TP N°4 : Intégrations numériques

Objectifs

Les objectifs de ce TP sont :

- D'étudier et de comprendre deux méthodes d'intégration numériques : La méthode **Trapèzes**, et la méthode de **Rectangle.**
- D'utiliser MATLAB, pour implémenter et résoudre les algorithmes et visualiser les résultats.

1. La méthode de Trapèzes.

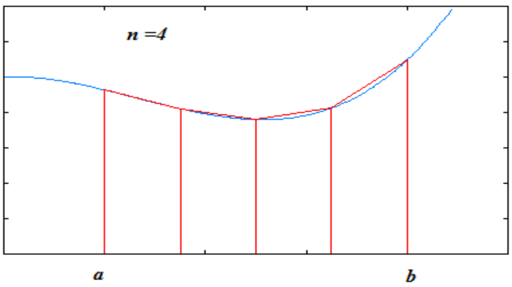
En analyse numérique, la méthode des trapèzes est une méthode pour le calcul numérique d'une intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ s'appuyant sur l'interpolation linéaire par intervalles.

Le principe est d'assimiler la région sous la courbe représentative de la fonction ***f*** à un trapèze et d'en calculer l'aire :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{f(a)+(b)}{2}$$

Pour obtenir de meilleurs résultats, on découpe l'intervalle $[a,b]$ en ***n*** intervalles plus petits et on applique la méthode sur chacun d'entre eux. Bien entendu, il suffit d'une seule évaluation de la fonction à chaque nœud :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)$$



Exercice:

- Programmer une fonction ***trapeze.m*** qui calcule une approximation par la méthode des trapèzes de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle avec Les paramètres suivant :

Les entrées	Les sorties
a et ***b*** les limites de l'intervalle **[a, b]**. ***f la*** fonction concernée. ***n*** nombre de sous-intervalles	***intgr*** = L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$

- On considère la fonction $f(x) = x^3 + x$, calculer à la main l'intégrale $I = \int_{-2}^{6} f(x)\,dx$.

- Calculer, à l'aide de la fonction ***trapeze.m,*** une valeur approchée $I = \int_{-2}^{6} f(x)\,dx$ avec **n = 10 et n = 100** sous-intervalles. Que vous remarquez ?

2. La méthode de Rectangle

Dans cette méthode, on calcule l'intégrale numérique en réalisant une somme de surfaces de rectangles. Le domaine d'intégration est découpé en intervalles et on fait comme si la fonction restait constante sur chaque intervalle. Sur chaque intervalle, on réalise ainsi l'approximation suivante :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,f(\delta)$$

où δ est une abscisse appartenant à l'intervalle limité par a et b.

rectangles à gauche : δ = ***b*** $\quad I_{gouche} = \int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,f(a)$

rectangles à droite : δ = ***a*** $\quad I_{droite} = \int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,f(b)$

On découpe l'intervalle $[a, b]$ en ***n*** intervalles plus petits et on applique la méthode sur chacun d'entre eux.

rectangles à gauche : $\quad I_{gouche} = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{n}\, f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$

rectangles à droite : $\quad I_{droite} = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)}{n}\, f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$

donc $\quad I_{gouche} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq I_{droite}$

Exercice:

- Programmer une fonction ***rectangle.m*** qui calcule une approximation par la méthode des Rectangle de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle avec Les paramètres suivant :

Les entrées	Les sorties
a et ***b*** les limites de l'intervalle **[a, b]**. ***f la*** fonction concernée. ***n*** nombre de sous-intervalles	***Intgr_d*** = L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ rectangles à droite ***Intgr_g*** = L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ rectangles à gauche

- On considère la fonction $f(x) = 3x^3 + x^2 + x$, calculer à la main l'intégrale $I = \int_{-3}^{5} f(x)\,dx$. limiter, à l'aide de la fonction ***rectangle.m,*** une valeur approchée $I = \int_{-2}^{6} f(x)\,dx$ entre I_{gouche} et I_{droite} avec **n = 100 et n = 1000** sous-intervalles. Que vous remarquez ?

Pour le prochain TP : **« TP 05 : Equations différentielles »**

SVP, préparez les points suivants :

- ✓ **Les équations différentielles :**
  - Méthode d'**Euler**.
  - Méthode des **Runge-Kutta**.

Corrigé type du TP 04

1. La méthode de Trapèzes.

1) La fonction ***trapeze.m***

```
function intgr = trapeze(a,b,f,n)

val = 0;
for k = 1:n-1
    fk = f(a + k * (b-a)/n);
    fk = fk + val;
    val = fk;
end

intgr = ((b-a)/n) * ( (f(a)+f(b)) / 2+fk);

end
```

2) $I = \int_{-2}^{6} f(x)\,dx = [g(x)]_{-2}^{6} = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{6} = \left[\frac{6^4}{4}+\frac{6^2}{2}\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4}+\frac{(-2)^2}{2}\right] = 336$

3)

```
f = inline('x^3+x','x'); I = trapeze(f,-2,6,10) %pour n = 10
I = trapeze(f,-2,6,100) %pour n = 100
```

2. La méthode de Rectangle

1) La fonction ***rectangle.m***

```
function [Intgr_g,Intgr_d]=rectangle(a,b,f,n)

    h = (b-a)/n;
    syms k
    Intgr_g = symsum(h*f(a+k*h), k, 0, n-1);
    Intgr_d = symsum(h*f(a+k*h), k, 1, n);
    Intgr_g = double(Intgr_g);
    Intgr_d = double(Intgr_d);
    fprintf('%f =< intgrale de f =< %f \n',Intgr_g,Intgr_d)

end
```

2)

```
447.55 =< intgrale de f =< 485.95 % pour n = 100
464.74 =< intgrale de f =< 468.58 % pour n = 1000
```