حل الواجب المنزلي02:

الحالة الأولى : حسب نموذج كورنو

ربح المؤسسة الأولى

$$\pi_1 = 100q_1 - \frac{1}{2}q_1(q_1 + q_2) - 5q_1$$

ربح المؤسسة الثانية

$$\pi_2 = 100q_2 - \frac{1}{2}q_2(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}q_2^2$$

شرط تعظيم الربح يقتضي عدم المشتقات الجزئية لدالتي الربح

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 100 - q_1 - \frac{1}{2}q_2 - 5 = 0 \quad . \ . \ . \ (1)$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 100 - q_2 - \frac{1}{2}q_1 - q_1 = 0 \ . \ . \ . \ (2)$$

و من (1) و (2) نحصل على منحنيي رد الفعل

منحنى رد فعل المؤسسة 1

$$q_1 + 95 - \frac{1}{2}q_2 \quad . \ . \ . \ (3)$$

منحنى رد فعل المؤسسة 2

$$2q_2 = 100 - \frac{1}{2}q_1$$

$$q_2 = 50 - \frac{1}{4}q_1 \ . \quad . \ . \quad (4)$$

نعيد كتابة (3) و (4) كما يلي :

$$q_1 = 95 - \frac{1}{2}q_2 \ldots (5)$$

$$\frac{1}{4}q_1 = 50 - q_2 \ldots (6)$$

بضرب المعادلة (6) بـ $\left(\frac{-1}{2}\right)$ تصبح هاتين المعادلتين كما يلي :

$$q_1 = 95 - \frac{1}{2}q_2$$

و بالجمع نجد

$$-\frac{1}{8}q_1 = -25 + \frac{1}{2}q_2$$

$$0.875q_1 = 70$$

$$q_1 = \frac{70}{0.875} = 80 \text{ وحدة}$$

بالتعويض في المعادلة (4) نجد :

$$q_2 = 50 - \frac{1}{4}(80)$$

و منه

$$q_2 = 30 \text{ وحدة}$$

و الإنتاج الكلي q

$$q = q_1 + q_2 = 80 + 30 = 110$$

و ثمن السلعة بالتعويض في دالة الطلب نجد :

$$P = 100 - \frac{1}{2}(110)$$

$$P = 45 \text{ و . نقدية}$$

ربح المؤسسة الأولى

$$\pi_1 = 100(80) - \frac{1}{2}(80)(110) - 5(80)$$

$$= 8000 - 4400 - 400 = 3200 \text{ و . نقدية}$$

ربح المؤسسة الثانية

$$\pi_2 = 100(30) - \frac{1}{2}(30)(110) - \frac{1}{2}(30)^2$$

$$= 3000 - 1650 - 450 = 900 \text{ و . نقدية}$$

الحالة الثانية : حسب نموذج ستاكلبرغ

نفترض أن المؤسسة الأولى تسلك سلوك القائد ، و نأخذ بنظر الاعتبار قرار المؤسسة الثانية

منحنى رد المؤسسة الثانية هو :

$$q_2 = 50 - \frac{1}{4}q_1$$

و بالتعويض في دالة ربح المؤسسة الأولى نحصل على :

$$\pi_1 = 100q_1 - \frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}q_1\left(50 - \frac{1}{4}q_1\right) - 5q_1$$

$$= 100q_1 - \frac{1}{2}q_1^2 - 25q_1 + \frac{1}{8}q_1^2 - 5q_1$$

$$= 70q_1 - \frac{3}{8}q_1^2$$

تعظيم ربح هذه المؤسسة يقتضي أن نعدم المشتق الأول لدالة الربح

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = 70 - \frac{6}{8}q_1 = 0 \rightarrow \ 560 \ = \ 3q_1$$

$q_1 = 93.3$ وحدة

بالتعويض في منحنى رد فعل المؤسسة 2 نجد :

$$q_2 = 50 - \frac{1}{4}(93.3)$$

$q_2 = 26.7$ وحدة

ربح المؤسسة الأولى

$$\pi_1 = 70(93.3) - \frac{3}{8}(93.3)^2 = 6531 - 3264.3 = 3266.7$$

ربح المؤسسة الثانية

$$\pi_2 = 100(26.7) - \frac{1}{2}(26.7)(120) - \frac{1}{2}(26.7)^2$$

$$= 2670 - 1602 - 356.4$$

$= 711.6$ وحدة. نقدية

نفترض أن المؤسسة الثانية تسلك سلوك القائد ، و نأخذ بنظر الاعتبار قرار المؤسسة الأولى

منحنى رد فعل المؤسسة الأولى

$$q_1 = 95 - \frac{1}{2}q_2$$

و بالتعويض في دالة ربح المؤسسة الثانية فنحصل على

$$\pi_2 = 100q_2 - \frac{1}{2}q_2^2 - \frac{1}{2}q_2\left(95 - \frac{1}{2}q_2\right) - \frac{1}{2}q_2^2$$

$$= 100q_2 - \frac{1}{2}q_2^2 - 47.5q_2 + \frac{1}{4}q_2^2 - \frac{1}{2}q_2^2$$

$$= 52.5q_2 - \frac{3}{4}q_2^2$$

تعظيم الربح يقتضي عدم المشتق الأول لدالة الربح

$$\frac{d\pi_2}{dq_2} = 52.5 - \frac{6}{4}q_2 = 0$$

$$= 52.5 - \frac{3}{2}q_2 = 0 \rightarrow 105 = 3q_2$$

$$q_2 = \frac{105}{3} = 35 \text{ وحدة}$$

و بالتعويض في منحنى رد فعل المؤسسة 1 نجد :

$$q_1 = 95 - \frac{1}{2}(85)$$

$= 95 - 17.5 = 77.5$ وحدة

ربح المؤسسة الأولى

$$\pi_1 = 70(77.5) - \frac{3}{8}(77.5)^2$$

$$= 5425 - 2252.3$$

$= 3172.7$ وحدة نقدية

ربح المؤسسة الثانية

$$\pi_2 = 52.5(35) - \frac{3}{4}(35)^2$$

$$= 1837.5 - 918.8$$

$= 918.7$ وحدة نقدية

حسب نموذج بولي

في أول الأمر تعتقد كل مؤسسة أنها القائدة فيكون نتيجة لذلك

$$q_2 = 35 \quad , \; q_1 = 93.33$$

$$\pi_1 = 95q_1 - \frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}q_1q_2$$

$$\pi_2 = 100q_2 - \frac{1}{2}q_1q_2 - q_2^2$$

و بالتعويض بالكميتين q_1 ، q_2 في معادلتي الربح نجد :

$$\pi_1 = 95(93.33) - \frac{1}{2}(93.33)^2 - \frac{1}{2}(93.33)(35)$$

$$= 8866.4 - 4355.2 - 1633.3$$

$$= 2878 \text{ وحدة نقدية}$$

$$\pi_2 = 100(35) - \frac{1}{2}(93.33)(35) - (35)^2$$

$$= 3500 - 1633.3 - 1225$$

$$= 642 \text{ وحدة نقدية}$$

$$\pi = \pi_1 + \pi_2$$

$$= 2878 + 642$$

$$= 3520$$

و في حال اتفاق المؤسستين على تعظيم الربح الكلي فسنحصل على :

$$\pi = 100(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}(q_1 + q_2) - 5q_1 - \frac{1}{2}q_2^2$$

و للحصول على الكميات المعظمة للربح نطبق شرط الدرجة الأولى

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 95 - q_1 - q_2 = 0 \rightarrow q_1 + q_2 = 95 \ldots (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 100 - q_1 - 2q_2 = 0 \rightarrow q_1 + 2q_2 = 100 \ldots (2)$$

بضرب المعادلة (1) في (-1) نجد :

$$\left.\begin{array}{l} -q_1 - q_2 = 95 \\ \\ q_1 + 2q_2 = 100 \end{array}\right\} \rightarrow q_2 = 5 \text{ وحدات}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد :

$q_1 + 5 = 95 \rightarrow q_1 = 90$ وحدة

$q = 90 + 5 = 95$ وحدة

$P = 100 - \frac{1}{2}(95) \rightarrow P = 52.5$ وحدة نقدية سعر السلعة

$RT = P.q$ الإيراد الكلي

$= (52.5)(95) = 4987.5$ وحدة نقدية

$CT = (5)(90) + \frac{1}{2}(5)^2$ التكلفة الكلية

$= 450 + 12.5$

$= 462.5$ وحدة نقدية

$= 4987.5 - 462.5 = 4525$ وحدة نقدية الربح الكلي