الفصل الثـــانـي : البرمجة بالأعداد الصحيحة

أهـــداف الفصـــل:

ينتظر من الطالب بعد قراءة هذا الفصل أن يصبح قادرا على:

- فهم بنية النماذج المختلفة البرمجة العددية.
- تطبيق مختلف طرق حل نموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة.

محتوى الفصل:

I. مفهوم و أنواع نماذج البرمجة بالأعداد الصحيحة.

1. مفهوم البرمجة بالأعداد الصحيحة.
2. أنواع نماذج البرمجة بالأعداد الصحيحة.

II. طرق حل نماذج البرمجة بالأعداد الصحيحة.

1. الطريقة البيانية.
2. طريقة قطع المستوي (Gomory).
3. طريقة التفريع و التحديد(Branch and Bound).

III. تمارين تطبيقية.

1. تمارين محلولة.
2. تمارين مقترحة.

تمهيد:

تتطلب أكثر التطبيقات العملية لمسائل البرمجة الخطية تجاوز فرضية قابلية التجزئة ، اذ يكون من الضروري أن تأخذ متغيرات القرار في الحل الأمثل قيما صحيحة لأنه من غير الممكن انتاج أجزاء من المنتج كإنتاج سيارة ونصف مثلا . وفي هذه الحالة يتم اللجوء الى استخدام أسلوب البرمجة بالأعداد الصحيحة التي تعتبر حالة خاصة من البرمجة الخطية و أكثرها صعوبة في الحل الأمثل لأنه يمكننا حلها بحل متتابعة من مسائل البرمجة الخطية .

I. مفهوم و أنواع نماذج البرمجة بالأعداد الصحيحة:

1. مفهوم البرمجة بالأعداد الصحيحة:

تمثل البرمجة بالأعداد الصحيحة أحد النماذج الرياضية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية ، حيث ينصب اهتمامها على ايجاد قيم المتغيرات الأساسية بأعداد صحيحة خالية من الكسور . بمعنى آخر، أنها برمجة خطية مضاف اليها شرط العدد الصحيح لقيم المتغيرات عند الحل الأمثل بحيث يضاف الى شرط عدم سلبية المتغيرات شرط العدد الصحيح.

ان الهدف الأساسي لبناء النموذج الرياضي للبرمجة بالأعداد الصحيحة نابع من الاستجابة لمتطلبات الواقع العملي حيث أنه من المفروض في الكثير من الحالات و المشاكل التطبيقية لا يمكن التعامل معها بقيم كسرية ، فهذه البرمجة تسمح بـ :

- ✓ تخصيص الموارد أين لا يسمح للنشاط بتجزئته مثل انتاج تجهيزات كبرى (سيارات، ناقلا بحرية....الخ).
- ✓ معالجة الوضعيات التي يكون فيها القرار من طبيعة ثنائية مثل الاستثمار X منجز أم لا؟

في مثل هذه الحالات لا نكتفي بتقريب الحل الذي نجده في تطبيق البرمجة الخطية المعروفة لأنه لا يضمن لنا أن يكون هذا الحل حلا أمثلا اما لعدم احترامه أحد قيود البرنامج و خاصة اذا كان من نوع معادلة ،و اما استحالة تقريب القيم الى أعداد صحيحة اذا كان أحد أو بعض المتغيرات الأساسية للنموذج متغيرات ثنائية من نوع (1،0).

2. أنواع نماذج البرمجة بالأعداد الصحيحة:

بشكل عام ، نجد أن البرمجة بالأعداد الصحيحة تقسم الى ثلاثة أنواع وهي: [1]

- **نموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة التام** : و يسمى أيضا بالمطلق ، وذلك لأن كل قيم المتغيرات من النموذج $X_1, X_2, X_3,............, X_n$ ينبغي أن تكون أعداد كاملة كما هو موضح في النموذج الرياضي التالي:

[1] محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل، مرجع سابق، ص ص 91،92

$$MinZ / MaxZ = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i = 1,2,.........,m. \\ x_j \geq 0 & j = 1,2,.........,n. \\ X_j \ \text{entier} & j=1................p\ (p=n) \end{cases}$$

- **نموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة المختلط:** و يسمى أيضا بالجزئي، وذلك لأن قيمة المتغيرات من النموذج $X_1, X_2,....., X_n$ بعضها أعداد صحيحة و البعض الآخر غير ذلك . و يمكن التعبير عنه كالتالي: أي:

$$MinZ / MaxZ = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i = 1,2,.........,m. \\ x_j \geq 0 & j = 1,2,.........,n. \\ X_j \ \text{entier} & j=1................p\ (p<n) \end{cases}$$

- **نموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة الثنائي:** يبنى النموذج الرياضي لهذا النوع على أساس أن قيم المتغيرات لا يمكن أن تكون أكثر من قيمتين فقط ، وهي اما صفر أو واحد . ومن بين أهم المجالات التي تستعمل هذا النموذج هي اختيار المشاريع بحيث يأخذ المتغير القيمة 1 في حالة الاختيار و القيمة 0 في حالة عدم الاختيار .

$$MinZ / MaxZ = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i = 1,2,.........,m. \\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 ou 0 & j = 1,2,.........,n. \end{cases}$$

II.طرق حل نماذج البرمجة بالأعداد الصحيحة:

1. الطريقة البيانية

تعتبر الطريقة البيانية لهذا النوع من النماذج أفضل و اسهل الحلول ، لكن بمجرد أن يتجاوز عدد متغيرات النموذج اثنين تصبح غير قابلة للتطبيق ، و نضطر اللجوء الى طرق أخرى للحل. و على العموم ، فان هذه الطريقة تعتمد على تحديد الحل الأمثل للبرنامج وفق الطريقة المتبعة لحل نماذج البرمجة الخطية (أي دون الأخذ بعين الاعتبار شرط العدد الصحيح) ، فاذا كانت قيم متغيرات النموذج صحيحة فهو حل أمثل أما اذا كان الحل المتوصل اليه يحتوي على أعداد غير صحيحة فانه يجب القيام بما يلي:[1]

- تحديد الحلول الممكنة ذات القيم الصحيحة و الواقعة ضمن منطقة الحل.
- رسم دالة الهدف التي عبارة عن خط مستقيم ذو ميل ثابت $(-c_1/c_2)$.
- ازاحة مستقيم الدالة باتجاه منطقة الحل ليكون الحل الأمثل عند آخر نقطة ذات احداثيات صحيحة في حالة التعظيم و أول نقطة ذات احداثيات صحيحة في حالة التخفيض.

و لتوضيح هذه الخطوات نستعين بالمثال التالي:

مثال:

ترغب مؤسسة مختصة في صناعة السفن ،تحديد حجم ونوع السفن التي تحقق لها أكبر ربح قبل البدء في صناعتها .

و بعد دراسة ظروف العملية الانتاجية تم صياغة النموذج التالي:

$$\text{Max}Z = 2\,x_1 + 4\,x_2$$

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3\,x_2 \leq 10 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \\ x_1,\ x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

حيث : x_1 : عدد السفن من النوع A

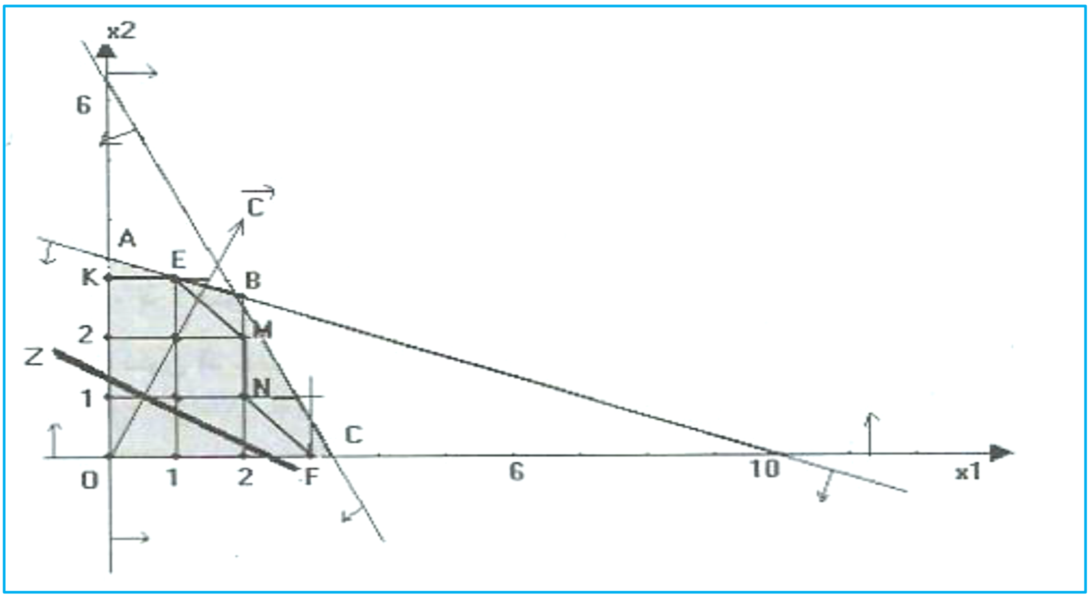
x_1 : عدد السفن من النوع B

الحل:

✓ ايجاد الحل الأمثل دون الأخذ بعين الاعتبار شرط الاعداد الصحيحة:

بحل هذه المسألة بيانيا كما سبقت الاشارة اليه ، نتوصل الى الرسم البياني و جدول منطقة الحلول الممكنة التاليين :

[1] محمد دباس الحميد، *البرمجة الرياضية*، مديرية الكتب و المطبوعات الجامعية، سوريا، 2010، ص 156



قيمة دالة الهدف	احداثيات النقاط	النقاط
$MaxZ_0=0$	o :($x_1=0$, $x_2=0$)	0
$MaxZ_A=40/3$	A:($x_1=0$, $x_2=10/3$)	**A**
$MaxZ_b=218/5$	B: **$x_1=9/5$, $x_2=41/15$**)	Á
$MaxZ_C=19/3$	C:($x_1=19/6$, $x_2=0$)	C

وبمقارنة الحلول المختلفة عند النقاط O,A,B,C يتبين أن الحل الأمثل يكون عند النقطة B أي أن البرنامج الانتاجي الأمثل للمسألة يتمثل في صنع 9/5 سفينة من نوع A و 41/15سفينة من نوع B مع تحقيق أقصى ربح قدره 218/5 وحدة نقدية .

لكن نلاحظ أن هذا الحل لا يحقق القيد الرابع (كما أنه غير مقبول من الناحية العملية) ، فهو حل غير مقبول لمسألة برمجة خطية بقيم صحيحة ، ما يتطلب الأمر الذهاب الى الخطوة الموالية.

✓ تحديد الحلول الممكنة ذات القيم الصحيحة و الواقعة ضمن منطقة الحل:

نلاحظ أنه في منطقة الامكانيات توجد نقاط تحقق القيد الرابع و هي 12 نقطة مشار اليها في الرسم البياني أعلاه . لذلك من أجل ايجاد النقطة التي تمثل الحل الأمثل للمسألة الأصلية نأخذ بدلا من المنطقة **OABC** المنطقة **OKEMNF** المحتوية على كل النقاط الممكنة ذات الاحداثيات الصحيحة(12 نقطة).

✓ رسم دالة الهدف و ازاحتها نحو منطقة الحلول :

بعد رسم المستقيم Z نقوم بتحريكه بصفة متوازية اتجاه رؤوس منطقة الحلول الممكنة ذات الاحداثيات الصحيحة، وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة هي آخر نقطة يصل اليها المستقيم . وحسب المثال نجد أن آخر نقطة

يصلها هي النقطة **E ذات الاحداثيات $x_1=1$ و $X_2=3$** ،ونسمي عندئذ النقطة بالحل الأمثل الصحيح للبرنامج أي يجب على المؤسسة صناعة سفينة واحدة من النوع A و ثلاث سفن من النوع B من أجل تحقيق ربح أعظمي قدره 14وحدة نقدية.

ملاحظة:

قيمة دالة الهدف لنموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة دائما اقل أو يساوي من قيمة دالة الهدف لنموذج البرمجة الخطية المقابل له.

2. طريقة قطع المستوي (Gomory):

قدمت هذه الطريقة من طرف Ralph Gomory عام 1958 من أجل الوصول الى حل أمثل بأعداد كاملة حيث نطلق من نفس الطرح للنموذج الرياضي مع شرط أن تكون المتغيرات كاملة ، وفي حالة الوصول الى الحل دون تحقق هذا الشرط نقوم بإضافة قيد جديد للمسألة الأولية يسمى قيد Gomory بحيث يتم تحديده باستعمال الأجزاء غير الكاملة ، وبعد اضافته الى النموذج يتم الحل وفقا للكيفية المعروفة مع تكرار العملية حتى الوصول الى حل أمثل بأعداد صحيحة. مع الاشارة الى أن ان القيد المضاف هو عبارة عن قيد قطع يقتطع جزء معين من حيز الحل الذي يحتوي على قيم ليست بأعداد صحيحة .

باختصار يمكن أن تتم هذه الطريقة في أربعة مراحل:[1]

- حل المسألة باستخدام طريقة السمبلاكس للبرمجة الخطية.
- اضافة قيد Gomory.
- حل المسألة الجديدة بطريقة السمبلاكس.
- اعادة العملية حتى الوصول الى حل أمثل بقيم صحيحة.

قاعدة:

لتطبيق طريقة قطع المستوي يجب أن تكون معاملات المتغيرات لجميع القيود التي تتضمنها المسألة ذات قيم عددية صحيحة.

و لتبسيط خطوات هذه الطريقة سنعمل على توضيحها انطلاقا من المثال العددي الذي استخدم في شرح الطريقة البيانية ، رغبة في مقارنة النتيجة المترتبة عن هاتين الطريقتين :

[1] اليمين فالته، *بحوث العمليات*،ط1، ايتراك للنشر و التوزيع، مصر، 2006 ، ص227

مثال : كان البرنامج الخطي هو:

$$MaxZ = 2\,x_1 + 4\,x_2$$

$$(1)\quad \begin{cases} 2\,x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3\,x_2 \leq 10 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \\ x_1,\ x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

- **الخطوة الأولى: حل المسألة باستخدام طريقة السمبلاكس**

يتم في هذه الخطوة تطبيق خطوات السمبلاكس المشار اليها سابقا دون الأخذ بعين الاعتبار لشرط القيم الصحيحة وذلك من اجل الحصول على الحل الأمثل. وفي مثالنا نلاحظ أن القيد الأول للمسألة لا يخضع لقاعدة طريقة القطع ، لذا يجب أولا تبسيطه بالتخلص من المقامات وذلك بضرب طرفي القيد في العدد (3) لنحصل على قيد جديد:

$$6x_1 + 3x_2 \leq 19$$

و بتطبيق طريقة السمبلاكس نحصل على النموذج المعياري للمسألة و جداول السمبلاكس التاليين:

$$MaxZ = 2x_1 + 4\,x_2 + 0\,e_1 + 0\,e_2$$

$$\begin{cases} 6\,x_1 + 3x_2 + e_1 = 19 \\ x_1 + 3\,x_2 + e_2 = 10 \\ x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_2 \geq 0 \\ x_1,\ x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

			2	4	0	0
c_k	V	b_i	x_1	$\mathbf{x_2}$	e_1	e_2
0	e_1	19	6	3	1	0
0	e_2	10	1	3	0	1
Z= 0			**-2**	**-4**	**0**	**0**
0	e_1	9	5	0	1	-1
4	$\mathbf{x_2}$	10/3	1/3	1	0	1/3
Z= 40/3			**-2/3**	**0**	**0**	**4/3**
2	$\mathbf{x_1}$	**9/5**	1	0	1/5	-1/5
4	$\mathbf{x_2}$	**41/15**	0	1	-1/15	2/5
Z= 218/5			**0**	**0**	**2/15**	**6/5**

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن قيم سطر التقييم جميعها معدومة أو موجبة، لذا فان شرط الأمثلية قد تحقق للبرمجة الخطية حيث تكون النتائج المحصل عليها كما يلي:

$$\mathbf{x_1 = 9/5 \;,\; x_2 = 41/15 \;,\; Z = 218/5}$$

و لكن هذه النتائج ليست بقيم صحيحة لمتغيرات القرار ، لذا يتطلب الأمر الانتقال الى الخطوة الموالية .

- **الخطوة الثانية : اضافة قيد Gomory**

من أجل الوصول الى العبارة الرياضية للقيد المضاف للبرنامج الرياضي نتبع الخطوات التالية:[1]

✓ اختيار المتغيرة التي تتم على أساسها كتابة القيد : يتم اختيار المتغير القاعدي الذي قيمته في الحل الأمثل يحتوي على أكبر جزء كسري، حيث يمكن أن يمثل بالصيغة التالية:

$$\mathbf{X_K = E_K + D_K}$$

حيث : E_K : يمثل الجزء الصحيح ، D_K : الجزء الكسري الذي يجب أن يكون دائما موجبا

وفي مثالنا فانه يمكن كتابة المتغيرين القاعديين على النحو التالي:

$$\mathbf{X_1 = 9/5 \;\Rightarrow\; 1 + 4/5 \;\Rightarrow\; E_1 = 1 \;,\; D_1 = 4/5}$$

$$X_2 = 41/15 \;\Rightarrow\; 2 + 11/15 \;\Rightarrow\; E_2 = 2 \;,\; D_2 = 11/15$$

نلاحظ أن الجزء الكسري لـ $\mathbf{X_1}$ هو الأكبر ، لذا سيتم اختياره لكتابة القيد المضاف

✓ كتابة القيد : يكتب القيد انطلاقا من قراءة سطر المتغيرة المختارة في الخطوة السابقة بالشكل التالي:

$$b_K = x_K + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j$$

$$E_K + D_K = x_K + \sum_{j=1}^{n} E_{kj} x_j + \sum_{j=1}^{n} D_{kj} x_j$$

$$X_K = E_K + D_K - \sum_{j=1}^{n} E_{kj} x_j - \sum_{j=1}^{n} D_{kj} x_j$$

$$X_K = (E_K - \sum_{j=1}^{n} E_{kj} x_j) + (D_K - \sum_{j=1}^{n} D_{kj} x_j)$$

حتى يكون X_K عدد صحيح يجب ان يكون الطرف الثاني عددا صحيحا ، و عليه فان قيد Gomory هو :

$$\boxed{\mathbf{D_K - \sum_{j=1}^{n} D_{kj} x_j \le 0}}$$

وحسب مثالنا فان قيد Gomory يكون كالتالي :

$$9/5 = x_1 + 1/5\, e_1 - 1/5\, e_2$$

$$1 + 4/5 = x_1 + 1/5\, e_1 + (-1 + 4/5)\, e_2$$

[1] اليمين فالته، مرجع سابق ، ص ص 229،228

$$x_1 = 1 + 4/5 - 1/5\, e_1 - (-1 + 4/5)\, e_2$$

$$x_1 = 1 + e_2 + (4/5 - 1/5\, e_1 - 4/5\, e_2)$$

فاذا أردنا أن يكون x_1 عدد صحيح يجب أن يكون الطرف الثاني $(4/5 - 1/5\, e_1 - 4/5\, e_2)$ عددا صحيحا ، ومنه:

$$(4/5 - 1/5\, e_1 - 4/5\, e_2) \leq 0$$

و بهذه النتيجة نكون قد حددنا أول مستوي قاطع، ولكن قبل إدخالها كقيد جديد في النموذج يجب تعويض متغيرات الفوارق بالمتغيرات الأساسية كما يلي:

من النموذج المعياري لدينا: $6x_1 + 3x_2 + e_1 = 19 \Rightarrow e_1 = 19 - 6x_1 - 3x_2$

$$x_1 + 3x_2 + e_2 = 10 \Rightarrow e_2 = 10 - x_1 - 3x_2$$

بالتعريض في العبارة السابقة نجد :

$$\boxed{2x_1 + 3x_2 \leq 11}$$

و بالتالي يصبح النموذج الجديد بعد ادخال قيد Gomory كالتالي:

$$\text{MaxZ} = 2x_1 + 4x_2$$

$$(2)\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

- **الخطوة الثالثة: حل المسألة الجديدة:**

يتم في هذه الخطوة حل نموذج البرمجة الخطية الجديدة باستعمال طريقة السمبلاكس و بالكيفية المعروفة سابقا.

وحسب مثالنا ،فان النموذج المعياري للمسألة الجديدة و جداول السمبلاكس هم كالتالي:

$$\text{MaxZ} = 2x_1 + 4x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + e_1 = 19 \\ x_1 + 3x_2 + e_2 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + e_3 = 11 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

			2	4	0	0	0
c_k	V	b_i	x_1	$\mathbf{x_2}$	e_1	e_2	e_3
0	e_1	19	6	3	1	0	0
0	e_2	10	1	3	0	1	0
0	e_3	11	2	3	0	0	1
Z= 0			**−2**	**−4**	**0**	**0**	**0**
0	e_1	9	5	0	1	−1	0
4	$\mathbf{x_2}$	10/3	1/3	1	0	1/3	0
0	e_3	1	1	0	0	−1	1
Z= 40/3			**−2/3**	**0**	**0**	**4/3**	**0**
0	e_1	**4**	0	0	1	4	−5
4	$\mathbf{x_2}$	**3**	0	1	0	2/3	−1/3
2	$\mathbf{x_1}$	**1**	1	0	0	−1	1
Z= 14			**0**	**0**	**0**	**2/3**	**2/3**

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن قيم سطر التقييم جميعها معدومة أو موجبة، لذا فان شرط الأمثلية قد تحقق للبرمجة الخطية، كما أن هذا الحل مقبول لأن كل من x_1 و x_2 أعداد صحيحة ، وبالتالي فانه يجب على المؤسسة انتاج سفينة واحدة من النوع A و ثلاث سفن من النوع B من أجل تحقيق ربح أعظمي قدره 14 وحدة نقدية. و **هذه النتيجة نفسها المتوصل اليها في الطريقة البيانية و التي تمثلها النقطة E** .

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن : هل يتطلب الأمر هنا الانتقال الى الخطوة الرابعة؟

و الجواب هو أنه ما دامت قيم x_1 و x_2 صحيحة لا يحتاج الامر الى تكوين قيد قطع جديد بالخطوات المذكورة آنفا و حل المسألة الجديدة بطريقة السمبلاكس ، لذا نتوقف عن الحل وهذه تمثل المرحلة النهائية المثلى لمثالنا .

ملاحظة:

عند اختيار المتغيرة التي تتم على أساسها كتابة القيد، قد نجد قيمتين أو أكثر للجزء الكسري متساوية ، عندئذ يتم الاختيار بطريقة عشوائية.

3. طريقة التفريع و التحديد(Branch and Bound):

استعملت هذه الطريقة لأول مرة من قبل كل من G.Doig و A. Land لحل البرامج الخطية بشرط الأعداد الصحيحة ، و بعدها استعملت من طرف E. Balas في عام 1965 بتطويره للخوارزمية التجميعية لحل البرامج الخطية بالمتغيرات الثنائية . وتعتمد هذه الطريقة في البحث عن حل أمثل عددي صحيح على تطبيق عمليتين أساسيتين هما :[1]

- **التفريع (Branching)**: يقصد بها تقسيم فضاء الحل المستمر الى فضاءات فرعية من أجل حذف أجزاء الفضاء المستمر و الذي يكون غير مقبول لمسألة البرمجة بالأعداد الصحيحة ، وذلك عن طريق القيود العددية الضرورية للحصول على الحلول العددية المثلى.
- **التحديد(Bounding)** : و يعني اضافة محددات جديدة مع غلق تفرعات لا تفي بالمطالب أو الشروط الواردة في أصل النموذج الرياضي. و هذا يعني أن قيمة دالة الهدف المثلى لكل مسألة فرعية للمسألة الأصلية من نوع تعظيم أو تخفيض يحصل عليها من عملية التجزئة ، اذ يتم ادراجها كحد أعلى أو أدنى لقيمة دالة الهدف المرتبطة مع القيم العددية المتاحة لمتغيرات القرار . هذا الحد أساسي لعملية ترتيب الحلول المثلى للمجموعات الفرعية .

وعليه، فان الفرق بين طريقة قطع المستوي و طريقة التفريع و التحديد تكمن في أن الأولى تعمل على تحديد قيود تأخذ شكل قيود في عدة اتجاهات، بينما تعمل الثانية على تحديد قيود موازية لأحد محاور المعلم باستعمال أحد متغيرات النموذج.

ولشرح خطوات ايجاد الحل العددي الصحيح الأمثل بطريقة التفريع و التحديد سنعتمد على نفس المثال المعطى في الطريقتين السابقتين للبرمجة بالأعداد الصحيحة:[2]

مثال: كان البرنامج الخطي هو:

$$\text{MaxZ} = 2x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

- **الخطوة الأولى: حل المسألة باستخدام طريقة السمبلاكس**

يتم ايجاد الحل الأمثل للمسألة باستخدام طريقة السمبلاكس ، فاذا كان الجواب مستوفي لشروط البرمجة العددية نتوقف عن الحل أما اذا كان لا ننتقل الى الخطوة الثانية . وكما أشرنا سابقا، فانه تم أولا التخلص من مقامات القيد

[1] ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغباري، *بحوث العمليات، سلسلة ملخصات شوم*، ط2، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر ، 2004، ص ص 85،86 .

[2] سهيلة عبد الله سعيد، *الجديد في الأساليب الكمية و بحوث العمليات*، ط1 ،دار الحامد للنشر و التوزيع، عمان، 2007، ص ص 323،324

الأول للمسألة ، لنحصل على قيد جديد هو : $6x_1 + 3x_2 \leq 19$ ، ثم التوصل الى الحل الأمثل للمسألة بعد تطبيق خطوات طريقة السمبلاكس وهو : $\mathbf{x_1 = 9/5}$, $\mathbf{x_2 = 41/15}$, $\mathbf{Z = 218/5}$

و بما أن هذا الحل لا يحترم شرط الأعداد الصحيحة لمتغيرات القرار ، فان الأمر يتطلب الانتقال الى الخطوة الموالية.

- **الخطوة الثانية: عملية التفريع**

تتضمن هذه الخطوة تجزئة المسألة الأصلية الى مسألتين فرعيتين مع اضافة قيود جديدة مشتقة من أصل النموذج الرياضي. ويتم ذلك من خلال اتباع ما يلي:

✓ اختيار المتغير المتفرع: وهو المتغير الذي يكون قيمته عند الحل الأمثل يحمل قيمة كسرية كبيرة اذ يمكن كتابته بالصيغة التالية: $X_k = E_k + D_k$. و حسب مثالنا لدينا :

$$X_2 = 41/15 \Rightarrow 2 + 11/15 \quad , \quad \mathbf{X_1 = 9/5 \Rightarrow 1 + 4/5}$$

وبالتالي نختار المتغير X_1 كونه يحمل أكبر عدد بعد الفاصلة.

✓ كتابة القيدين الجديدين: بما أن X_k يجب أن تكون قيمة صحيحة في الحل الأمثل ،فانه يمكن البحث عن قيمها الجديدة X^*_k من خلال القاعدة التالية: $\mathbf{E \leq X^*_k \leq E+1}$

بحيث هذا المجال لا يحتوي على أي قيمة ذات عدد صحيح الا القيم E و E+1 لأن X^*_k محصور بين عددين صحيحين متتاليين ، والذي يمكن من خلاله اشتقاق قيدين جديدين هما :

$$\mathbf{X^*_k \leq E \quad , X^*_k \geq E+1}$$

وفي المثال المعطى فانه يمكن كتابة X_1 كما يلي: $1 \leq x_1 \leq 2$ ، وبالتالي يمكن التعبير عن شرط الأعداد الصحيحة للمتغير X_1 بقيدين هما : $X_1 \geq 2$, $X_1 \leq 1$.

✓ تشكيل البرنامجين الفرعيين: يتم اضافة كل قيد الناتج عن المرحلة السابقة الى البرنامج الأصلي ، لنتحصل على برنامجين آخرين يتم حل كل واحد منهما حلا مستقلا باستخدام طريقة السمبلاكس. وبالتالي، فان البرنامج الأصلي لمثالنا يفرع الى برنامجين يتكون من البرنامج الأصلي مضاف اليه القيد الأول المستنتج وهو $X_1 \leq 1$ ، و الثاني أيضا يتكون من البرنامج الأصلي مضاف اليه القيد $X_1 \geq 2$ ، أي:

$$(1)\quad MaxZ = 2x_1 + 4x_2 \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

$$(2)\quad MaxZ = 2x_1 + 4x_2 \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ entier} \end{cases}$$

- **الخطوة الثالثة: عملية التحديد**

تقوم هذه الخطوة على:

✓ تقييم حلول البرنامجين الفرعيين ، فاذا تم الحصول على الحل الأمثل بشرط العدد الصحيح يتم ترشيحه ليكون حل أمثل للبرنامج الأصلي ، وبعكسه تتم عملية التفريع بالاعتماد على نفس المراحل السابقة.

✓ تتم المقارنة بين النتائج العددية المثلى للبرامج الفرعية ليقع الاختيار على أفضل النتائج . ولزيادة كفاءة الحل لابد من ادخال مبدأ التحديد ،حيث اذا كانت دالة الهدف من نوع التعظيم فان قيمة دالة الهدف للحل الأمثل في البرنامج الفرعي يمثل الحد الأدنى للبرنامج الأصلي و كل البرامج الفرعية التي تؤدي حلولها الى قيم دالة هدفية أصغر من الحد الأدنى تصبح ملغاة، أما اذا كانت دالة الهدف من نوع التخفيض فان الحل الأمثل للبرنامج الفرعي يمثل الحد الأعلى للبرنامج الأصلي وكل البرامج الفرعية التي تؤدي حلولها الى قيم دالة هدفية أكبر من الحد الأعلى تصبح ملغاة

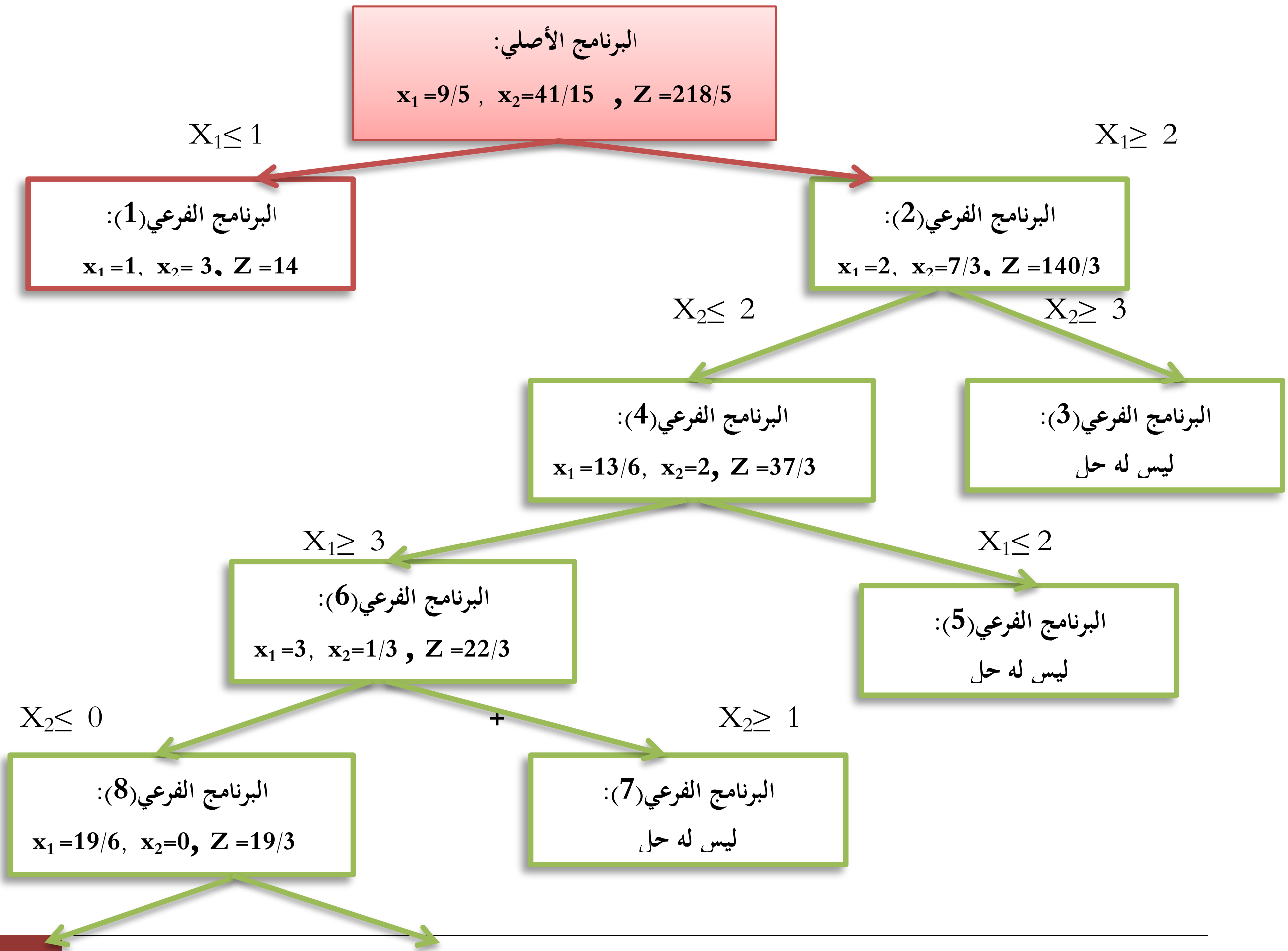
وبحل البرنامجين الفرعيين لمثالنا نتحصل على النتائج التالية:

البرنامج الفرعي (1): $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $Z = 14$

البرنامج الفرعي (2): $x_1 = 2$, $x_2 = 7/3$, $Z = 140/3$

نلاحظ أنه تم التوصل الى الحل الأمثل العددي الصحيح للبرنامج الفرعي (1) لذا نتوقف عن عملية التفريع، في حين لم يتم الحصول على قيم صحيحة لمتغيرات القرار في الحل الأمثل للبرنامج الفرعي (2) حيث بقيت قيمة المتغير x_2 عبارة عن كسر ، مما يستدعي تفريع البرنامج الفرعي (2) من جديد بنفس الخطوات السابقة.

ومن أجل توضيح عملية البحث بطريقة سهلة نقوم بتمثيلها على شكل شجرة قرار الموالي:



$X_1 \leq 3$	$X_1 \geq 4$
البرنامج الفرعي(10): $x_1=3,\ x_2=0,\ Z=6$	البرنامج الفرعي(9): ليس له حل

ان عملية تحديد الحل الأمثل وفق هذه الطريقة تكون باختيار أحسن حل عددي صحيح من الحلول المرشحة في النموذجين الفرعيين (1) و (10)، لينصب الاختيار على حل النموذج الفرعي (1) الذي يحقق اكبر قيمة لدالة الهدف ، ويسمى بذلك الحد الأدنى للمسألة وتكون كل البرامج المتفرعة ملغاة . وبالتالي فانه يجب على المؤسسة انتاج سفينة واحدة من النوع A و ثلاث سفن من النوع B من أجل تحقيق ربح أعظمي قدره 14 وحدة نقدية. **و هذه النتيجة نفسها المتوصل اليها في الطريقتين السابقتين .**

ملاحظة:

يتوقف البحث عن الحل الأمثل عبر فروع شجرة القرار عند توفر أحد الشروط الثلاثة:

- ✓ **النموذج الفرعي ليس له حل .**
- ✓ **النموذج الفرعي يقبل حل عددي صحيح .**
- ✓ **في حالة قيمة دالة الهدف للنموذج الفرعي اقل أو يساوي من قيمة دالة الهدف لأي فرع آخر يحتوي على حل أمثل عددي صحيح**

III.تمارين تطبيقية:

1. تمارين محلولة:

التمرين الأول: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$MaxZ= 40\ x_1+60\ x_2$$

$$\begin{cases} x_1+ 20x_2 \leq 11 \\ 7\ x_1+ x_2 \leq 21 \\ 2x_1+2\ x_2 \leq 13 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \\ x_1,\ x_2\ \text{entier} \end{cases}$$

المطلوب: البحث عن قيمة x_1 و x_2 لتعظيم دالة الهدف باستخدام طريقتي قطع المستوي ، التفريع و التحديد.