المحور الأول : البرمجة الخطية

I- مفهوم البرمجة الخطية:

تعد البرمجة الخطية من أبسط وأسهل الأساليب الرياضية التي يمكن الإستعانة بها لمعالجة المشاكل التي تواجه المؤسسة الإقتصادية، وهي تندرج -كما سبق الذكر – ضمن ما يعرف بالأساليب الكمية والتي تعرف على أنها: "مجموعة من الأدوات أو الطرق التي تستخدم من قبل متخذ القرار لمعالجة مشكلة معينة، ولترشيد قرار إداري الواجب إتخاذه بخصوص حالة معينة، ويفترض في هذه الحالة توفر القدر الكافي من البيانات المتعلقة بالمشكلة." *(عبد الله السعيد، 2007، صفحة 15)*

وتهدف عموما إلى حل المشاكل والمسائل بتعيين التوليفة المثلى للإنتاج أو غيرها وذلك لتحقيق الأهداف المحددة ولقد شهدت البرمجة الخطية العديد من التعريفات، وهذا حسب مختلف المفكرين والمحللين وميولهم الإقتصادية أو الإداري، .

وعموما يمكن تحديد ***أهم متطلبات البرمجة الخطية*** فيما يلي:

- وجود هدف تسعى المؤسسة لتحقيقه والذي يعبر عنه بدالة (تخفيض تكاليف،تعظيم أرباح...).
- القيود: هي مجموعة من القيود والشروط التي في ظلها يتم تحقيق الهدف .
- الموارد:يجب أن تكون هناك موارد متاحة للمؤسسة ،ولها استخدامات متعددة ،معبر عنها بمعاملات تقنية.
- إمكانية صياغة المسألة في شكل نموذج رياضي، يحقق العلاقة الخطية حيث ينبغي أن تتوفر العلاقة بين متغيرات الدراسة أو المشكلة، حيث ينظر لهذه العلاقة من منظورين اقتصادي يتمحور في التناسب بين المدخلات والمخرجات ، ورياضي يقصد به أن تكون المتغيرات من الدرجة الاولى .
- شرط عدم السلبية :حيث يشترط البرنامج الخطي أن لا تكون قيمة المتغيرات سالبة.

II- تطبيقات البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في العديد من المجالات التي يكون غالبا الغرض فيها اتخاذ القرار حول تحديد أفضل الحلول لمشكلة معينة ، وعليه يمكن استخدام البرمجة الخطية في حل العديد من المشاكل أهمها: *(العلاونة و آخرون، 2000، الصفحات 131-132)*

– ***مشكلة تخطيط الإنتاج:***

تساعد البرمجة الخطية في تحديد الكمية الواجب إنتاجها من سلعة معينة والتي تؤدي الى تحقيق الربح الأعلى، ولان الموارد المتاحة تمتاز عادة بالندرة لكافة المؤسسات فإن البرمجة الخطية تعتبر الوسيلة الفعالة لتوزيع تلك الموارد على السلع المراد إنتاجها بطريقة من شأنها تعظيم أرباح المنشأة.

– ***مشكلة تخطيط الاستثمار:***

تساعد البرمجة الخطية المنشأة او المستثمر على تعظيم أرباحه من خلال توزيع الأموال المتاحة على البدائل الاستثمارية المتاحة بطريقة من شأنها ان تؤدي الى تعظيم الإرباح .ويعني ذلك ان المنشأة تستطيع ان تخطط استثماراتها بشكل يؤدي الى تعظيم الإرباح باستخدام أسلوب البرمجة الخطية.

– ***مشكلة توزيع العاملين:***

تحتاج المنشأة الى توزيع العاملين على المواقع والى تحديد عدد العاملين اللازم بطريقة من شأنها أن تؤدي الى تخفيض التكلفة الى أدنى حدودها.

– ***مشكلة توزيع الإنتاج:***

تساعد البرمجة الخطية المنشأة على توزيع منتجاتها التي تنتجها من خلال عدة مصانع على الأسواق المختلفة وتساعدها أيضا على تخفيض تكلفة نقل المواد من المصانع المتعددة الى الى المخازن المتعددة للمنشأة.

- المشاكل المتعلقة بالإنتاج ،كتحديد التشكيلة الممكنة من مختلف المنتجات وكمياتها في ظل تحقيق هدف محدد،وفي ظل الكميات المتاحة من عوامل الإنتاج.
- تستعمل في اختيار وتعيين الأفراد في المؤسسة (مسألة التعيين).
- توزيع الموارد والمنتجات المتجانسة من مصادر تواجدها نحو أماكن استخدامها (مسألة النقل).
- يمكن استخدام البرمجة الخطية في تخطيط الإشهار ،تخطيط المخزون،المفاضلة بين طرق الإنتاج المتاحة ....إلخ.

III- نموذج البرمجة الخطية:

يعتبر تشكيل النموذج الرياضي أهم مرحلة لحل مشاكل البرمجة الخطية في مختلف المجالات السابق ذكرها، والنموذج هو ترجمة رياضية للمشكلة .

ويعرف ***النموذج*** على أنه : عبارة عن عينة أو صورة مصغرة لمجتمع معين ويمكن أن يكون صيغة رياضية تحمل مواصفات حالة معينة، من خلال عدد من العلاقات الرياضية تعبر عن المشكلة أو الحالة التي يتم دراستها بشكل أو بأخر. *(محمد مرسي، 2004، صفحة 29)*

ويأخذ النموذج إحدى الصيغتين:

- *تعظيم الأرباح La Maximisation*، والتي ندها عادة لما يكون الهدف تحقيق أقصى العوائد والمداخيل ،تحقيق أقصى إنتاج ،...إلخ.
- *تقليل التكاليف La Minimisation*، والتي تستخدم في الحالة العكسية للتعظيم ،اي عندما يكون الهدف هو تدنية التكاليف لأدنى قيمة لها .

IV-1 مكونات نموذج البرمجة الخطية :

عند تحديد الهدف من المشكلة يتم صياغتها في شكل نموذج رياضي يتضمن المكونات التالية:

✓ **دالة الهدفLa fonction objective :**

إن الهدف الذي نسعى إلى الوصول إلىه من وراء حل المشكلة ىتمثل في الوصول إلى أمثلية الحل) L'Optimalité(، والتي تأخذ أحد الوجهىن السابق ذكرهما :

- التعظيم .
- التقليل.

ويتم التعبير عن هاته الحالة الرياضية بمعادلة رياضية تضم متغيرات من الدرجة الأولى.

✓ **القيود les contraintes**

تعكس القىود في معظم الحالات محدودىة الموارد، و تعبر عن مجموعة المحددات التي لا ىستطىع متخذ القرار التحكم فىها.ويتم ترجمة القيود في شكل متراجحات أو معادلات حسب مضمون وشروط التخصيص المحددة في المسألة المراد حلها.

✓ **شرط عدم السلبية: non négativité des variables**

ويقصد به أن الكميات المستهدفة لمتغيرات القرار لا يمكن أن تكون سالبة، لأن ذلك ليس له معنى في الواقع، و بتعبير آخر لا يمكن للمؤسسة أن لا تنتج منتوجاً معينا و لكن لا يمكن أن تستهدف إنتاج كمية سالبة.

IV -2 الشكل القانوني والشكل المعياري في نموذج البرمجة الخطية :

يأخذ نموذج البرمجة الخطية شكلين :الشكل القانوني والشكل المعياري.

- **الشكل القانوني (النظامي):** يكون عندما تكون مسألة قيود المسألة عبارة عن متراجحات/متباينات ودالة الهدف من نوع التعظيم (Max) أو تقليل(Min) وذلك على النحو التالي :

<u>في حالة التعظيم :</u> يظهر الشكل العام للنموذج كما يلي:

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{n} CiXi$$

$$a_iX_i \leq bi$$

$$a_iX_i \geq 0$$

حيث يكون النموذج في صيغته التفصيلية كما يلي:

- ***دالة الهدف:***

$$\text{Max } Z = C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+\ldots\ldots\ldots C_nX_n$$

- ***القيود:***

- القيد الأول

$$a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}Xn \leq b_1.$$

-القيد الثاني

$$a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}Xn \leq b_2.$$

شرط عدم السلبية

$$X_1,X_2,\ldots\ldots\ldots\ldots X_n \geq 0$$

<u>في حالة التقليل:</u> يظهر الشكل العام للنموذج كما يلي:

$$\text{Min } C= \sum_{i=1}^{n} CiXi$$

$$a_iX_i \geq bi$$

$$a_iX_i \geq 0$$

حيث يكون النموذج في صيغته التفصيلية كما يلي:

- ***دالة الهدف:***

$$\text{Min } C = C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+\ldots\ldots\ldots C_nX_n$$

- ***القيود:***

– القيد الأول $a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}Xn \geq b_1.$

– القيد الثاني $a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}Xn \geq b_2.$

- ***شرط عدم السلبية :***

$X_1,X_2,\ldots\ldots\ldots\ldots X_n \geq 0$

حيث a_{ij},b_i,C_i ثوابت تحدد من معطيات المسألة وعموما هي تمثل الآتي :

- b_i تعبر عن الكمية المتوفرة من المورد i.
- a_{ij} تعبر عن الإستعمالات من المورد b_i للحصول على وحدة واحدة من المتغير X_i.
- C_i تمثل مساهمة الوحدة الواحدة من X_i في تحقيق هدف البرنامج الرياضي.

نشير هنا إلى وجود صيغتين للنموذج الرياضي في الشكل القانوني لمسألة البرمجة الخطية:

- الصيغة الأولى : وتتحقق في حالة التعظيم أو التقليل وتمثل الشكل الأولي الذي يأخذه النموذج عند تشكيل المسألة والتي تكون صيغة القيود فيها موحدة (متراجحات) من الشكل ≤ في حالة التقليل ،و من الشكل ≥ في حالة التعظيم.
- الصيغة الثانية : وتكون بدورها في الحالتين وتتحقق عندما تكون القيود مختلطة بين متراجحات ومعادلات، حيث يمكن أن تكون المتراجحات مختلطة بين ≤ أو ≥.

***الشكل المعياري:** وهي الصيغة الموالية والتي يجب تحديدها قبل الشروع في عملية الحل ، حيث يتم تحويل جميع القيود إلى معادلات (على شكل مساواة) مهما كان نوع النموذج ونوع دالة الهدف)حالة تعظيم /حالة تقليل) .

وعليه يظهر **الشكل العام للنموذج المعياري** في الحالتين على النحو التالي:

حالة تعظيم	**حالة تقليل**
$Max\ Z = \sum_{i=1}^{n} CiXi$	$Min\ C= \sum_{i=1}^{n} CiXi$
$a_iX_i = bi$	$a_iX_i = bi$
$a_iX_i \geq 0$	$a_iX_i \geq 0$

IV- أمثلة تطبيقية حول كيفية صياغة النموذج الرياضي :

- **مثال تطبيقي رقم 01:**

تقوم مؤسسة ما بإنتاج الكراسي والطاولات وبيعها للمدارس، حيث أن إنتاج كرسي واحد يتطلب 3 صفائح خشبية و 4 قطع من الحديد، وبعد بيعه يحقق ربحا قدره 250 دج، أما إنتاج الطاولة الواحدة فيتطلب 6 صفائح خشبية و 7 قطع من الحديد، وبعد بيعها تحقق ربحا قدره 430 دج، حيث أن المؤسسة لا تتوفر إلا على 180 قطعة خشبية و 320 قطعة من الحديد.

المطلوب: ما هي الكميات المثلى الواجب إنتاجها من كلا المنتجين، و التي تحقق لمؤسسة أكبر ربح ممكن؟

الحل :

تحديد المتغيرات:

X_1: تمثل كمية الكراسي التي سوف تنتجها المؤسسة وتحقق لها أكبر ربح؛

X_2: تمثل كمية الطاولات التي سوف تنتجها المؤسسة و تحقق لها أعظم ربح.

1- **صياغة دالة الهدف:** إن ربح المؤسسة ناتج عن إنتاج و بيع كل من الكراسي و الطاولات و عليه:

- **إنتاج الكراسي:**

إنتاج X_1 كرسي يحقق ربحا قدره $(250 \times x_1)$

- **إنتاج الطاولات:**

إنتاج X_2 طاولة يحقق ربحا قدره $(430 \times x_2)$

و عليه و بما أن هذه المؤسسة تسعى إلى تعظيم أرباحها فإنه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$Max\ Z = 250\ X_1 + 430\ X_2$$

2- **تشكيل القيود:** فعلى المؤسسة أن تحترم ما تتوفر عليه من مواد أولية عند تعظيمها لأرباحها.

- **قيد المادة الأولية الأولى (الخشب):** تمثل كمية الخشب الكلية مجموع الخشب المستخدم في إنتاج الكراسي $(3 \times x_1)$ و الخشب المستخدم لإنتاج الطاولات $(6 \times x_2)$ و الذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة و المقدرة بـــــ 180 قطعة. و هذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$3\ x_1 + 6\ x_2 \leq 180$$

- **قيد المادة الأولية الثانية (الحديد):** تمثل كمية الحديد الكلية مجموع الحديد المستخدم في إنتاج الكراسي ($x_1 \times 4$) و الحديد المستخدم لإنتاج الطاولات ($x_2 \times 7$) و الذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة و المقدرة بـــــ 320 قطعة. و هذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$4 x_1 + 7 x_2 \leq 320$$

3- شرط عدم السلبية: حيث أن إنتاج كل من الكراسي والطاولات لا يمكن أن يكون بكميات سالبة، فإما يكون موجبا أو معدوما، وهو ما يُعبر عنه بالصياغة التالية:

$$X_1, X_2, \geq 0$$

و عليه و بتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف $Max\ Z = 250\, x_1 + 430\, x_2$

قيد الخشب $3 x_1 + 6 x_2 \leq 180$

قيد الحديد $4 x_1 + 7 x_2 \leq 320$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

<u>مثال تطبيقي رقم 02 :</u>

نفترض أن مؤسسة لإنتاج الكوابل ،تقوم بإنتاج نوعين من المنتوج X_1 و X_2 حيث (X_1 كابل ذو ضغط مرتفع ،و X_2 كابل ذو ضغط منخفض) ،تحتاج في ذلك لثلاث مواد أولية (نحاس ، بلاستيك، مادة تغليف)، احتياجات الإستخدام من هذه المواد تظهر في الجدول الموالي:

	المنتوج X_1	المنتوج X_2
نحاس	0.2 كغ	0.3 كغ
بلاستيك	0.4 كغ	0.1 كغ
مادة تغليف	0.2 كغ	0.5 كغ

ونفترض أن للمؤسسة 20000 كغ من النحاس ، و10000 كغ من البلاستيك، و12000 كغ من مادة التغليف ،وأن هدف هذه المؤسسة هو تعظيم الأرباح ،علما أن الربح في الكابل الأول 4 ون و في الثاني 5 ون .

المطلوب : تحويل هذه المعطيات إلى نموذج رياضي.

الحـــــــل :

1- دالة الهدف:

تمثل متغيرات المسألة في المنتوجين X_1و X_2 ونلاحظ أن الهدف هو تحقيق أعظم ربح ،وعليه نحدد دالة الهدف من مجموع ربح المنتوجين بالشكل التالي:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 5X_2$$

2- **القيود:**من خلال نص المسألة نميز أن عملية الإنتاج تتم تحت ظل ثلاثة شروط /قيود وحددت متطلبات كل منتوج والكميات المتوفرة في الجدول المقدم في النص ومن ثم تظهر القيود كما يلي:

قيد النحاس : $0.2X_1 + 0.3X_2 \leq 20000$

قيد البلاستيك $0.4X_1 + 0.1X_2 \leq 10000$

قيد مادة التغليف $0.2X_1 + 0.5X_2 \leq 12000$

3- **شرط عدم السلبية:** بطبيعة الحال ووفقا لشروط بناء النموذج الرياضي في مسائل البرمجة الخطية فإنه لا يمكن أن يكون الإنتاج ذو قيم سالبة وعليه يظهر شرط عدم السلبية على النحو التالي:

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية.

تمهيد:

بعد تشكيل النموذج الرياضي لمسائل البرمجة الخطية ، نمر لمرحلة موالية وهي إيجاد الحل الأمثل لقيم المتغيرات الموضوعة وفقا للهدف المحدد سواء في حالة التعظيم أو في حالة التقليل ،ويتم ذلك باستخدام إحدى الطرق التالية :

- الطريقة الجبرية .
- الطريقة البيانية.
- طريقة السمبلاكس أو كما تعرف بطريقة الجداول.

II-الطريقة البيانية:

إن الطريقة البيانية تتطلب أن يكون عدد المتغيرات اثنان فقط ليس أكثر من ذلك حتى يتسنى تمثيلهما على المعلم المتعامد والمتجانس الذي على أساسه يتم تحديد الحلول ، وتتمثل خطوات الحل بالطريقة البيانية في الآتي *(نخلة، عبد العليم، و عبد العال، 2003، الصفحات 113-114)* :

- يتم تمثيل المتغير الاول على المحور الأفقي والمتغير الثاني على المحور العمودي .
- يتم التعبير عن كل قيد بخط مستقيم يمر من خلال نقطتين ،النقطة الاولى على النحور الأفقي ،والنقطة الثانية على المحور العمودي ،ويمكن الحصول على هاتين النقطتين على ثلاث خطوات هي :

• نفترض أن المتغير الثاني ممثلا للمحور العمودي يساوي الصفر فنحصل على الإحداثي الخاص بالمتغير الأول وتصبح النقطة هي $(X_1,0)$ ويتم تحديد موقعها على المحور الأفقي.

• نفترض أن المتغير الأول ممثلا للمحور الأفقي يساوي صفر فنحصل على الإحداثي الخاص بالمتغير الثاني وتصبح النقطة $(0, X_2)$ ويتم تحديد موقعها على المحور العمودي.

• يتم توصيل هاتين النقطتين بخط مستقيم معبرا عن القيد .

- يتم التعبير بيانيا عن جميع القيود ،ليتم تحديد منطقة الحلول الممكنة ،التي تمثل منطقة ينطبق عليها جميع القيود ، بمعنى آخر يتحقق فيها جميع القيود ،ويلاحظ أنه إذا كانت القيود أصغر من

فإن منطقة الحلول تقع أسفل المستقيمات المعبرة عن القيود وفي اتجاه نقطة الأصل ، أما إذا كانت القيود أكبر من فإن منطقة الحلول تقع أعلى المستقيمات المعبرة عن القيود وفي اتجاه معاكس لنقطة الأصل.

- يتم اختبار نقاط منطقة الحلول الممكنة مع دالة الهدف واختيار النقطة التي تحقق أعلى قيمة إفي حالة كان دالة الهدف من نوع التعظيم، والعكس في حالة التقليل.
- إذا احتوى قيد على متغير واحد فيمكن التعبير عليه بخط مستقيم رأسيا أو أفقيا حسب المتغير إما أن يكون على المحور الأفقي في حال كان القيد يتكون من X_1 فقط، أو أن يكون على المحور العمودي في حال كان القيد يتكون من X_2 .

باختصار تتمحور هذه الطريقة في رسم أو تمثيل مختلف القيود في معلم متعامد ومتجانس انطلاقا من الشكل المعياري للمسألة ،حيث يتم اسقاط معادلات القيود على محور الفواصل والتراتيب في كل مرة يتم فيها جعل أحد المتغيرين معدوما ،ليتم تحديد قيمة المتغير الآخر.

II-1 الطريقة البيانية في حالة التعظيم :

مثال تطبيقي II-01:

لتوضيح خطوات هذه الطريقة نأخذ نفس معطيات **المثال التطبيقي I-01** .

والذي يظهر نموذجه الرياضي كما يلي:

1-دالة الهدف :

$$\textbf{Max } Z = 8X_1 + 6X_2$$

2- القيود:

قيد قسم التقطيع : $4X_1 + 2X_2 \leq 60$

قيد قسم التجميع: $2X_1 + 4X_2 \leq 48$

3-شرط عدم السلبية:

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل :

- <u>التمثيل البياني للقيود</u>

القيد الأول : $4\,x_1 + 2\,x_2 \leq 60$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $4\,x_1 + 2\,x_2 = 60$

نضع $x_1 = 0 \Rightarrow 2\,x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = 30$ A (0, 30)

نضع $x_2 = 0 \Rightarrow 4\,x_1 = 60 \Rightarrow x_1 = 15$ B (15, 0)

القيد الثاني: $2\,x_1 + 4\,x_2 \leq 48$

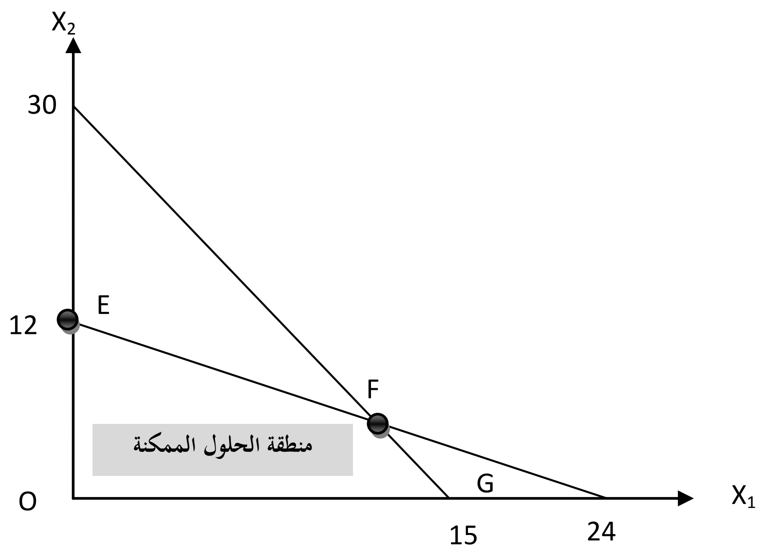
يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $2\,x1 + 4\,x2 = 48$

نضع $x_1 = 0 \Rightarrow 4\,x_2 = 48 \Rightarrow x_2 = 12$ C (0, 12)

نضع $x_2 = 0 \Rightarrow 2\,x_1 = 48 \Rightarrow x_1 = 24$ D (24, 0)

يتم تمثيل القيدين على معلم متعامد ومتجانس.

الشكل رقم 02 : الرسم البياني للمثال التطبيقي رقم II – 01



من خلال الرسم البياني وبتطبيق الخطوات المعتمدة في الحل بالطريقة البيانية نميز ما يلي:

تتحدد منطقة الحلول في المجال (O–E–F–G) والتي يطلق عليها بمنطقة الحلول الممكنة.

لتحديد الحل الأمثل نقم بتعويض احداثيات النقاط المتحصل عليها في دالة الهدف:

النقطة	إحداثيات النقطة		قمية دالة الهدف (Z)
	x_1	x_2	
O	0	0	$\Rightarrow Z = 8(0) + 6(0) \;\Rightarrow\; Z = 0$
E	0	12	$\Rightarrow Z = 8(0) + 6(12) \;\Rightarrow\; Z = 72$
F	12	6	$\Rightarrow Z = 8(12) + 6(6) \;\Rightarrow\; Z = 132$
G	15	0	$\Rightarrow Z = 8(15) + 6(0) \;\Rightarrow\; Z = 120$

بالنسبة للنقطة F يتم تحديد احداثياها بالمساواة بين القيدين

$4x_1 + 2x_2 = 60$ و $2x_1 + 4x_2 = 48$ لنحصل على الإحداثية (12،6).

من خلال معطيات الجدول نستنتج أن الإحداثية التي تحقق دالة الهدف هي النقطة F لأنها تعطي أقصى ربح.

وهي نفس النتيجة المتحصل عليها في الطريقة الجبرية.

مثال تطبيقي II– 02:

تقوم إحدى المؤسسات الإنتاجية بتصنيع نوعين من المنتجات ،حيث لإنتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول يتطلب ذلك استخدام وحتي قياس من مادة البلاستيك ،كما انها تستغرق في ورشة التصنيع 3 ساعات عمل ،بينما تتطلب الوحدة الواحدة من النوع الثاني وحدة قياس واحدة من المادة الأولية البلاستيك ،وتستغرق 6 ساعات عمل بالورشة ،تتوقع المؤسسة أن تتحصل على 1000وحدة قياس من المادة الأولية البلاستيك ،كما أن طاقة ورشة التصنيع المتاحة خلال هاته الفترة هي 2400ساعة عمل .

تقدر المؤسسة ربحا صافيا قدره 20 و.ن /وحدة من النوع الأول و 30 و.ن من النوع الثاني .

المطلوب : صياغة هذه المسألة في نموذج للبرمجة الخطية وحلها بالطريقة البيانية.

الحل :

1– دالة الهدف : $Max\ (z) = 20x_1 + 30x_2$

2– القيود

$2x_1 + x_2 \leq 1000$ ....(1)

$3x_1 + 6x_2 \leq 2400$ ....(2)

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq \mathbf{0}$ –

تحديد إحداثيات القيود:

من المعادلة (1): نضع $X_1 = 0$ ⇦ $X_2 = 1000$

نضع $X_2 = 0$ ⇦ $X_1 = 500$

وعليه الإحداثية هي (500،100)

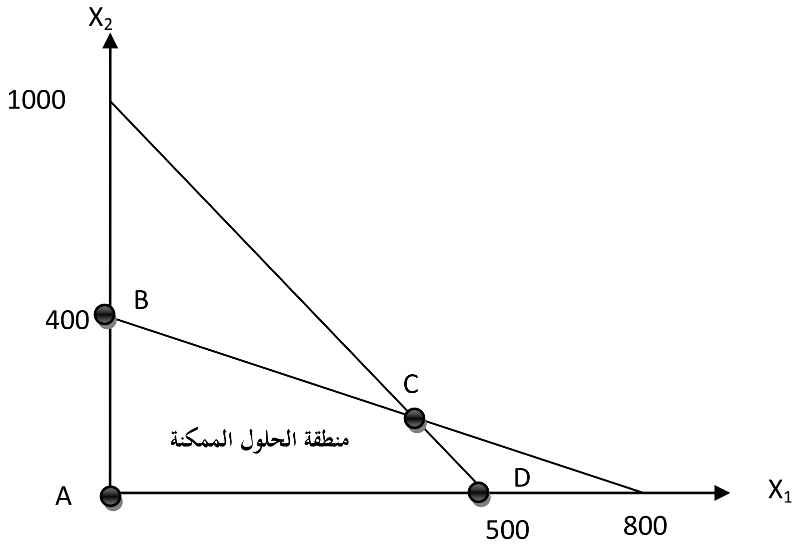
ومن المعادلة (2): نضع $X_1 = 0$ ⇦ $X_2 = 400$

نضع $X_2 = 0$ ⇦ $X_1 = 800$

وعليه الإحداثية هي (800،400).

– نقم بتمثيل هذه النقاط في معلم متعامد ومتجانس:

الشكل رقم 03 : الرسم الياني للمثال التطبيقي رقم II –02



نلاحظ بعد التمثيل البياني نتجت لدينا منطقة الحلول الممكنة ممثلة بالنقاط: D,C,B,A ،سنحاول تحديد ماهو الحل الأمثل في هذه المنطقة؟ استنادا إلى قيمة أعظم ربح ،مع تحديد التغير الحاصل على كل قيد

الطاقات غير المستغلة		دالة الهدف (دينار/وحدة)	حجم الإنتاج		نقطة الإنتاج
القيد الثاني	القيد الأول	***Max(z)= 20x₁ + 30x₂***	X_2	X_1	

A	0	0	0	1000	2400
B	0	400	12000	600	0
C	400	200	14000	0	0
D	500	0	1000	0	900

نلاحظ من خلال الجدول أن النقطة (200, 400) "C" تمثل أحسن برنامج إنتاجي لأنها تحقق أفضل قيمة لدالة الهدف، كما أنه من جهة أخرى القيود عند هذه النقطة تعادل "0" أي أن الطاقات المتاحة مستغلة بالكامل، مما يدل على أمثلية الحل.

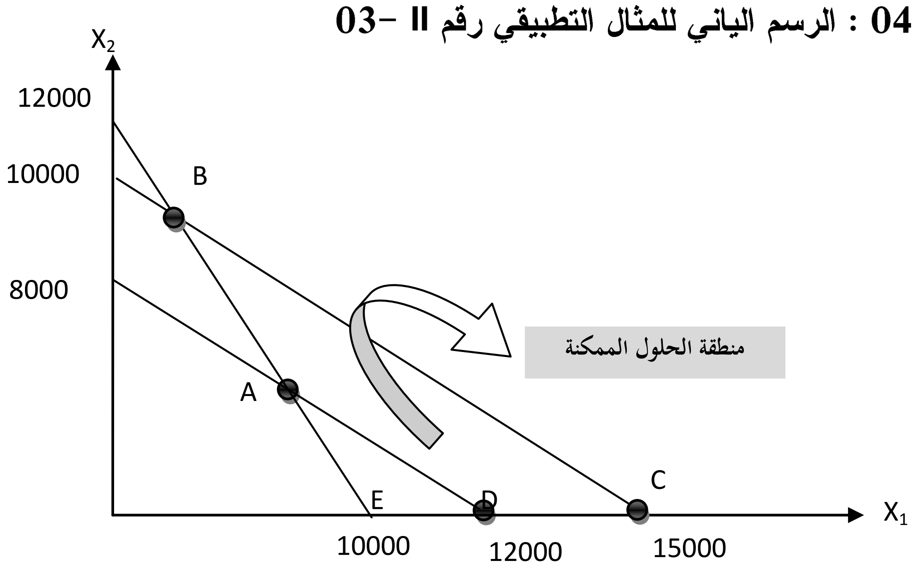
II-2 الطريقة البيانية في حالة التقليل:

مثال تطبيقي رقم II-03:

$$Min\ (C) = 18x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \geq 48000 & \text{..........(1)} \\ 12x_1 + 10x_2 \geq 120000 & \text{..........(2)} \\ 10x_1 + 15x_2 \geq 150000 & \text{..........(3)} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الشكل رقم 04 : الرسم الياني للمثال التطبيقي رقم II -03



نلاحظ أن هذا المثال يختلف عن الأمثلة السابقة في جانبين الاول أن المشكلة هي تقليل التكاليف والثاني أن القيود هي من الشكل أكبر من أو تساوي ، أما بالنسبة للإجراءات الاخرى المتعلقة بكيفية تحديد منطقة الحلول فهي نفسها ، باستثناء أنه- وكما سبق وأن ذكرنا- فإنه يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة برفض

المنطقة التي تحت القيد الممثل بالخط المرسوم على المعلم ، وعليه وفي هذا المثال فإن منطقة الحلول الممكنة هي ممثلة بالنقاط (A ,B,C,D)

ويتم تحديد قيمة النقطتين A و B بنفس الطريقة المعتمدة في حالة التعظيم أي بمساواة معادلتي القيدين ،باستخدام أي طريقة رياضية مناسبة (القسمة،التعويض، الطرح ...) ،وعليه فإن النقطة Aاحداثياها هما (7500،3000) والنقطة B احداثياها هما (3750،7500).

وبعد التعويض في دالة الهدف نجد ما يلي :

النقطة	إحداثيات النقطة		قمية دالة الهدف (Z)
	x_1	x_2	
O	0	0	$\Rightarrow Z = 18(0) + 10(0) \Rightarrow Z = 0$
A	7500	3000	$\Rightarrow Z = 18(7500) + 10(3000) \Rightarrow Z = 165000$
B	3750	3000	$\Rightarrow Z = 18(3750) + 10(3000) \Rightarrow Z = 97500$
C	15000	0	$\Rightarrow Z = 18(15000) + 10(0) \Rightarrow Z = 270000$

من خلال نتائج الجدول نستنتج أن التوليفة التي تحقق أدنى تكلفة هي النقطة B (3750،3000) بقيمة 97500 وهي أدنى قيمة بعد حالة اللإنتاج.

III- حالات خاصة لطريقة الرسم البياني :

III-1- حالة وجود أكثر من حل واحد :

في بعض الحالات يكون هناك أكثر من حل واحد أمثل بمعنى وجود حلول متعددة تعطي نفس قيمة دالة الهدف ، ولتوضيح ذلك نورد المثال التالي:

مثال تطبيقي III-01:

$$Max\ (Z) = 2x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 8 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x_2 \leq 3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 30 \ \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

القيد 1 :X1 = 8

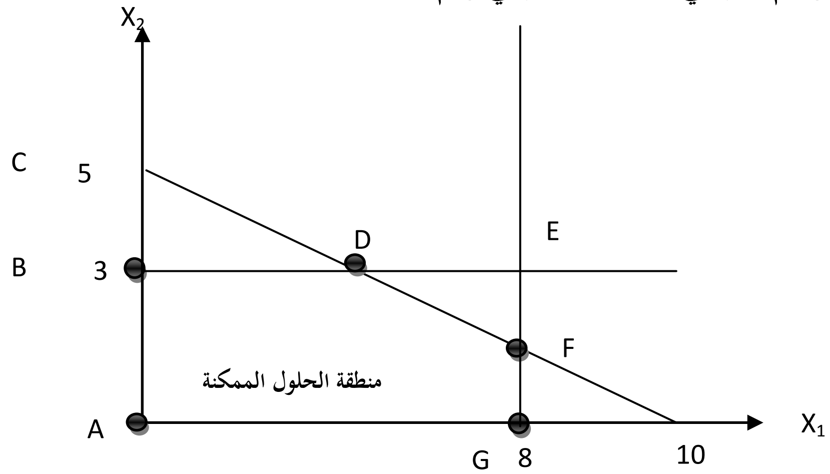
القيد 2 : X2 = 3

القيد3:

لما X1 = 0 ⇦ X2 = 5 لما X2 = 0 ⇦ X1 = 10

يعني توليفة القيد الثالث هي (10،5) ،نسقط هاته المعطيات المتحصل عليها بيانيا نجد:

الشكل رقم 05:الرسم البياني للمثال التطبيقي رقم III –01



تمثل المنطقة (A ,B,D,F,G) منطقة الحلول الممكنة وسنحاول فيما يلي تحديد النقطة التي تمثل الحل الامثل من خلال اتباع الخطوات السابق ذكرها، حيث تظهر نتائج التعويض في دالة الهدف بعد ايجاد قيمة النقطتين F و Dبالطريقة المعهودة،ينتج لدينا الجدول التالي :

النقطة	إحداثيات النقطة		قمية دالة الهدف (Z)
	x_1	x_2	
A	0	0	$\Rightarrow Z = 2\,(0) + 4\,(0) \;\Rightarrow\; Z = 0$
B	0	3	$\Rightarrow Z = 2\,(0) + 4\,(3) \;\Rightarrow\; Z = 12$
G	8	0	$\Rightarrow Z = 2\,(8) + 4\,(0) \;\Rightarrow\; Z = 16$
D	4	3	$\Rightarrow Z = 2\,(4) + 4\,(3) \;\Rightarrow\; Z = 20$
F	8	1	$\Rightarrow Z = 2\,(8) + 4\,(1) \;\Rightarrow\; Z = 20$

من خلال معطيات الجدول نلاحظ وجود نقطتين يعطيان نفس قيمة دالة الهدف والمقدرة ب20 و.ن وهما النقطتان Dو F وهذا يعني أن هناك حلين أمثلين لمشكلة واحدة ، وهذا في الواقع يعطي مرونة لمتخذي القرار في اختيار البديل الأكثر ملائمة ، فإما أن تختار المؤسسة إنتاج 4 وحدات من المنتوج الأول و 3 من المنتوج الثاني ، أو تنتج 8 وحدات من الأول ووحدة واحدة من الثاني .

III – 2– حالة الحلول غير المتناهية (دالة هدف لانهائية)

في هذه الحالة فإن دالة الهدف تزداد بطريقة غير نهائية أي منطقة الحلول الممكنة تكون مفتوحة

مثال تطبيقي III – 02

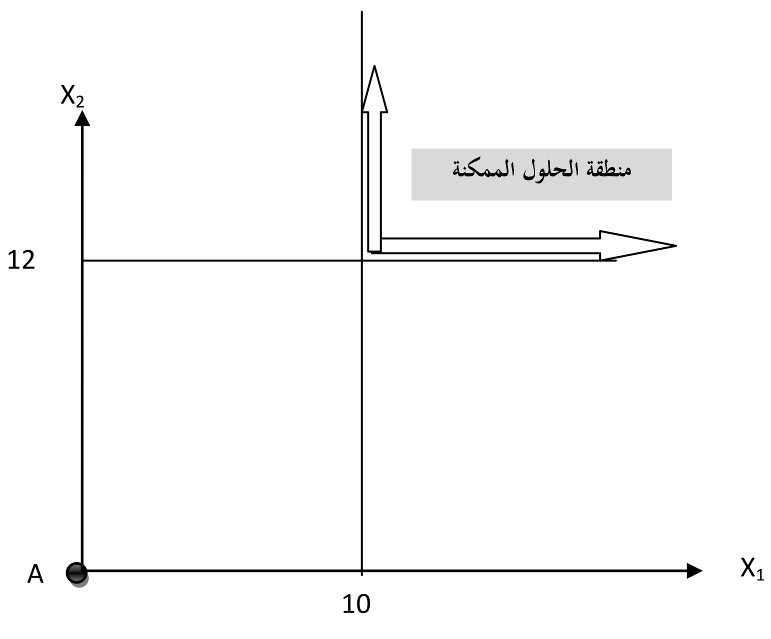
$$Max\ (Z) = 2x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 10 \ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x_2 \geq 12 \ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل :

تظهر المسألة بيانيا بعد الإسقاط كما يلي :

الشكل رقم 06:الرسم البياني للمثال التطبيقي رقم III –02



من خلال الشكل نميز أن منطقة الحلول الممكنة مفتوحة ،أي لاتوجد نقطة معينة تحدد الحل الأمثل.

III – 4 حالة عدم وجود حلول على الإطلاق:

وتحقق هذه الحالة عندما تتعارض القيود ،مما يؤدي إلى استحالة تحديد منطقة الحلول الممكنة ومن ثم الحل الأمثل.

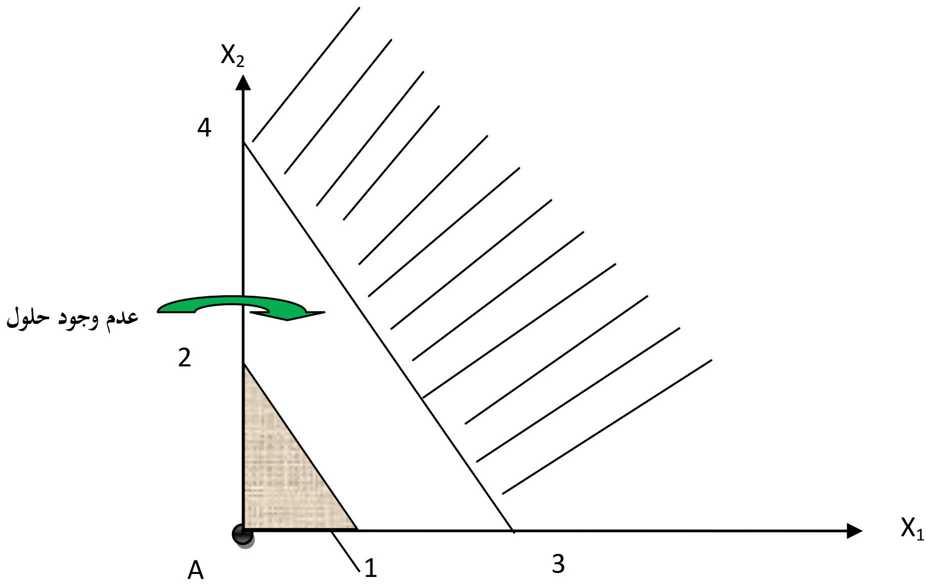
مثال تطبيقي III – 04

$$\text{Max } (Z) = 2x + 3y$$

$$\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ 3x + 4y \geq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

الحل :

الشكل رقم 07 الرسم البياني للمثال تطبيقي III – 04



عندما لا تكون منطقة الحلول الممكنة موجودة ،فإنه يجب إعادة النظر في النموذج للتأكد من الصياغة الصحيحة وأين يكمن الخلل مما يسمح بتخصيص موارد أخرى ووضع تركيبة جديدة للمسألة.

طريقة السمبلاكس

تمهيد :

تعتبر طريقة السمبلاكس"Simplex Method أو كما يطلق عليها في بعض المراجع بـ (الطريقة المبسطة)، تعتبر من أهم محاور التحليل بالطرق الكمية المساعدة على اتخاذ القرارات التسييرية في مختلف المجالات كالإنتاج ، التوريد ، النقل ، التخزين ... وغيرها.

I- مفهومها ونشأتها:

إن طريقة الرسم البياني في حل مشاكل البرمجة الخطية،على الرغم من بساطتها،إلا أنه لا يمكن استخدامها في حل مشاكل البرمجة الخطية المعقدة التي تزيد فيها متغيرات القرار عن اثنين ،حيث لا يمكن اسقاط معادلات القيود بيانيا ، ولذلك ظهرت طريقة السمبلاكس التي طورت عام 1947 من طرف العالم الأمريكي: "*George Dantzig*" الذي تمكن من التوصل إلى حل بعض مشكلات التي كان يعاني منها سلاح الطيران الأمريكي في مجالات التخطيط وتحديد برامج الصيانة والتدريب بالاعتماد على ما يسمى: "بطريقة السمبلاكس" (*la méthode du simplexe*) والتي نشرت لاحقا في سنة 1951، (*Yvon, 2009, p. 25*)

فهي طريقة عامة تستخدم لحل المشكلات التي تتسم بعدد كبير من متغيرات البرنامج الخطي ، فهي أكثر تطورا من الطريقة السابقة اي طريقة الحل البياني حيث تعتمد على خوارزمية السمبلاكس .وتبدأ هذه الطريقة عادة بإعداد المشكلة في شكل جبري Algebric Formulation ، ثم إعداد جدول السمبلاكس، ثم اختيار الحل المبدئي Initial Solution ، ثم البحث عن الحل أو مجموعة من الحلول أفضل من الحل المبدئي وذلك حتى نصل إلى الحل الذي يحقق دالة الهدف سواء تعظيم أو تدنية. *(السيد، 1999، صفحة 59)*

II – خطوات طريقة السمبلاكس :

يمكن تلخيص خطوات طريقة السمبلاكس في الآتي :

- تشكيل النموذج الرياضي للمسألة.
- تحويل النموذج للشكل المعياري.

- وضع جدول الحل القاعدي.(الجدول الأولي للسمبلاكس)
- تحسين الحل حتى الوصول للحل الأمثل الذي يحدد وفقا لشروط معينة سيتم معرفتها لاحقا.

ويكون جدول السمبلاكس على النحو التالي :

معاملات المتغيرات في دالة الهدف (c_i)	Q_j	V	C_i
متغيرات النموذج كاملة (الأساسية – xi – والمساعدة – Ai - Si –)			
معاملات المتغيرات في القيد الأول معاملات المتغيرات في القيد الثاني معاملات المتغيرات في القيد الثالث .... — مصفوفة المعاملات بحسب القيود	الكميات المتاحة	المتغيرات الأساسية أو المساعدة	معاملات المتغيرات في دالة الهدف
سطر التقييم	دالة الهدف = Z		

إن رسم جدول الحل القاعدي تسبقه مرحلة التحويل إلى الشكل المعياري والتي تتطلب تحديد أنواع المتغيرات الممكن توظيفها، والتي تتمثل في :

متغيرات الفوارق أو الفروق (الفجوة):

وهي متغيرات وهمية تضاف إلى القيود في حالة أقل أو يساوي (≤) تمثل متغيرات الطاقات العاطلة (غير المستغلة)، بحيث يرمز لها: Ai وتأخذ (i) قيمة تسلسلية بحسب عدد القيود من نفس الشكل، وتضاف هذه المتغيرات إلى الطرف الأصغر لتحول المتراجحات إلى معادلات، وتظهر بمعامل موجبة أي تضاف إلى القيد، ومعاملاتها في دالة الهدف تكون معدومة، لأن دورها مساعد فقط ولا تؤثر على قيمة الهدف:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots a_nx_n \leq B \quad \Rightarrow \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots a_nx_n + A_1 = B$$

متغيرات الزيادة:

أما متغيرات الزيادة فهي متغيرات وهمية تضاف إلى القيود في حالة أكبر أو يساوي (≥)، بحيث يرمز لها: A_i وتأخذ (i) قيمة تسلسلية بحسب عدد القيود من نفس الشكل، وتضاف بإشارة سالبة للطرف الأكبر (أي تطرح من القيد) لتحقيق المساواة وتحويل المتراجحة إلى معادلة، وتظهر هذه المتغيرات في دالة الهدف بمعامل صفر (0) لأن دورها مساعد فقط ولا تؤثر على قيمة الهدف:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots a_nx_n \geq B \quad \Rightarrow \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots a_nx_n - A_1 = B$$

غير أنه في هذه الحالة لابد من الإشارة إلى شرط عدم السلبية، فإذا افترضنا أن قيمة المتغيرات:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ معدومة (حل مبدئي مثلا) فإن:

$A_1 = -B$ وهذا غير منطقي، لذلك وجب إضافة متغير آخر لكي نحافظ على شرط عدم السلبية يعرف بـــ ***المتغير الإصطناعي*** الذي سنتطرق إليه في النقطة الموالية.

- **متغيرات اصطناعية**: نحدد هنا نوعين من المتغيرات الإصطناعية :

➢ المتغير الاصطناعي الذي يتم إضافته للمحافظة على شرط عدم السلبية في حالة القيد أكبر من أو تساوي:

حيث هنا يُسبق المتغير الإصطناعي بمعامل كبير جدا (بمثابة غرامة) وهذا من أجل ضمان خروجه من الحل الأمثل أي في نهاية الحل، حيث يكون هذا المتغير معدوم ويصبح القيد في هذه الحالة:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots a_nx_n \geq B \quad \Rightarrow \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots a_nx_n - A_1 + S_1 = B$$

مع العلم أن المتغير الاصطناعي متغير إضافي يساعدنا فقط على إيجاد الحل وليس له أي معنى اقتصادي ولا يمكن أن يظهر في الحل تماما.

➢ المتغير الاصطناعي الذي يتم إضافته للمحافظة على شرط عدم السلبية في حالة القيد يساوي:

وهي متغيرات مصطنعة وتضاف إلى القيود من نوع **يساوي** (=)، من أجل إيجاد قيمة تلبي الشروط أو القيود المفروضة في حالة ما إذا كانت المتغيرات الأساسية معدومة، بحيث يرمز لها: $\mathbf{S_i}$ وتأخذ (i) قيمة تسلسلية بحسب عدد القيود من نفس الشكل، وتظهر بمعامل موجبة أي تضاف إلى القيد:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots a_nx_n = B \quad \Rightarrow \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots a_nx_n + S_1 = B$$

أما في دالة الهدف فإن المتغيرات الاصطناعية تُحَمَّل بمعاملات ضخمة تعمل عكس دالة الهدف (إشارة) فتكون على النحو التالي:

فإذا كانت المسألة:

* في حالة تعظيم (***Max***) فإنها تكون: $\mathbf{-M}$ (سالبة) أي إشارة $\mathbf{M}$ عكس اتجاه الهدف.
* في حالة تخفيض (***Min***) فإنها تكون: $\mathbf{+M}$ (موجبة).

لذلك فهي لا تظهر في الحل الأمثل.

بعد إضافة متغيرات الانحراف بحسب شكل القيود في البرنامج نحاول تعديل شكل دالة الهدف بإضافة المتغيرات ومعاملتها وتعديل شرط عدم السلبية حيث لابد أن تظهر هذه المتغيرات في الشرط.

ولتبسيط هذه الخطوات ،سنحاول على توضيحها وقفا لنوع دالة الهدف وسنبدأ في حالة التعظيم ثم في حالة التخفيض .

III – طريقة السمبلاكس في حالة التعظيم:

سنعتمد هنا نفس معطيات ***المثال تطبيقي رقم I-01***، رغبة منا في مقارنة النتائج المتوصل إليها بالطرق الثلاث.

مثال تطبيقي رقم III-1

1-دالة الهدف :

$$\textbf{Max } Z= 8X_1 + 6X_2$$

2- القيود:

قيد قسم التقطيع : $4X_1 + 2X_2 \leq 60$

قيد قسم التجميع: $2X_1 + 4X_2 \leq 48$

3-**شرط عدم السلبية:**

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل :

1. التحويل للشكل المعياري:

يتم ذلك عن طريق تحويل جميع المتراجحة إلى معادلات بإضافة متغيرات جديدة غير سالبة (كما سبق لنا وأن رأينا) إلى الطرف الأيسر حسب إتجاه الإشارة وبما أن اتجاه الإشارة أقل من أو يساوي فنضيف متغيرات تسمى : "**المتغيرات الفوارق** (الفجوة – ***Les variables d'écart***)، والتي تعبر اقتصاديا عن الطاقة العاطلة أو غير المستغلة حيث أن عائدها يساوي الصفر، أي قيمتها في دالة الهدف معدومة، ويرمز لها بالرمز: "A_i"، وعليه يصبح النموذج المعياري لهذه المسألة بالشكل التالي:

$$Max\ (Z) = 8X_1 + 6X_2 + 0.A_1 + 0.A_2$$

$$\begin{cases} 4\,x_1 + 2\,x_2 + A_1 = 60 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 + A_2 = 48 \\ x_1, x_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. رسم جدول الحل القاعدي :

C	V	Q	8	6	0	0
			X_1	X_2	A_1	A_2
0	A_1	60	4	2	1	0
0	A_2	48	2	4	0	1
		Z = 0	8-	6-	0	0

بالنسبة لقيم سطر التقييم تم حسابها كالآتي :

$$[0 \times 2 + 0 \times 4] -8 = -8$$

$$[0 \times 2 + 0 \times 4] -6 = -6$$

$$[0 \times 1 + 0 \times 0] -0 = 0$$

$$[0 \times 0 + 0 \times 1] -0 = 0$$

* **قيمة (Z)**: ويتم الحساب فيه كالتالي:

$$0 = (0 \times 60) + (0 \times 48)$$

القيمة Z = 0 ، تناظر قيمة الربح في الطريقة البيانية المحددة عند نقطة الأصل.

3. تحسين الحل :

من خلال معطيات الجدول نلاحظ أن قيم سطر التقييم سالبة وعليه لا يعتبر الحل أمثلا وإنما يحتاج لعملية التحسين، وقبل الشروع في عملية تحسين الحل نعرض خطوات التحسين :

يتم تحسين الحل باتباع الخطوات التالية:

- **تحديد المتغيرة الداخلة :** والتي تقابل أكبر قيمة بالقيمة المطلقة من بين القيم السالبة المحددة في سطر التقييم.
- **تحديد المتغيرة الخارجة :** وذلك بقسمة قيم عمود الكميات على قيم عمود المتغيرة الداخلة، واختيار أدنى قيمة بين حواصل القسمة.
- **تحديد نقطة المحور :** وهي نقطة التقاء عمود المتغيرة الداخلة وسطر المتغيرة الخارجة .
- **نقسم قيم سطر المتغيرة الخارجة على نقطة المحور .**
- **حساب باقي القيم باعتماد القانون التالي :**

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \left[\frac{\text{القيمة المقابلة في سطر نقطة المحور} \times \text{القيمة المقابلة في عمود نقطة المحور}}{\text{نقطة المحور}}\right]$$

ملاحظات مهمة:

- **يكون الحل أمثلا في حالة التعظيم إذا كانت جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة والعكس في حالة التقليل.**
- **في تحديد المتغيرة الداخلة يتم اختيار اكبر قيمة بالقيمة المطلقة من بين القيم السالبة في حالة التعظيم وأكبر قيمة موجبة في حالة التقليل ،وفي حالة تساوي القيمتين يتم الإختيار عشوائيا وذلك مهما كان نوع دالة الهدف.**
- **في حالة تساوي قيم تحديد المتغيرة الخارجة يتم الإختيار عشوائيا مهما كان شكل دالة الهدف.**
- **طريقة حساب باقي القيم هي نفسها في حالة التعظيم أو التقليل.**

في مثالنا هذا:

- المتغيرة الداخلة هي : -8 والتي تقابل المتغيرة $x1$.

- المتغيرة الخارجة هي A1 والتي تقابل قيمة حاصل القسمة المقدر بـــ 60/4 = 15
- نقطة المحور هي 4 والتي تمثل نقطة التقاء عمود المتغيرة الداخلة وسطر المتغيرة الخارجة ،كما هو موضح في الجدول الموالي :

C	V	Q	8	6	0	0	
			X_1	X_2	A_1	A_2	
0	A_1	60	**4**	2	1	0	$\frac{60}{4}=15$
0	A_2	48	2	4	0	1	$\frac{48}{2}=24$
Z = 0			**−8**	−6	0	0	

وتحدد باقي قيم الجدول بتطبيق الخطوات التالية:

- نقسم قيم سطر المتغيرة الخارجة على نقطة المحور .
- نحسب باقي القيم باعتماد القانون التالي :

القيمة الجديدة = القيمة القديمة − [(القيمة المقابلة في سطر نقطة المحور × القيمة المقابلة في عمود نقطة المحور) / نقطة المحور]

فيما يلي كيفية حساب بعض القيم:

18 هي القيمة الجديدة لـــ 48 وتم حسابها كما يلي :

$$48-\left[\frac{60\times 2}{4}\right]=18 .$$

3 هي القيمة الجديدة لـــ 4 وتم حسابها كما يلي:

$$4-\left[\frac{2\times 2}{4}\right]=3 .$$

−½ هي القيمة الجديدة لـــ 0 وتم حسابها كما يلي :

وهكذا حتى يتم حساب جميع القيم الموجودة في الجدول والتي تخضع لهذا القانون.

قيم الجدول الجديد :

C	V	Q	8	6	0	0
			X_1	X_2	A_1	A_2
8	X_1	15	1	1/2	1/4	0
0	A_2	18	0	3	-1/2	1
Z = 120			0	-2	2	0

مراقبة أمثلية الحل : نلاحظ ان قيم سطر التقييم بها قيمة سالبة، والتي تمثل اقتصاديا القيمة التي يمكن أن يزيد بها الربح عند انتاج وحدة واحدة من X_2 وعليه الحل ليس أمثلا، ويحتاج لعملية تحسين، التي تتم بنفس الطريقة السابقة، وعليه وذلك على النحو التالي :

C	V	Q	8	6	0	0	
			X_1	X_2	A_1	A_2	
8	X_1	15	1	1/2	1/4	0	$\frac{15}{1/2}=30$
0	A_2	18	0	3	-1/2	1	$\frac{18}{3}=6$
Z = 120			0	**-2**	2	0	

بعد تحسين هذا الجدول نتحصل على الجدول الموالي التالي :

C	V	Q	8	6	0	0
			X_1	X_2	A_1	A_2

8	X_1	12	1	0	1/3	-1/6
0	X_2	6	0	1	-1/6	1/3
Z = 132			0	0	5/3	2/3

من خلال نتائج الجدول نلاحظ أن جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة ، وعليه فهو الحل الأمثل ، وهي نفس القيم المتحصل عليها بالطريقتين الجبرية والبيانية.

- شرح الجدول :

لكي تحقق المؤسسة أقصى ربح ممكن عليهاأن تنتج 12 وحدة من x1 و6 وحدات من x2 مع استغلال تام للموارد المتاحة لتحقق ربحا قدره: 132 وحدة نقدية.

تسمى القيم: $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{3}$ الموجودة ضمن سطر التقييم بأسعار الظل أو تكلفة الفرصة البديلة، وهي القيمة التي تتغير بها قيمة دالة الهدف من جراء تغيير في المورد المقابل بوحدة واحدة.

مثلا: القيمة $\frac{5}{3}$ تعني أن زيادة وحدة واحدة من المورد A1، سوف يؤدي إلى:

- زيادة أرباح المؤسسة بـــ: $\frac{5}{3}$ وحدة إضافية.
- وزيادة الإنتاج من المنتوج الأول ب1/3.
- وانخفاض الوحدات المنتجة من المنتوج الثاني بـــ 1/6

وتصبح النتيجة كتالي:

$$X1 = 12 + \frac{1}{3}$$

$$X2 = 6 - \frac{1}{6}$$

وتصبح قيمة دالة الهدف:

$$Max\,(Z) = (12 + \frac{1}{3}) \times 8 + (6 - \frac{1}{6}) \times 6$$

IV- طريقة السمبلاكس في حالة التقليل:

مثال تطبيقي رقم IV–01

ليكن النموذج الرياضي التالي أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة باستخدام "**طريقة السبملاكس**":

$$Min(C) = 20\,x_1 + 20\,x_2$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \geq 50 \\ 5\,x_1 + 10x_2 \geq 40 \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

الحل:

1. تحويل النموذج الخطي إلى نموذج معياري:

يتم ذلك من خلال تحويل جميع المتراجحات إلى معادلات بإضافة متغيرات الفوارق والمتغيرات الإصطناعية ، كما سبق ذكره ليظهر لدينا النموذج التالي :

$$Min(C) = 20x_1 + 20x_2 + 0A_1 + MS_1 + 0A_2 + MS_2$$

$$10x_1 + 5x_2 - A_1 + S_1 = 50$$

$$5\,x_1 + 10x_2 - A_2 + S_2 = 40$$

$$x_1,\ x_2,\ A_1,\ S_1,\ A_2,\ S_2 \geq 0$$

2. إيجاد الحل القاعدي (الأولي):

يتم تكوين جدول الحل القاعدي بنفس الخطوات والقواعد التي تم شرحها في حالة التعظيم:

C	v	Q	20 x_1	20 x_2	0 A_1	M S_1	0 A_2	M S_2
M	S_1	50	10	5	-1	1	0	0
M	S_2	40	5	10	0	0	-1	1
C = 90M			15M-	15M-	-M	0	-M	0

	20	20				

كما نلاحظ من الجدول أعلاه، أنه قيمة دالة الهدف كانت: 90M وهي تكلفة باهضة للمؤسسة على اعتبار أن رقم M كبير جدا.

3. اختبار أمثلية الحل:

خلافا لمسألة التعظيم وللوصول إلى الحل الأمثل في مسائل التخفيض يجب أن تكون جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة، وبما أن قيم سطر التقييم في الجدول السابق ليست كلها سالبة أو معدومة، فهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، لذلك نحتاج إلى عملية تحسين الحل:

4. تحسين الحل:

يتم في عملية التحسين العمل على تخفيض التكاليف عن طريق إخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل، وذلك عن طريق تطبيق نفس القواعد التي تم شرحها في حالة التعظيم مع وجود فارق وحيد والمتمثل في تحديد المتغير الداخلة والتي تقابل أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم، هنا (حالة خاصة حيث تساوت أكبر قيمتين موجبتين هي: 15M−20 نختار بطريقة عشوائية وليكن x1 هي متغيرة داخلة.

C	**V**	**Q**	**20** $\mathbf{x_1}$	**20** $\mathbf{x_2}$	**0** $\mathbf{A_1}$	**M** $\mathbf{S_1}$	**0** $\mathbf{A_2}$	**M** $\mathbf{S_2}$	
M	$\mathbf{S_1}$	50	10	5	−1	1	0	0	$\frac{50}{10}=5$
M	$\mathbf{S_2}$	40	5	10	0	0	−1	1	$\frac{40}{5}=8$
C = 90M			15M−20	15M−20	-M	0	-M	0	

<u>إذن</u>:

- X_1 المتغيرة الداخلة لأن تقابل أكبر قيمة في سطر التقييم والتي هي: 15M−20
- S_1 المتغيرة الخارجة لأن تقابل أقل قيمة عندما نقسم عمود Q على عمود المتغيرة الداخلة والتي هي: 6
- القيمة "10" هي نقطة المحور لأنها تمثل نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة وسطر المتغيرة الخارجة.
- والكل يحسب كما سبق وأن رأينا:

C	v	Q	20 x_1	20 x_2	0 A_1	M S_1	0 A_2	M S_2
20	x_1	5	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0
M	S_2	15	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	−1	1
C = 100 + 15M			0	$\frac{15M}{2} - 10$	$\frac{M}{2} - 2$	$2 - \frac{3M}{2}$	−M	0

- نلاحظ من خلال هذا الجدول أن الحل قد تحسن إذ انخفضت تكاليف دالة الهدف من القيمة "90M" إلى "100+15M"، ولكنه ليس الحل الأمثل نظرا لوجود قيم موجبة في سطر التقييم، وبالتالي يجب تحسين الحل بطريقة المعتمد وفق القواعد المعمول بها سابقا:

C	v	Q	20 x_1	20 x_2	0 A_1	M S_1	0 A_2	M S_2	
20	x_1	5	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	$5 / \frac{1}{2} = 10$
M	S_2	15	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	−1	1	$15 / \frac{15}{2} = 2$
C = 100 + 15M			0	$\frac{15M}{2} - 10$	$\frac{M}{2} - 2$	$2 - \frac{3M}{2}$	−M	0	

بعد التحسين نحصل على النتائج التالية:

C	v	Q	20 x_1	20 x_2	0 A_1	M S_1	0 A_2	M S_2
20	x_1	10	1	0	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$
20	x_2	2	0	1	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
C =240			0		$-\frac{20}{15}$	−M	$-\frac{20}{15}$	$\frac{20}{15}$ −M

واضح أن الحل المتوصل إليه هو الحل الأمثل بما أن سطر التقييم كله سالب أو معدوم، إذ لا يمكننا يجاد أيه أية قيمة أخرى للمتغيرات تحقق أدنى قيمة لدالة الهدف وتحترم جميع القيود، ومن هنا يتلخص الحل في

أن المؤسسة تقوم بتخفيض تكاليفها إلى الحد الأقصى **C = 240** بإنتاج 10 وحدات من x_1 وتنتج وحدتين من x_2.

وعند الوصول للحل النهائي يتم استثناء المتغيرات الإصطناعية منه.

VI – حالات خاصة في طريقة السمبلاكس:

1- حالة الحلول المتعددة :

نقول أن هناك حلول متعددة عندما يوجد لنا متغير لم يدخل للحل وقيمته في سطر التقييم معدومة .

عندما تكون قيمة 0 في سطر التقييم رغم عدم وجوده في الجدول الأخير، فهذا يعني أن هناك حل بديل يتم الحصول عليه باعتبار هذه المتغيرة التي لم تدخل للحل متغيرة داخلة ، ثم إتمام العمليات الأخرى كما هو معتاد.

مع العلم أنه بعدد الأصفار الموجودة في سطر التقييم للمتغيرات التي لم تدخل الحل نجد عدد الحلول البديلة، وذلك بالرجوع للحل الأمثل،

مثال :

$$\text{Max } (Z) = 6x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 12 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2- حالة عدم وجود حل ممكن :

ويكون هذا في حالة وجود متغير اصطناعي في جدول الحل النهائي ،فالمتغيرات الإصطناعية عموما عندما تخرج من الحل لا يمكن إدراجها مرة أخرى.وهذه الحالة تقابلها الحالة المحددة بتعارض القيود في الطريقة البيانية.

مثال :

$$\text{Max } (Z) = 2x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3- حالة وجود عدد لا نهائي من الحلول:

كلما كانت القيم المساعدة في اختيار المتغير الخارج سالبة أو∞ فإن المسألة لها حل غير محدود أي ما لا نهاية من الحلول.

مثال:

$$\text{Max } (Z) = 6x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 12 \end{cases} \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

4- حالة عدم الإنتظام:

ونقع في هذه الحالة إذا كانت هناك قيمتين متساويتين بالنسبة لاختيار المتغيرة الداخلة ، وهنا يتم الإختيار عشوائيا، كما يمكن أن نقع في هذه الحالة إذا تساوت قيمتين لاختيار المتغيرة الخارجة ، وتظهر هاته الحالة أساسا في حالة التناقض في القيود أو في حالة القيد الزائد عن الحاجة المذكورة في الطريقة البيانية.

مثال :

$$\text{Max } (Z) = 8000x_1 + 700x_2 + 9000x_3$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 12x_3 \leq 480 \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 600 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 240 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$