma_{\hat{b}}} > -1.65\right) = 0.95$$

حيث :

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\Sigma\left(Y_t - \hat{a} - \hat{b}X_t\right)^2}{(n-2)} = \frac{\Sigma\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2}{(n-2)}$$

ومع هذا التعديل، فإنه لم يعد بإمكاننا استخدام المنحنى الطبيعي لاختبار الفرضيات (أو بناء فترة الثقة) المرتبطة بـــ a و b. بدلا من ذلك، يمكننا، باستخدام المعادلة (3.7)، أن نكون:

$$\frac{\hat{a}-a}{\hat{\sigma}_a} \quad و \quad \frac{\hat{b}-b}{\hat{\sigma}_b} \qquad (3.22)$$

حيث إن كلا من التعبيرين في المعادلة (3.22) متغيرات عشوائية يمكن إثبات أن لها توزيع t بـ (n-2) درجات حرية.* ونتبع المنهج نفسه أعلاه باستثناء أننا نستخدم هنا توزيع t بدرجات حرية قدرهــا (n-2) (انظر الجدول الإحصائي رقم ٢ بــدلا مــن التوزيع الطبيعي لتحديد حدود فترات الثقة.

بعض الأمثلة

لتوضيح منهج الاختبار المبني على توزيع t، دعنا نعود إلى دالة الاستهلاك التي قدرناها في الفصل الثاني. وباستخدام البيانات عن الإستهلاك والدخل المتاح للسنوات 1960-1969 في الولايات المتحدة الأمريكية وجدنا أن:

$$\hat{a} = 13 \quad \hat{\sigma}_{\hat{a}}^2 = 31 \quad \left(or\,\hat{\sigma}_{\hat{a}} = 5.6\right)$$
$$\hat{b} = 0.89 \quad \hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 = 0.0001 \quad \left(or\,\hat{\sigma}_b = 0.01\right)$$

---

* يشبه توزيع t التوزيع الطبيعي، فإذا ماتزايدت n وأصبحت كبيرة يؤول توزيع t إلى التوزيع الطبيعي.

دعنا نفترض أننا نرغب في اختبار الفرضية $a>0$، ونرغب أن تكون لدينا 95% فترة ثقة في الفرضية التي نقبلها.* للقيام بذلك، نكون فرضيتنا للعدم على النحو $H_0 : a = 0$ والفرضية البديلة $H_1 : a > 0$ ونجعل مستوى المعنوية عند 0.05. وباستخدام الجدول الإحصائي رقم ٢ لتوزيع t عند 8 (أي 10-2) درجات حرية، نجد أن الحد الأدنى لفترة الثقة ذات الذيل الواحد لـ a هي** :

$$a > \left(\hat{a} - t_{n-2;0.95}\hat{\sigma}_{\hat{a}}\right) = \left[13 - 1.8(5.6)\right] = 2.6$$

طالما أن الحد الأدنى للفترة أعلى من الصف وعند مستوى معنوية 5%، فإننا نقبل $H_1 : a > 0$ أي أننا نستنتج أن قيمة a أكبر من الصفر. لاحظ أنه إذا اخترنا مستوى معنوية 1% فإنه سيكون لدينا الحد الأدنى التالي:

$$a > \left(\hat{a} - t_{n-2;0-99}\hat{\sigma}_{\hat{a}}\right) = \left[13 - 2.99(5.6)\right] = -3.2$$

وسيمدنا هذا بفترة الثقة $(a > -3.2)$ التي تشتمل على الصفر. ولذا تم قبول $H_0 : a = 0$ ومن ثم، استنتاج أن a تساوي الصفر. وهذا يشير إلى أنه ينبغي التفكير مليا في حجم الخطأ من النوع الأول، لأن نتائج اختباراتنا تعتمد عليه.***

دعنا أخيرا نبني فترة ثقة 99% ذات طرفين لـ b. وجدنا من الجدول الإحصائي رقم (٢) أن الفترة هي:

$$\left(\hat{b} \pm t_{n-2;0.995}\hat{\sigma}_{\hat{b}}\right) = 0.89 \pm 3.36(0.01) = (0.89 \pm 0.03)$$

تشتمل هذه الفترة على مدى من القيم للميل الحدي للاستهلاك MPC من 0.92-0.86، فإذا قمنا باختبار فرضية العدم $H_0 : b = 0.75$ مقابل $H_1 : b \neq 0.75$ عند 1% مستوى معنوية فسنرفض H_0.

* ملاحظة : ينبغي أن نبني الفرضيات قبل تحليل البيانات و*قبل* الوصول إلى التقديرات، فإذا لم يتحقق ذلك فسنعاني مشكلة المنطق الدائري circular reasoning.

** الترميز المستخدم هنا هو الترميز الشائع. فعموما ترمز $t_{n-2,\gamma}$ إلى الرقم الذي يعبر عن الاحتمال بأن يكون متغير t بدرجات حرية n-2 اقل من ذلك الرقم يساوي γ.

*** مرة أخرى، نؤكد على ضرورة اختيار حجم الخطأ من النوع الأول *قبل* تحليل البيانات، فإذا لم يتم ذلك فسوف نقبل أي افتراض موضع الاهتمام عن طريق الحجم «الملائم» للخطأ من النوع الأول.

قد يكون من المفيد، أيضا، أن نشير إلى الشكل الذي يستعمله الاقتصاديون، عادة، عند تقرير نتائج الانحدار في بحوثهم أو دراساتهم. فإذا وقعت عيناك على دورية اقتصادية أو كتاب يذكر دالة الاستهلاك التي قدرناها في الفصلين الثاني والثالث فقد تجد:

$$\begin{aligned} \hat{C} &= 13 + 0.98 Y_d \qquad n = 10 \\ &(5.6) \quad (0.01) \quad R^2 = 0.99 \end{aligned} \tag{3.23}$$

حيث الأرقام الموجودة بين القوسين تحت تقديرات المعلمات هي تقديرات للأخطاء المعيارية المناظرة (أي $\hat{\sigma}_{\hat{b}}$ و $\hat{\sigma}_{\hat{a}}$). ويمكن للقاري أن يبني بهذه المعلومات فترات الثقة لمختلف المعاملات واختبار الفرضيات وهلم جرا.

نسبة t : قاعدة للحساب

على الرغم من أن الحجم الدقيق لفترة الثقة، ومن ثم، نتائج الاختبار، يعتمد على حجم العينة n، وعدد المعلمات التي ينبغي تقديرها، إلا أن الاقتصاديين يستخدمون عادة القواعد الحسابية العملية عند النظر إلى معادلة انحدار مقدرة. فمثلا إذا كانت قيمة المعلمة المقدرة أكبر من ضعف حجم الخطأ المعياري المقدر، يمكننا أن نستنتج في حالة الاختبار ذي الطرفين اختلاف تقدير المعلمة معنويا عن الصفر عند مستوي معنوية 5% أي إذا اعتبرنا فرضية العدم أن المعلمة تساوي الصفر مقابل الفرضية البديلة للاختبار ذي الذيلين، فإن هذه النتائج تؤدي إلى رفض فرضية العدم. أما إذا كان تقدير المعلمة أكثر من ثلاثة امثال حجم الخطأ المعياري المقدر فسوف تكون هذه المعلمة، عموما، مختلفة عن الصفر عند مستوى معنوية 1%.

يمكن تبرير القواعد العملية للحساب لنسبة t هذه بسهولة. فمثلا إذا أردنا اختبار فرضية العدم $b=0$ مقابل الفرضية البديلة $b \neq 0$ فإننا سوف نبني اختبارنا على أساس الفترة:

$$\left(\hat{b} \pm t_{n-2;0.975}\hat{\sigma}_{\hat{b}}\right) \tag{3.24}$$

إذا أردنا أن يكون مستوى المعنوية عند 5%، فإذا لم تتضمن هذه الفترة الصفر، فسنرفض فرضية العدم. والآن يمكن أن تكون $\hat{b}$ موجبة أو سالبة، ولكن $t_{n-2,0.975}$

و $\hat{\sigma}_{\hat{b}}$ تكونان دائما موجبتين. وهنا لن تحتوي فترتنا للثقة على الصفر إذا كانت:

$$\left(\hat{b} - t_{n-2;0.975}\hat{\sigma}_{\hat{b}}\right) > 0 \quad when \;\; \hat{b} > 0, \qquad (3.25)$$

أو

$$\left(\hat{b} + t_{n-2;0.975}\hat{\sigma}_{\hat{b}}\right) < 0 \quad when \;\; \hat{b} < 0$$

هذه الشروط يمكن إعادة كتابتها على النحو :

$$\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} > t_{n-2;0.975} \quad when \;\; \hat{b} > 0 \qquad (3.26)$$

أو

$$\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} < t_{n-2;0.975} \quad when \;\; \hat{b} < 0$$

وأخيرا ، يمكنا كتابة هذه الشروط بإيجاز على النحو :

$$\left|\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| > t_{n-2;0.975} \qquad (3.27)$$

لذلك إذا كانت القيمة المطلقة لـ $\left(\hat{b}_1 / \hat{\sigma}_{\hat{b}}\right)$ تزيد على القيمة المعطاة بوساطة توزيع t ($t_{n-2,0.975}$) فسوف نرفض فرضية العدم $b = 0$. وبمعنى آخر، يمكننا اختبار الفرضية$b = 0$ مقابل الفرضية البديلة $b \neq 0$ عند مستوي 5% من المعنوية عن طريق معرفة هل القيمة المطلقة للنسبة $\hat{b} / \hat{\sigma}_{\hat{b}}$ تزيد على $t_{n-2,0.975}$. وبملاحظة أن الاقتصاديين يتعاملون عادة مع عينات لاتقل في أحجامها عن 15 مشاهدة. فإذا اعتبرنا n=15 فإن ($t_{15-2;\,0.975} = t_{13;0.975=2.16}$)، أما إذا اعتبرنا $n = \infty$ فإن ($t_{\alpha,0.975=1.96}$)، وأخيرا فإن نظرة سريعة إلى جدول t تبين أن قيمة $t_j = 0.975$ وإذن، فإن $\infty > j > 13$ تكون بين 1.96 و 2.16. وهكذا تكون القاعدة على النحو «إذا زادت النسبة $\hat{b}/\hat{\sigma}_{\hat{b}}$ عن 2 بالقيمة المطلقة نرفض فرضية العدم بأن $b = 0$».

ويطلق على نسبة مقدر المعلمة إلى خطئه المعياري : $\hat{b}/\hat{\sigma}_{\hat{b}}$ في الكتابات الإحصائية بنسبة t. وإذا اردنا تكوين الاختبارات للفروض عند مستوى معنوية 1% فإننا نجد $\left(t_{15-2,0.995} = t_{13,0.995} = 3.01\right)$ وأيضا $t_{\infty,995} = 2.58$ وفي هذه الحال يتطلب «كتقريب» أن تكون القيمة المطلقة لـ t أكبر من 3 قبل أن نصرح بأن تقدير المعلمة مختلف معنويا عن الصفر.

وبطريقة مشابهة جدا لما ذكر أعلاه، يمكننا اشتقاق نسبة t لاختبارات الفرضيات ذات الذيل الواحد. فعلى سبيل المثال، إذا أردنا اختبار الفرضية $b=0$ مقابل $b>0$، فسوف نرفض الفرضية $b=0$ عند 5% مستوى معنوية إذا :

$$\left(\hat{b} - t_{n-2;0.975}\hat{\sigma}_{\hat{b}}\right) > 0 \tag{3.28}$$

وبالمثل، إذا كانت الفرضية البديلة لـ $b=0$ هي $b<0$ فإننا سنرفض الفرضية $b=0$ إذا:

$$\left(\hat{b} + t_{n-2;0.975}\hat{\sigma}_{\hat{b}}\right) < 0 \tag{3.29}$$

والآن يمكننا إعادة كتابة كل من المعادلتين (3.28) و (3.29) على النحو :

$$\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} > t_{n-2;0.95} \tag{3.30}$$

و

$$\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} < -t_{n-2;0.95} \tag{3.31}$$

ومرة أخرى، فإن كل مانحتاجه هو تكوين نسبة t ومن ثم، مقارنتها بـ $t_{n-2;0.95}$ في المعادلة (3.30) والتي تناظر الفرضية البديلة ذات الطرف الواحد $b>0$ أو نقارنها بـ $t_{n-2,0.95}$ في (3.30) والتي تناظر الفرضية البديلة ذات الطرف الواحد $b>0$ أونقارنها بـ $t_{n-2,0.95}$ كما في المعادلة (3.31) والتي تناظر الفرضية البديلة $b>0$. في هذه الحالة سيكون مدى القيم هو $t_{\infty;0.95} = 1.645$ و$t_{13;0.95} = 1.771$. وبالطبع يكون الشرط

الضروري لرفض فرضية العدم في أي من الحالتين هو :

$$\left|\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| > t_{n-2;0.95} \qquad (3.32)$$

وفي بعض الحالات، يقوم المؤلف بتوفير المشقة على القارىء من خلال قسمة قيمة المعامل بوساطة الخطأ المعياري المقدر لتحديد نسبـة t وإعطاء حاصل القسمـة (قيمة نسبة t للعينة) بين قوسين أسفل المعامل. وهنا ينبغي أن نكون على حذر وأن نتأكد من الملاحظات التي يذكرها المؤلف لتوضيح ما إذا كانت الأرقام الموجودة بين الأقواس تمثل نسبة t أو تمثل الخطأ المعياري المقدر. وعلى أي حال، ينبغي أن يكون واضحا أن قواعد الحساب المرتبطة بنسب t تسهل كثيرا اختبار الفرضيات. ونكون قادرين، غالبا، على اختبار الفرضيات بدون الإشارة إلى جدول القيم لتوزيع t لأن نسب t تزيد، غالبا، على ثلاثة أو تكون أقل من واحد بالقيمة المطلقة.

(٣-٢) مشكلة شكل الدالة

لاشك أنك لاحظت خلال المناقشة في الفصلين الأول والثاني أننا افترضنا أن شكل العلاقة التي رغبنا في تقديرها هو الشكل الخطي، وبالتحديد فقد افترضنا أن :

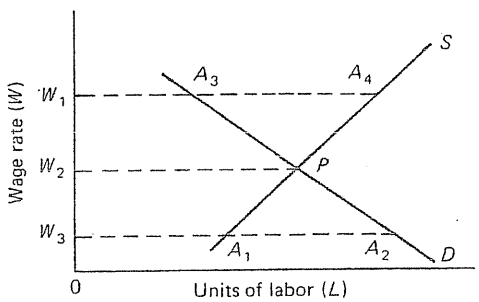
$$Y_t = a + bX_t + u_t$$

من الواضح أن هذا يعد شرطا مقيدا جدا. وعادة ماتقترح النظرية الاقتصادية أو شكل انتشار النقط المشاهدة أن العلاقة بين المتغيرين غير خطية. والتساؤل الآن هو كيف نتعامل مع العلاقة غير الخطية بدلالة النموذج الخطي ؟

منحنى فليبس والتحويل العكسي

قد يكون من المفيد أن نعالج هذه المشكلة بدلالة علاقة اقتصادية فعليـة : منحنى فليبس Philips curve الذي يمثل حالة نموذجية للعلاقة غير الخطية بين النسبة

المئوية للتغير في الأجور ($\dot{W}$) ومعدل البطالة (R). اعتبر نموذجا لسوق العمل يكون مبسطا ومكونا من طلب وعرض. ويعتمد كل من الطلب على العمل وعرض العمل على معدل الأجر. يظهر هذا النموذج في الشكل رقم (٣-٣) حيث يحدد تقاطع الطلب والعرض الأجر التوازني W_2. ولكن (من الناحية الأخرى) إذا كان معدل الأجر عند W_3 فإن الطلب على العمل سيزيد على العرض منه بالمقدار ($A_1\ A_2$)، في هذه الحال، سنصرح بوجود *فائض طلب* موجب على العمل، وسيؤدي ذلك إلى ضغط معدلات الأجور إلى أعلى. وعلى العكس، إذا كانت $W=W_1$ فسيظهر فائض طلب سالب (أو فائض عرض) بالمقدار ($A_3\ A_4$) مما يؤدي إلى ضغط مستويات الأجور لأسفل.



شكل رقم (٣-٣)

دعنا الآن نفترض آلية ديناميكية مبسطة للتعديل حتى نستطيع اكتشاف هذه العلاقات. وبالتحديد، نفترض أن القيمة المتوقعة *لمعدل التغير* في معدل الأجر ($\dot{W}$) من فترة لأخرى يرتبط نسبيا ومباشرة بمعدل فائض الطلب. ويبدو ذلك منطقيا حيث إنه كلما ازداد الفرق بين الطلب على العمال بوساطة رجال الأعمال وبين عرض العمل، فإننا نتوقع ضغطا على مستويات الأجور لأعلى. من أجل ذلك نفترض أن :

$$\dot{W}_t = \frac{\left(W_t - W_{t-1}\right)}{W_{t-1}} = \alpha D_t^* + u_t \tag{3.33}$$

حيث إن $D_t^* = (D_t - S_t) / S_t$ هو معدل فائض الطلب في الفترة t و u_t هو الخطأ العشوائي.

لتقدير هذه العلاقة، نحتاج إلى مشاهدات عــن $\dot{W}_t$ و D_t^*. وعلى الرغم من توافر مشاهدات عن $\dot{W}_t$ ، فعادة لاتتوافر مشاهدات (أو بيانات) عن D_t^*. فإذا اردنا أن يكون لدينا نموذج يمكن تطبيقه ويستطيع تفسير تعديلات الأجور فينبغي أن نجد متغيرا مرتبطا بـ D_t^* حتى يمكن استخدامه مقياسا تقريبيا proxy. ومن المعقول أن نفترض أن معدل فائض الطلب D^* يرتبط بعلاقة منتظمة مع معدل البطالة R_t في الاقتصاد القومي، فإذا كانت البطالة منخفضة جدا كما هو الحال فــي ســوق العمل المحدود من جانب العرض، فإننا نتوقع وجود فائض طلب كبير موجــب والعكس صحيح. لذا لدينا سبب للاعتقاد بأن R_t و D_t^* يرتبطان ببعضهما بعضا عكسيا، دعنا نفترض العلاقة التالية :

$$D_t^* = f\left(R_t\right) \tag{3.34}$$

ما الشكل الذي يجب أن تأخذه العلاقة (3.34)؟ أبسط الافتراضات هي أن العلاقة خطية على النحو :

$$D_t^* = e + gR_t \tag{3.35}$$

حيث إن e و g معلمات مع $g < 0$. ولكن، بقليل من التفكير، يتبين لنا أن المعادلة (3.35) ليس هو الشكل الأكثر ملائمة لهذه العلاقة. اعتبر الشكل (٣-٤) حيــث يقاس معدل فائض الطلب على المحور الرأسي ومعدل البطالة على المحور الأفقي. عند النقطة 0 يكون لدينا فائض طلب يساوي الصفر، ويكون D^* موجبا أعلى 0 وسالبا أسفله. لاحظ أن فائض الطلب الصفري يناظر P في الشكل (٣-٣) حيث يتساوى الطلب وعرض العمل، ومن ثم، لاتجد ضغوطا لتغيير مستوى الأجور. وتوجد، على أي الأحوال، بعض البطالة *الاحتكاكية*، بمعنى أنه، في ظل الاقتصاد

الحركي سيوجد بعض الأفراد في عملية انتقال من وظيفة لأخرى، ولكن، إذا كان فائض الطلب يساوي الصفر، فإن عدد الوظائف الشاغرة سيتساوى مع عدد الأفراد الذين يبحثون عن الوظائف. لذلك، فإن النقطة E في الشكل رقم (٣-٤) تمثل معدل البطالة الاحتكاكية (أي معدل البطالة الذي يناظر فائض طلب قدره الصفر ويناظر، أيضا، النقطة P في الشكل رقم (٣-٣).

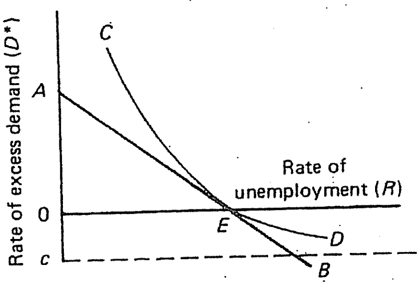
اعتبر بعد ذلك سلسلة من الفترات ذات الطلب الفائض (الفترات ذات القيم العالية لـ D^*). في هذه الحال ينبغي أن يقلل العدد المتزايد من الوظائف الشاغرة الوقت اللازم للحصول على الوظائف للعاطلين. لذلك نتوقع أن تصاحب القيم الأعلى لـ D^* قيما أقل لـ R . غير أننا لانتوقع أن يؤدي استمرار تزايد عدد الوظائف الشاغرة مع زيادة قيمة D^* إلى استمرار التناقص في R بكميات متساوية، وأحد اسباب ذلك هو أن معدل البطالة لايمكن أن يأخذ قيما سالبة. وكنتيجة لذلك لايمكن أن تأخذ العلاقة بين D^* و R الشكل الخطي مثل AB في الشكل رقم (٣-٤). وكل هذا يعني أنه كلما أصبحت قيم D^* أكبر يكون الانخفاض المناظر في R أصغر. وهكذا ينبغي أن تكون العلاقة بين المتغيرين غير خطية مثل CD في الشكل رقم (٣-٤) حيث ينحني المنحنى إلى أعلى يسار النقطة E، وإلى يمين هذه النقطة، يكون لـ CD انحدار سالب ايضا، مشيرا إلى أن المعدلات الأعلى من R ترتبط بحالات فائض العرض. وللتوضيح، نفترض، أيضا، أن CD ينحني إلى أعلى يمين النقطة E.

إن أحد الأشكال الدالية التي «تقرب» منحنى مثل CD هو :

$$D_t^* = c + d\left(\frac{1}{R_t}\right), \quad where \ \ c<0, \ \ d>0 \tag{3.36}$$

حيث يفترض أن D^* تتغير عكسيا مع R. فإذا كانت d موجبة فإن هذا يعطينا منحنى ذا ميل سالب. إلا أنه منحنى غير خطي بمعنى أنه ينحني إلى أعلى مشيرا إلى أن معدل الانخفاض في R لكل وحدة إضافية في D^* يتناقص مع تزايد فائض

الطلب D^*. نفترض أن c سالبة، حيث تصبح D^* سالبة للقيم الأعلى مـن R. لدينا الآن مقياس تقريبي لـ D^*، طالما توجد قيم مشاهدة لـ R_t، فإذا ماعوضنـا عن D_t^* من المعادلة (3.36) في معادلة الأجور نحصل على منحنى فليبس المعروف:



شكل رقم (٣-٤)

$$\dot{W}_t = \alpha D_t^* + u_t = \alpha\left[c + d\left(\frac{1}{R_t}\right)\right] + u_t \qquad (3.37)$$

$$= a + b\left(\frac{1}{R_t}\right) + u_t$$

حيث إن $a = \alpha c$ و $b = \alpha d$. وتوضح المعادلـة (3.37) أن معدل التغير في الأجور يرتبط مباشرة مع مقلوب معدل البطالة. افترض أنه تتوافر لدينا عينة من القيـم المشاهدة لكل من: $\dot{W}_t$ و R_t. كيف يمكننا تقدير المعلمات a و b لهذه العلاقة غير الخطية؟ لاحظ أننا لن نحاول تقدير c أو d ولكننا سنحاول تقدير a و b لعلاقتنا المشاهدة في المعادلة (3.37).

على الرغم من أن العلاقة في المعادلة (3.37) هي علاقة غير خطية بين $\dot{W}_t$ وR_t فإنه يمكن تفسيرها كعلاقة خطية بـين $\dot{W}_t$ ومقلوب R_t (أي $1/R_t$). لذلك يمكن تقدير المعادلة (3.37) باستخدام طرق تقدير النماذج الخطية السابق توضيحها إذا ما أدخلنا تغييرا طفيفا في الرموز. وبوضوح أكثر، دعنا نعرف متغيرا جديدا.

$$Z_t = \frac{1}{R_t} \tag{3.38}$$

حيث توجد لكل قيمة غير صفرية من R_t قيمة مناظرة من Z_t، على سبيل المثال، في الجدول رقم (٣-١) إذا قمنا بإحلال Z_t محل $1/R_t$ في المعادلة (3.37) فإننا نحصل على :

$$\dot{W}_t = a + bZ_t + u_t \tag{3.39}$$

جدول رقم (٣-١) مصفوفة المشاهدات المفترضة

W	R	Z
0.02	0.06	16.7
0.04	0.04	25.0
0.05	0.03	33.3
.	.	.
.	.	.
.	.	.

بمعنى آخر، وبتحويل بسيط، فقد حولنا العلاقة غير الخطية في المعادلة (3.37) إلى علاقة خطية في المعادلة (3.39). وحينئذ، يمكننا استخدام نموذجنا الخطي للانحدار، وقيم $\dot{W}_t$ و Z_t لتقدير المعلمات a و b. وعلى سبيل المثال، باستخدام الصيغ التي اشتققناها في الفصل الثاني، يكون لدينا :

$$\hat{b} = \frac{\Sigma\left(Z_t - \overline{Z}\right)\dot{W}_t}{\Sigma\left(Z_t - \overline{Z}\right)^2}, \tag{3.40}$$

$$\hat{a} = \overline{\dot{W}} - \hat{b}\overline{Z}.$$

وبتجميع النتائج السابقة، فإن مقدر القيمة المتوسطة لـ W_t المناظر لقيمة معطاة R_t سيكون:

$$\hat{W}_t = \hat{a} + \hat{b}\left(\frac{1}{R_t}\right) \tag{3.41}$$

والآن يمكننا استخدام المعادلـة (3.41) للتنبؤ. فعلى سبيل المثال، إذا كان مـعـدل البطالة هو 5% فإننا نتوقع أن يكون معدل التغير في الأجور :

$$\hat{W}_t = \hat{a} + \hat{b}\left(\frac{1}{0.05}\right) = \hat{a} + 20\hat{b} \tag{3.42}$$

ويعد التحويـل *العكسـي* reciprocal transformation أحد التحويلات التي يمكـن استخدامها لتحويل العلاقة غير الخطية بين متغيرين إلى علاقة خطـيـة. ولـهـذ التحويلات أهمية عظيمة لأنها تعني أن نموذج الانحدار الخطي البسيط الذي كوّناه ليس مقيدا تقيدًا كبيرًا كما يظهر لأول وهلة. ومن خلال الاستخدام الحكيم لهذه التحويلات المختلفة، يصبح من الممكن أن نضع تشكيلة عريضة من العلاقات غير الخطية على شكل خطي، ويسمح لنا ذلك بتقدير معلمات مثل هذه الـنـمـاذج باستخدام الطرق التي بنيناها فعلا. سندرس فيما يأتي تحويلين آخرين يستخدمان بكثرة في الاقتصاد القياسي.

التحويل اللوغاريتمي

افترض أننا نرغب في تقدير معلمات نموذج الإنتاج التالي :

$$Q_t = aL_t^b e^{u_t} \tag{3.43}$$

حيث :

Q_t = حجم الإنتاج خلال الفترة t،

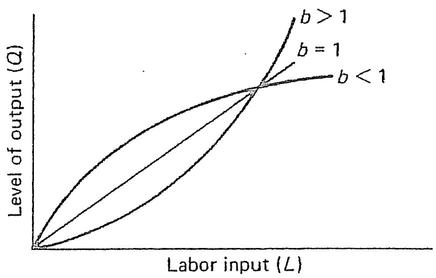
L_t = مدخل العمل خلال الفترة t،

e = حد ثابت يعادل بالتقريب 2.718،

u_t = الخطأ العشوائي في الفترة t و a، b هي المعلمات التي نرغب في تقديرها.

في هذا النموذج، نفرض أن العمل هو عنصر الإنتاج الوحيد، وسنتخلى عن هذا الافتراض في الأجزاء الأخيرة من هذا الكتاب.

وعلى افتراض أن المعادلـة (3.43) تمثل وصفا دقيقا لدالة الإنتاج فقد نهتـم بخاصة بالمعلمة b، أو أنه قد تكون لدينا افتراضات معينة حولها، لأن قيمة المعلمة b تبين لنا ما إذا كان هناك تناقص أو، ثبات أو تزايد في غلة الحجم ، وتناظر هذه الحالات b < 1 و b = 1 أو b > 1 على الترتيب كما سيتضح من الشكل رقم (٣-٥).



شكل رقم (٣-٥)

وأولى المشاكل القياسية في المـعـادلـة (3.43) هي أن العلاقة غير خطـيـة ومانحتاجه، مرة أخرى، طريقة تحويلها إلى علاقة خطية حتى يمكننا تطبيق طرق التقدير التي عرفناها واستخدمناها من قبل.

والتحويل الذي نبحث عنه هو التحويل اللوغاريتمي. فـمـثـلا، إذا أخـذنـا اللوغاريتمات لكل جانب من المعادلة (3.43) يكون لدينا:

$$\ln Q_t = \ln a + b \ \ln L_t + u_t \qquad (3.44)$$

حيث ترمز ln إلى «اللوغاريتم الطبيعي» للمتغير (أي اللوغاريتم الذي يكون أساسه e التي تعادل 2.718 بالتقريب). يتضح لنا الآن أن المعادلة (3.44) خطية في لوغارتمات المتغيرات، ولذا نقوم بالتحويل اللوغارتمي التالي :

دع :

$$Q_t^* = ln\ Q_t,\ a^* = ln\, a,\ \text{و}\ L_t^* = ln\, L_t \qquad (3.45)$$

وباستخدام هذه التعويضات في المعادلة (3.44)، يصبح لدينا :

$$Q_t^* = a^* + bL_t^* + u_t \qquad (3.46)$$

والآن ينبغي أن يتضح أنه إذا عملنا الافتراضات المعتادة المرتبطة بالخطأ العشوائي u_t، فإنه يمكن تقدير المعلمات a و b في المعادلة (3.46) بوساطة طريقة المتغير المساعد. وبالتحديد، فعن طريق أخذ اللوغاريتمات الطبيعية للقيم المشاهدة لـ Q_t و L_t يمكن حساب

$$\hat{b} = \frac{\Sigma\left(L_t^* - \overline{L}^*\right)Q_t^*}{\Sigma\left(L_t^* - \overline{L}^*\right)} \equiv \frac{\Sigma\left(\overline{ln\, L_t} - \overline{ln\, L}\right)L_n Q_t}{\Sigma\left(\overline{ln\, L_t} - \overline{ln\, L}\right)^2} \qquad (3.47)$$

$$\hat{a}^* = \overline{Q}^* - \hat{b}\overline{L}^* \equiv \overline{lnQ} - \hat{b}\overline{ln\, L}$$

حيث

$$\overline{L}^* = \Sigma L_t^* / n,\ \text{و}\ \overline{Q}^* = \Sigma Q_t^* / n$$

ولما كنا نعرف أن مقدراتنا غير متحيزة، فسيكون لدينا

$$E\left(\hat{b}\right) = b\ \text{و}\ E\left(\hat{a}^*\right) = a^* \qquad (3.48)$$

تعطينا الصيغة في المعادلة (3.47) مقدرا غير متحيز لأس متغير مدخل العمل في المعادلة (3.43). وباستخدام هذا المقدر يمكننا أن نتبين حقيقة ما إذا كانت نتائجنا تدل على وجود ظاهرة تناقص الغلة بالنسبة لعنصر العمل.

نلاحظ، أيضا، أن طريقتنا في التقدير تعطي مقدرا غير متحيز لـ a^*، ولكننا في الحقيقة نهتم بقيم المعلمة a وليست a^*، طالما أن a هي المعلمة التي تظهر في دالة الإنتاج. وطالما أن a^*=In a فإننا نأخذ عكس اللوغارتم ولذا تصبح $a = e^{a^*}$، ويكون المقدر المقترح لـ a هو:

$$\hat{a} = e^{a^*} \qquad (3.49)$$

ولكن $\hat{a}$ ليس مقدرا غير متحيز لـ a على الرغم من أن $E\left(\hat{a}^*\right) = a^*$ أي أن

$E(\hat{a}) \neq e^{E}(\hat{a}^{*}) = e^{a^{*}} = a$. لعلنا نتذكر أننا اشرنا في ملحق الفصل الأول إلى أن القيمة المتوقعة لدالة غير خطية مثل $E(\hat{e}^{*})$ لاتساوي عموما مع دالة القيمة المتوقعة $\left[e^{E(\hat{a}^{*})}\right]$، وهذا مثال لهذه القاعدة. ولحسن الحظ فإنه لايزال يمكننا إثبات أن $\hat{a}$ مقدر متسق لـ a.

خلاصة القول أنه إذا كان لدينا دالة ذات الشكل العام:

$$Y_t = aX_t^b e^{u_t} \tag{3.50}$$

فإنه يمكننا استخدام التحويل اللوغاريتمي لوضع تلك الدالة في الشكل الخطي:

$$Y_t^* = a^* + bX_t^* + u_t \tag{3.51}$$

حيث تعني (*) اللوغارتم الطبيعي للمتغير المناظر. ويمكننا تقدير المعادلـة (3.51) باستخدام طرق التقدير الخطية التي يمكن استخدامها للحصول على تقدير غير متحيز لـ b، وبأخذ عكس اللوغارتمات نحصل على تقدير متحيز ولكن في الأقل، متسق لـ a.

ويعد الشكل اللوغاريتمي من الأشكال الدالية الشائعة جدا للنماذج الاقتصادية بسبب أنه يمكن تفسير معامل الانحدار على أنه مرونة المتغير التابع للمتغير المستقل. فعلى سبيل المثال في المعادلـة (3.51) أو (3.50) تكون مرونة القيمة المتوقعة لـ Y_t للمتغير X_t في الحقيقة b * لذلك يتضمن النموذج (3.51) ثبات المرونة.

التحويل شبه اللوغاريتمي The semilog transformation

تظهر أهمية التحويل شبه اللوغاريتمي في تكوين النماذج التي تحتوي على

---

* على سبيل المثال يتضح لنا من المعـادلـة (3.50) أن القيمة المتوقعة لـ Y_t (عند قيمة معينة لـ X_t) هي $Y_t^m = aX_t^b E(e^u t)$. ويتضمن الافتراض بأن و X_t مستقلان أن يكون $E(e^{ut})$ مساويا لرقما ثابتا (مثلا، C) لن يكون مساوياً (عموماً) الوحدة مثلا، $\left(E(e^{ut}) \neq e^{E(u_t)} = e^0 = 1\right)$ وقد نعبر عن القيمة المتوقعة لـ Y_t^m المناظرة لـ X_t على النحو $Y_t^m = a_1 X_t^b$ ، حيث $a_1 = ac$. بأخذ التفاضل بعد ذلك لـ Y_t^m بالنسبة لـ X_t، نحصل على $\frac{dY_t^m}{dX_t} = a_1 b X_t^{b-1} = \frac{bY_t^m}{X_t}$

وبحل هذه المعادلة بهدف الحصول على b، نجد أن :

$$b = \frac{dY_t^m / Y_t^m}{dX_t / X_t}$$

وهي مرونة Y_t^m بالنسبة لـ X_t.

معدلات للنمو. افترض، على سبيل المثال، أننا نحتاج إلى تقدير متوسط المعدل السنوي للزيادة في حجم قوة العمل في الولايات المتحدة الأمريكية على مدى فترة معينة. فقد نعتقد أنه، خلال تلك الفترة، زادت قوة العمل بمعدل سنوي ثابت مع تغيرات طفيفة ناتجة عن الحوادث العشوائية المختلفة. فإذا كان ذلك صحيحا فقد يكون من الممكن افتراض علاقة مثل :

$$L_t = a(1+g)^t e^{u_t}, \quad t = 1,2,\cdots,n \tag{3.52}$$

حيث :

L_t = حجم قوة العمل خلال السنة t.

a = معلمة

g = معلمة وهي معدل النمو المركب في L_t

u_t = الخطأ العشوائي.

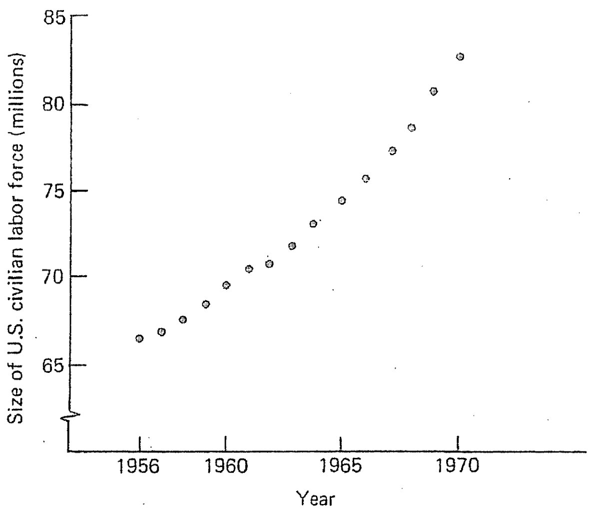
يلاحظ أن المتغير المستقل t في المعادلة (3.52) يظهر بوصفه قوة (أس) في المعادلة (3.50) بينما يظهر المتغير المستقل X_t (على نحو مغاير) مرفوعا لقوة ثابتة b. ولكن كلا من المعادلة (3.52) والمعادلة (3.50) يظهر في شكل حاصل ضرب. وهكذا، وكما هو متوقع، سنأخذ اللوغاريتمات لتحويل العلاقة إلى الشكل الخطي.

وقبل أن نفعل ذلك، ينبغي أن نشير إلى إحدى خصائص مسارات النمو الزمنية. نعرض في جدول (٣-٢) بيانات عن حجم قوة العمل المدنية في الولايات المتحدة الأمريكية خلال السنوات ١٩٥٦-١٩٧٠م. وبرسم هذه البيانات كما يظهر في الشكل (٣-٦)، نجد أن المنحنى يصبح أكثر انحدارا بمرور الوقت مما يوحي بأن قوة العمل قد نمت بمعدلات أكبر في السنوات الحديثة. إلا أن هذا في الحقيقة توهم فحسب لأن معدلا معينا للنمو سوف يولد زيادات *مطلقة* لقوة العمل سنة بعد أخرى، بمعنى أن الأساس الذي يبنى عليه النمو سيكون أعلى في السنوات الحديثة منه في السنوات السابقة (فمثلا تكون 3% من X أكبر من 3% من Y إذا كانت $Y < X$).

جدول رقم (٣-٢) قوة العمل المدنية بالولايات المتحدة بملايين الأفراد

السنة	قوة العمل
١٩٥٦	٦٦,٦
١٩٥٧	٦٦,٩
١٩٥٨	٦٧,٦
١٩٥٩	٦٨,٤
١٩٦٠	٦٩,٦
١٩٦١	٧٠,٥
١٩٦٢	٧٠,٦
١٩٦٣	٧١,٦
١٩٦٤	٧٣,١
١٩٦٥	٧٤,٥
١٩٦٦	٧٥,٤
١٩٦٧	٧٧,٣
١٩٦٨	٧٨,٧
١٩٦٩	٨٠,٧
١٩٧٠	٨٢,٧

المصدر: التقرير الاقتصادي للرئيس، واشنطن، الولايات المتحدة، مكتب الطباعة الأمريكي، فبراير ١٩٧١م، ص٢٢٢.



شكل رقم (٣-٦)

فإذا أخذنا الآن اللوغاريتمات لطرفي المعادلة (3.52) نحصل على :

$$\ln L = \ln a + t\ln(1+g) + u_t \tag{3.53}$$

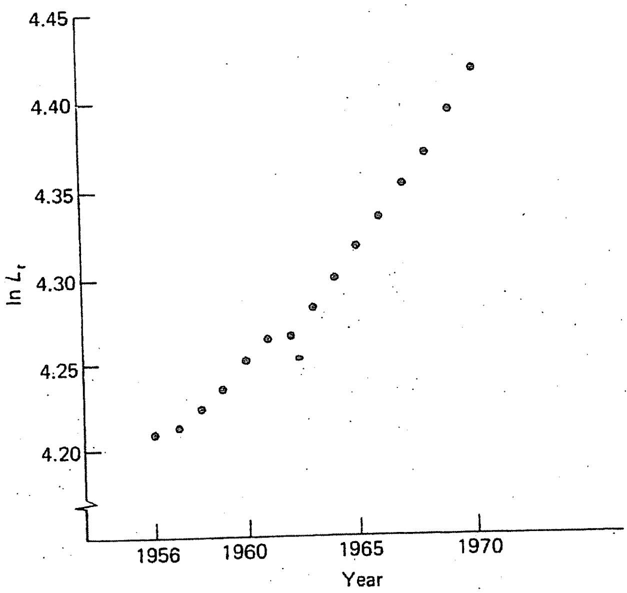
فإذا جعلنا

$$\begin{aligned} L_t^* &= \ln L_t \\ a^* &= \ln a, \\ b^* &= \ln(1+g) \end{aligned} \tag{3.54}$$

فإننا نحصل على

$$L_t^* = a^* + b^* t + u_t \tag{3.55}$$

وتوضح لنا المعادلة (3.55) أن معدل النمو المركب يتضمن علاقة خطية بين $\ln L_t$ و t وليس بين L_t و t . فإذا رسمنا قيم لوغاريتم L_t بدلا من قيم L_t عبر الزمن لشاهدنا النقاط تقارب المسار الخطي (كما يظهر في الشكل ٣-٧).



شكل (٣-٧)

ولتقدير المعلمات الموجودة في المعادلة (3.55) أي (a^* و b^*) ينبغي أن تتوافر لدينا مشاهدات حول L_t و t لكل سنة من السنوات التي ندرسها. وللتوضيح، دعنا نعود إلى القيم المشاهدة لقوة العمل بالولايات المتحدة الأمريكية خلال السنوات ١٩٥٦-١٩٧٠م. وتزودنا القيم المشاهدة لـ L_t لكل من هذه السنوات مباشرة بالقيم المشاهدة المناظرة للوغاريتم L_t. يحصل على مشاهدات t، بسهولة، عن طريق وضع أرقام للسنوات على التتابع [أي ١٩٥٦ السنة الأولى (t=1)، و ١٩٧٠ السنة الخامسة عشرة (t=15)] ويوضح الجدول (٣-٣) ذلك.

جدول (٣-٣) قوة العمل المدنية بالولايات المتحدة (بالملايين)

السنة	t	L	LnL
١٩٥٦	١	٦٦,٦	٤,١٩٩
١٩٥٧	٢	٦٦,٩	٤,٢٠٣
١٩٥٨	٣	٦٧,٦	٤,٢١٤
١٩٥٩	٤	٦٨,٤	٤,٢٢٥
١٩٦٠	٥	٦٩,٦	٤,٢٤٣
١٩٦١	٦	٧٠,٥	٤,٢٥٦
١٩٦٢	٧	٧٠,٦	٤,٢٥٧
١٩٦٣	٨	٧١,٨	٤,٢٧٤
١٩٦٤	٩	٧٣,١	٤,٢٩٢
١٩٦٥	١٠	٧٤,٥	٤,٣١١
١٩٦٦	١١	٧٥,٨	٤,٣٢٨
١٩٦٧	١٢	٧٧,٣	٤,٣٤٨
١٩٦٨	١٣	٧٨,٧	٤,٣٦٦
١٩٦٩	١٤	٨٠,٧	٤,٣٩١
١٩٧٠	١٥	٨٢,٧	٤,٤١٥

ويمكننا، بسهولة، من المعلومات الواردة في الجدول (٣-٣) حساب:

$$\hat{b}^* = \frac{\Sigma(t-\bar{t})L_t^*}{\Sigma(t-\bar{t})^2} = 0.0153$$

$$\hat{a}^* = \overline{L_t^*} - \hat{b}^*\bar{t} = 4.17$$

ولما كانت$[\ln(1+g)=b^{*}]$، نجد أن $(g=e^{b^{*}}-1)$. لذا، نقدر معدل النمو (g) عن طريق $(g=e^{b^{*}}-1=2.718^{(0.0153)}-1=0.016)$. وهكذا، يصبح تقديرنا لمعدل النمو السنوي لقوة العمل ١,٦٪. ولأسباب ذكرت في المبحث السابق، يكون مقدرنا لـ a $\left(a=e^{a^{*}}\right)$ متحيزا إلا أنه متسق.

هناك طريقة أخر لحساب معدلات النمو تظهر، احيانا، في الكتابات الإحصائية ويمكن توضيحها على النحو التالي: خذ القيمة الأولية لقوة العملL_t (٦٦,٦ مليونا عام ١٩٥٠م) والقيمة المشاهدة الأخيرة (٨٢,٧ مليونا عام ١٩٧٠م). وبعدئذ وبمساعدة جدول اللوغاريتمات احسب متوسط معدل النمو السنوي (أي حدد معدل النمو السنوي الذي يؤدي إلى جعل ٦٦,٦ تصبح ٨٢,٧ بعد ١٥ عاما.

هذه الطريقة البديلة لاننصح باستخدامها، حيث إنها تأخذ النقطتين الأولى والأخيرة فقط في الشكل (٣-٧) (رسم $\ln L_t$ مقابل t) وإيجاد ميل المنحنى الذي يربط بين هاتين النقطتين. وبمعنى آخر أنه يجعل الخط يمر بنقطتين، فقط، من نقاط شكل الانتشار. تتشابه هذه الطريقة مع الطريقة الأولى، فقط، إذا افترضنا أن العينة المتاحة ذات حجم n=2، ولكن، لجميع العينات من الحجم $(n>2)$ تكون هذه الطريقة البديلة أقل دقة من الطريقة الأولى بسبب كل المعلومات التي تتجاهلها.

استخدام التحويلات: تعميمات

وجدنا في حالات عديدة أن افتراضنا المسبق قد يوحي بشكل معين عن العلاقة غير الخطية بين المتغيرات موضع الاهتمام. وغالبا ماسنجد التحويل الملائم لهذه العلاقة إلى الشكل الخطي ثم نطبق بعد ذلك طرق التقدير الخطية. والآن ينبغي أن تكون التحويلات التي تقوم بهذه المهمة واضحة. فمثلا، إذا كان النموذج هو:

$$Y_t=a+bf(X_t)+u_t \tag{3.56}$$

حيث إن $f(X)$ هي دالة* ما في X_t، يمكننا تحديد متغير $Z_t = f(X_t)$ ولذا يكون لدينا نموذج خطي يربط بين Y_t و Z_t. وتعميم العلاقة في المعادلة (3.56) هو:

$$g(Y_t) = a + bf(X_t) + u_t \tag{3.57}$$

حيث إن f و g هما دالتان ربما (غير خطيتين) لـ Y_t و X_t. في هذه الحالة، نكون لدينا علاقة خطية بين Z_{1t} و Z_{2t} حيث إن $[Z_{1t} = g(Y_t)]$ و $[Z_{2t} = f(X_t)]$. وأخيرا فإن نموذجاً يأخذ شكل حاصل الضرب من النوع:

$$g(Y_t) = af(X_t)^{\alpha} e^{u_t} \tag{3.58}$$

سيكون نموذجا خطيا في Z^*_{1t} و Z^*_{2t}، حيث إن $Z^*_{1t} = \ln g(Y_t)$, $Z^*_{2t} = \ln f(X_t)$. وعلى سبيل تدريب للقارئ، عليك أن تثبت أن النموذج:

$$\frac{1}{Y_t} = aX_t^{2\alpha} e^{u_t} \tag{3.59}$$

هو نموذج خطي في كل من $\ln(1Y_t)$, $\ln X^*_2$.**

في عديد من الحالات تمدنا النظرية الاقتصادية بقليل من المساعدة لتحديد الشكل الدقيق للعلاقة موضع الاهتمام. فقد تقترح النظرية (مثلا) أن الكمية المطلوبة من سلعة ما تتغير عكسياً مع السعر. ولكنها لاتخبرنا عن شكل هذه العلاقة، هل هي علاقة خطية أو لوغاريتمية أم شكل أكثر تعقيداً. في مثل هذه الحالات، يمكن، أحيانا، تحديد الشكل الدالي للنموذج عن طريق الفحص البسيط لشكل نقاط الانتشار. أي أن الشكل الدالي يختار ليتوافق مع شكل الانتشار. لكن هذا المنهج (منهج شكل الانتشار) قد يكون مفيدا، فقط،

---

* يفترض أن $f(X_t)$ لاتحتوي على معلمة غير معلومة. أي أنه، إذا كانت لدينا مشاهدات عن X_t، فإنه يمكننا أن نكون مشاهدات عن $f(X_t)$.

** لاحظ أنه يمكن كتابة $X^{2\alpha}$ على النحو $(X^2)^{\alpha}$.

عندما يكون هناك متغيران في العلاقة.* ولما كانت معظم النماذج الاقتصادية تحتوي على عدد كبير من المتغيرات، فسوف نؤجل المناقشة الأكثر عمقا في هذا الموضوع حتى الفصل الخامس.

(٣-٣) الترجيح ووحدات القياس

من المهم عند إجراء الحسابات الفعلية لمعادلة الانحدار استخدام وحدات قياس معقولة ذلك من أجل تبسيط الحسابات في بعض الحالات وكتسهيل تفسير النتائج في حالات أخرى. اعتبر، على سبيل المثال، الجدول (٣-٤) للقيم المشاهدة للاستهلاك الكلي وللدخل المتاح.

جدول رقم (٣-٤)

السنة	المدخل المتاح بالدولارات	الإنفاق الاستهلاكي بالدولارات
١٩٦٠	٣٦٤,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠	٣٢٥,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠
١٩٦١	٣٥٠,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠	٣٢٥,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠
⋮	⋮	⋮
١٩٦٩	٦٣٠,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠	٥٧٦,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠

افترض أننا نريد استخدام هذه القيم المشاهدة لـC_t وY_{dt} لتقدير دالة خطية للاستهلاك:

$$C_t = a + bY_{dt} + u_t$$

* توجد مشكلة أخرى أكثر صعوبة. إذا حُدّد شكل الدالة بوساطة الفحص الأولي للبيانات، وتتمثل في وجود عنصر دائرية circularity. لذا ينبغي علينا، نظريا، أن نحدد أولا نموذجنا ثم نختبره بعد ذلك في ضوء البيانات. أما إذا حدد شكل العلاقة عن طريق الفحص الأولي للبيانات، فإن المنهج الصحيح سيكون استخدام ذلك الشكل ثم اختبار النموذج بعد ذلك مع مجموعة جديدة من البيانات، ولما كان الاقتصاديون لايجدون، عادة، أكثر من عينة واحدة فإن عنصر الدائرية هذا، ولسوء الحظ، يغفل غالبا.

هل من الضروري الاحتفاظ بالأصفار التسعة إلى يمين كل مشاهدة لـC_t وY_{dt} ؟ الاجابة هي لا، إذ يمكننا أن نقلل العبء على أنفسنا إذا أسقطنا هذه الأصفار عن طريق قياس كل متغير بالوحدات الملائمة (في حالتنا هذه ببلايين الدولارات بدلا من الدولارات). وقياسا على ذلك، نجد الفلكيين، مثلا، يقيسون المسافة بالسنوات الضوئية وليس بالبوصات.

فإذا قسنا متغيراتنا ببلايين الدولارات فإن بياناتنا في الجدول رقم (٣-٤) تصبح هي البيانات الموجودة في الجدول (٣-٤أ)ويمكننا بسهولة استخدام البيانات الموجودة في هذا الجدول في تقدير المعلمات a و b لدالة الاستهلاك.

جدول رقم (٣-٤أ)

السنة	الدخل المتاح ببلايين الدولارات	الإنفاق الاستهلكي ببلايين الدولارات
١٩٦٠	٣٥٠	٣٢٥
١٩٦١	٣٦٤	٣٢٥
⋮	⋮	⋮
١٩٦٩	٦٣٠	٥٧٦

والآن افترض أن باحثا آخر يقيس الدخل المتاح والإنفاق الاستهلاكي *بمئات البلايين* من الدولارات. ويظهر جدوله للقيم الملاحظة كما في الجدول (٣-٤ب). باستخدام هذه البيانات، يمكن أيضا، للباحث الثاني تقدير المعلمات a و b لدالة الاستهلاك. والآن نتساءل عن العلاقة بين تقديرات المعلمات المبنية على الجدول (٣-٤أ) وتلك المؤسسة على الجدول (٣-٤ب).

جدول رقم (٣-٤ب)

السنة	الدخل المتاح بمئات البلايين من الدولارات	الإنفاق الاستهلكي بمئات البلايين من الدولارات
١٩٦٠	٣,٥٠	٣,٢٥
١٩٦١	٣,٦٤	٣,٢٥
⋮	⋮	⋮
١٩٦٩	٦,٣٠	٥,٧٦

وتشابه العلاقة بين تقديرات المعلمات المبنية على الوحدات المختلفة للقياس، بالضبط، تلك العلاقة الموجودة بين القيم المناظرة للمعلمات. افترض (مثلاً، أننا نقيس الدخل المتاح والإنفاق الاستهلاكي ببلايين الدولارات ونعبر عن النموذج على النحو:

$$c_t = a + by_{dt} + u_t \tag{3.60}$$

تمثل المعلمة a (في هذا النموذج) كمية الانفاق الاستهلاكي (ببلايين الدولارات) عندما يكون الدخل المتاح مساوياً الصفر. بينما تعبر المعلمة b عن الميل الحدي للاستهلاك. افترض الآن أننا نقسم كل حد في المعادلة (3.60) على مائة، إذن سنحصل على:

$$C_t = A + bY_{dt} + U_t \tag{3.61}$$

حيث إن:

$$C_t = \left(\frac{1}{100}\right)c_t,\ \ A = \left(\frac{1}{100}\right)a,\ \ Y_{dt} = \left(\frac{1}{100}\right)y_{dt},\ \ U_t = \left(\frac{1}{100}\right)u_t,$$

المعادلة (3.61) هي دالة استهلاك تربط بين الإنفاق الاستهلاكي والدخل المتاح عندما تقاس هذه المتغيرات *بمئات* البلايين من الدولارات. واشتقت هذه المعادلة من المعادلة (3.60)، ولذا، يجب أن تكون متناسقة معها. فمثلا، إذا كانت $(Y_{dt} = 0\ ,\ C_t = A + u_t)$ أو بالضرب في مائة $(c_t = a + u_t)$. فإن الباحث الذي يستخدم البيانات الواردة في الجدول (3.4A) يعتبر في الحقيقة النموذج (3.60).