ملحق: ملاحظة حول الاستقرار

افترضنا في المعادلة (6.60) أن $|a|<1$، وسبب ذلك هو أن الاختبارات المقترحة للارتباط الذاتي في الكتاب لن تكون صحيحة إلا إذا كانت $|a|<1$، سنبين في هذا الملحق أهمية هذا الافتراض.

بالإشارة إلى (6.60)، دع:

$$Z_t = b_0 + b_1 X_{1t} + \cdots + b_k X_{kt} + u_t , \qquad t = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots \qquad (6A.1)$$

من الواضح أن Z_t هي صافي مجموع مكونات المتغيرات المستقلة فيما عدا aY_{t-1}. والآن يمكننا أن نعبر عن Y_t على النحو:

$$Y_t = aY_{t-1} + Z_t , \qquad t = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots \qquad (6A.2)$$

تتضمن العلاقة (6A.2)، أن:

$$Y_{t-1} = aY_{t-2} + Z_{t-1}. \qquad (6A.3)$$

وبالتعويض عن (6A.3)، في (6A.2)، نحصل على:

$$Y_t = a^2 Y_{t-2} + aZ_{t-1} + Z_t . \qquad (6A.4)$$

كما تتضمن العلاقة في (6A.2)، أيضا أن:

$$Y_{t-2} = aY_{t-3} + Z_{t-2}. \qquad (6A.5)$$

وبالتعويض عن (6A.5) في (6A.4)، نحصل على:

$$Y_t = a^3 Y_{t-3} + a^2 Z_{t-2} + aZ_{t-1} + Z_t . \qquad (6A.6)$$

لاحظ أنه، في كل من (6A.2) و (6A.4) وأخيرا (6A.6) يعبر عن Y_t بالقيمة المبطأة لها والمضروبة في المعلمة a والمرفوعة، بدورها، إلى قوة معينة. وتعادل هذه القوة المرفوعة إليها a فترة الابطاء في Y_t. وهكذا، ففي (6A.6) مثلا نجد أن Y_t مبطأ ثلاث فترات، و a مرفوعة للقوة 3. وترتبط Y_t بكل من Z_t، Z_{t-1} و Z_{t-2} بطريقة مشابهة.

والآن، بأخذ قيمة Y_t في الحسبان والمبطأة t من الفترات، أي $Y_{t-t} = Y_0$. وبالاستمرار في التعويض والذي يؤدي إلى (6A.6)، يمكننا التعبير عن Y_t بدلالة Y_0

على النحو:

$$Y_t = a^t Y_0 + a^{t-1} Z_t + a^{t-2} Z_2 + \cdots + aZ_{t-1} + Z_t. \qquad (6A.7)$$

وعلى سبيل التوضيح، فإن (6A.7) تعني أن:

$$\begin{aligned} Y_1 &= aY_0 + Z_1 \\ Y_2 &= a^2 Y_0 + aZ_1 + Z_2 \\ Y_3 &= a^3 Y_0 + a^2 Z_1 + aZ_2 + Z_3, etc. \end{aligned} \qquad (6A.8)$$

دعنا الآن نهتم بالحالة التي يكون فيها $|a| < 1$. نجد هنا، أن اعتماد Y_t على قيمته المبطأة t فترات سابقة (أي Y_0) تتضمن a^t التي تتناقص قيمتها المطلقة مع تزايد t ويعني هذا (من بين اشياء أخرى) أن اعتماد Y_2 على Y_0 سوف يكون أكبر في يقمته المطلقة عن اعتماد Y_3 على Y_0. وبالمثل، فإن اعتماد Y_3 على Y_0 سوف يكون أكبر في قيمته المطلقة عن اعتماد Y_4 على Y_0 وهلم جرا.

فإذا ماتحققت شروط فنية معينة مرتبطة بمكونـات Z_t*، واستمرت عمليـة الإحلال والتعويض (التي أوصلتنا إلى (6A.7) لانهائيا فسوف نحصل (في حالـة $|a| < 1$**) على:

$$Y_t = Z_t + aZ_{t-1} + a^2 Z_{t-2} + a^3 Z_{t-3} + \cdots. \qquad (6A.9)$$

ويلاحظ أننا لم ندخل القيم المبطأة لـY_t في الجانب الأيمن من (6A.9) لأن معامله سيكون صفرا إذا كانت $|a| < 1$.

افترض الآن الحالة التي تكون فيهـا $|a| \geq 1$ في هذه الحال، تصبح المناقشـة السابقة التي تؤدي إلى (6A.9) غير صحيحة، وذلك طالما أن a^t لن يتناقص في قيمته المطلقة مع زيادة t. وبالمثل، نجد أنه، في ضوء (6A.7) و (6A.8)، يكون اعتماد Y_3 على Y_0 كبيرا في الأقل، كأعتماد Y على Y_0. وبالمنطق نفسه فإن اعتماد Y_4 على Y_0 سيكون كبيرا على الأقل كاعتماد Y_3 على Y_0. وفي الحقيقة إذا كانـت $|a| > 1$

* تتضمن هذه الشروط، حدسيا، أن احتمال أن تكون القيم المبطأة لـ Z_t لانهائية هو الصفر.

** في عملية التعويض هذه نستخدم العلاقات $Y_0=aY_{-1}+Z_0$، $Y_{-1}=aY_{-2}+Z_{-1}$ وهلم جرا.

فإن اعتماد Y_t على Y_0 بالقيمة المطلقة سوف يتزايد كلما تزايدات t. وينبغي أن يكون ذلك واضحا من (6A.7) و (6A.8).

دع Y_t هي، عموما، قيمة المتغير التابع لنموذج معين في الفترة t. دع Y_0 هي قيمة ذلك المتغير في الفترة صفر. حينئذ إذا تضمن النموذج أن اعتماد Y_t على Y_0 يتناقص حتى يصل إلى الصفر عندما تؤول t إلى مالانهاية، فإن ذلك النموذج يكون مستقرا. أما إذا كان ذلك الاعتماد لايتناقص إلى الصفر عندما تؤول t إلى مالانهاية، يكون النموذج غير مستقر. فإذا كان النموذج غير مستقر فإن قيمة المتغير التابع في أحد الفترات سوف تؤثر بصورة دائمة على قيمته المستقبلية.

تبين مناقشتنا أعلاه أن النموذج الموجود في المعادلة (6.60) هو نموذج مستقر إذا كانت $|a| < 1$[*]، وغير مستقر إذا كانت $|a| > 1$. لاحظ أيضا أن شروط الاستقرار في المعادلة (6.60) لاترتبط بالمعاملات $b_0, b_1, ..., b_k$.

أسئلة

١- افترض النموذج:

$$Y_t = a + bX_t + u_t ,$$

مع المشاهدات

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Y	2	2	2	1	3	5	6	6	10	10	10	12	15	10	11

باستخدام خطأ من النوع الأول قدره $\alpha = 0.05$، اختبر وجود الارتباط الذاتي، افترض تحقق الشروط المعتادة للانحدار.

[*] نفترض هنا أنها تحقق الشروط الفنية السابق ذكرها والمرتبطة بالقيمة المتباطئة لـ Z_t.

٢- افترض دالة الإنتاج الخطية التالية:

$$Q_t = a + bL_t + cK_t + u_t,$$

حيث يكون الناتج الكلي للاقتصاد في الفترة t، Q_t، مرتبطا بكل من المدخلات الكلية للعمل ورأس المال L_t و K_t.

(أ) هل يمكن إثبات أن u_t في النموذج أعلاه يتسم باختلاف التباين؟ ناقش.

(ب) افترض أنه تم تجاهل رأس المال، وأصبح النموذج الذي قدر هو $Q_t = a + b\,L_t + u_t$. وضح لماذا يكون مقدر b متحيزا (على الأرجح) لأعلى.

٣- افترض أن دالة الاستهلاك لكل فرد، i، في الفترة t تأخذ الشكل:

$$C_{it} = a + b_1 Y_{it} + b_2 Y_{it}^2 + u_{it}, \qquad i = 1, \cdots, N. \qquad (1)$$

اجعل C_t و Y_t متوسطي الإنفاق الاستهلاكي والدخل في الفترة t على الترتيب، أي:

$$C_t = \sum_{i=1}^{N} \frac{C_{it}}{N}, \qquad Y_t = \sum_{t=1}^{N} \frac{Y_{it}}{N}. \qquad (2)$$

حينئذ، في ضوء معادلات الاستهلاك الفردية التي تأخذ الشكل (١)، فإنه قد يمكننا أن نكون نموذج الانحدار الكلي التالي:

$$C_t = a + b_1 Y_t + b_2 Y_t^2 + u_t, \qquad t = 1, \cdots, T. \qquad (3)$$

(أ) بين أن النموذج أعلاه سيعاني خطأ التحديد (specification error). يمكننا أن نطلق على هذا الخطأ «تحيز التجميع» طالما أنه ينشأ بسبب «تجميع» العلاقات الجزئية.

(ب) افترض أن $b_2 = 0$ ولذلك لايوجد تحيز التجميع. افترض أنه يتوافر لدينا مشاهدات عن N=3 أفراد لعدد T=2 سنوات. اكتب، بالرموز، مصفوفة المشاهدات التي تناظر المعادلة (١).

(جـ) وضح لماذا سيكون لدينا، عمومًا، تحيز التجميع، إذا اشتمل نموذجنا للانحدار المقطعي cross-sectional على متغير غير خطي مثل Y^2_{it} أعلاه؟

٤- افترض معادلة الطلب على النقود التالية:

$$M_{dt} = b_0 + b_1 i_t + b_2 i_{(t-1)} + b_3(\Delta i_t) + u_t,$$

حيث إن M_{dt}: الطلب على النقود، i_t معدل الفائدة و $\Delta i_t = i_t - i_{t-1}$. نفترض أن i_{t-1} تعكس تأثير العادة، أو القصور الذاتي، وأن Δi_t يعكس «أثر التوقع» الناتج عن التغيرات الحديثة في معدلات الفائدة.

(ا) أثبت، بدون معلومات إضافية، أنه من غير الممكن تقدير أي من b_1، b_2 و b_3.

(ب) ضع المعادلة في شكل يمكن تقديره، ويمكن استخدامه للتنبؤ بقيم M_{dt}.

٥- افترض دالة الإنتاج التالية:

$$Q_t = A L_{1t}^{\alpha_1} L_{2t}^{\alpha_2} K_t^{\alpha_3} e^{u_t},$$

حيث L_1 = عدد عمال الإنتاج، L_2 = عدد العمال الآخرين، k = رصيد رأس المال، u_t = الخطأ العشوائي، ويشير الرمز t إلى الفترات الزمنية. افترض أن المنشأة توظف دائما 10,000 عامل. حينئذ، يكون $L_{1t} + L_{2t} = 10,000$، هل يمكننا تقدير α_1، α_2 و α_3؟ وضح.

٦- افترض النموذج التالي:

$$Y_t = a + bX_t + u_t,$$
$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t.$$

افترض أننا نحسب $\hat{b}$ بوساطة الصيغة المعتادة:

$$\hat{b} = \frac{\sum (X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum (X - \overline{X})^2}$$

بين أنه، بسبب الارتباط الذاتي، لم تعد صيغتنا المعتادة لتباين $\hat{b}$ التي تأخذ الشكل:

$$\sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sum (X-\overline{X})^2}$$

صحيحة.

٧- إجعل دالة الاستهلاك تأخذ الشكل:

$$C_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 A_t + u_t,$$

حيث يفترض بالنسبة لكل قيمة من قيم Y_t و A_t أن $E(u_t) = 0$ وتباين u_t هو $Y_t^2 \sigma_2^2$. حول المعادلة السابقة إلى معادلة أخرى يتسم فيها الخطأ العشوائي بثبات التباين، ثم اشتق بعد ذلك المعادلات الطبيعية.

٨- افترض النموذج التالي:

$$I_t = a_0 + a_1 \Delta Y_t + a_2 r_t + \varepsilon_t,$$
$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + u_t,$$

حيث I = الاستثمار و ΔY = التغير في الدخل و r_t معدل الفائدة. افترض أن u_t مستقل عن المتغيرات المستقلة كافة، ولايتسم بوجود الارتباط الذاتي، وله قيمة متوسطة صفرية، وتباين ثابت. وضح باختصار الطريقة الذي يمكننا اتباعه للحصول على تقديرات a_0، a_1 و a_2 والتي تأخذه في الحسبان مشكلة الارتباط الذاتي عندما يكون كل من ρ_1 و ρ_2 غير معلومين.

الفصل السابع

نظم المعادلات

درسنا حتى الآن التقدير لمعادلة واحدة بمعزل عن النموذج الاقتصادي الأكبر الذي قد تكون هذه المعادلة جزءا منه. على سبيل المثال تكون معادلة الطلب على سلعة معينة، عادة، معادلة واحدة ضمن نظام من المعادلات يحدد السعر التوازني وكمية تلك السلعة في السوق، وعمومًا، يشتمل النموذج الاقتصادي لسوق معين على معادلة للطلب ومعادلة للعرض، وأخيرا، على معادلة ثالثة تصف العملية التوازنية في السوق (أي مساواة الكمية المطلوبة بالكمية المعروضة). سنهتم في هذا الفصل بالمشاكل التي قد تنشأ عندما تكون المعادلة المراد تقديرها مرتبطة بمعادلات أخرى في نموذجنا الأكبر. وسنجد بخاصة أنه، في ظل ظروف معينة، لم يعد بإمكان طريقتنا المعتادة في التقدير إعطاءنا مقدرات غير متحيزة (أو حتى متسقة) للمعاملات. وفي هذه الحالات، علينا أن نعدل من طريقتنا للتقدير.

(٧-١) تحيز المعادلات الآنية

نذكر أننا، عند مناقشتنا الأولية لنموذج الانحدار في الفصل الثاني، كونّا فرضين مرتبطين بخصائص معادلة الانحدار:

$$Y_t = b_0 + b_1 X_t + u_t.$$

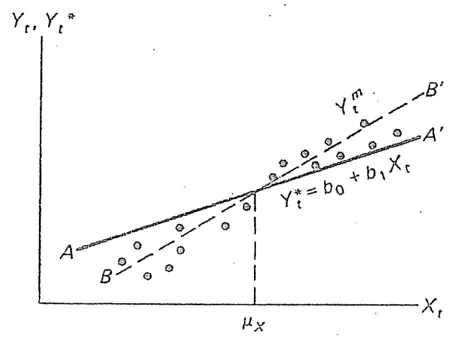
فقد فرضنا أن القيمة المتوسطة للخطأ العشوائي هي الصفر $E(u_t) = 0$ وأن الخطأ العشوائي مستقل عن المتغير المستقل في النموذج، ولذا يكون التغاير بينهما مساويا

للصفر $E(X_t, u_t) = 0$. وحينئذ، أمكننا وفقا لهذه الافتراضات، أن نضع في طريقتنا للتقدير :

$$\sum \hat{u}_t = 0 \quad , \quad \sum (X_t \hat{u}_t) = \dot{v}.$$

قد مكننا ذلك من الحصول على معادلتين طبيعيتين، وبحلهما معا، حصلنا على مقدرات معلماتنا $\hat{b}_1, \hat{b}_0$ ، وحينئذ، أمكننا إثبات أن هذه المقدرات غير متحيزة.

لاحظنا، أيضا، أن غياب التحيز في هذه المقدرات يعتمد على صحة افتراضاتنا. وعلى سبيل المراجعة افترض أن التغاير بين X_t ، u_t لم يكن صفرا أي $\text{cov}(X_t, u_t) = E(X_t\ u_t) \neq 0$. افترض، على سبيل المثال، أن التغاير موجب. يعني هذا أن القيم الأكبر من القيمة المتوسطة لـ u_t (وهي قيم موجبة طالما أن متوسط u_t يساوي صفرا) سوف تكون مرتبطة بقيم أكبر من القيمة المتوسطة لـ X_t والعكس بالعكس. يتضمن هذا، بدوره، أن القيمة المتوسطة لـ Y_t سوف تكون أكبر من Y^* حيث : $Y^* = (b_0 + b_1 X_t)$ عندما تكون X_t أكبر من قيمتها المتوسطة، μ_x، وأقل من Y^* عندما تكون X_t أقل من μ_x. افترض، في شكل الانتشار (٧-١) أن العلاقة المتضمنة لـ Y_t^* ممثلة بالخط AA' . حينئذ، فإن توقعاتنا سوف تكون حيث، طالما أن القيم الموجبة لـ u سوف تحدث عادة عندما تكون X كبيرة، في حين تحدث القيم السالبة لـ u مصاحبة للقيم الأصغر من X، إن الانتشار المشاهد للنقط يقع حول منحنى يشبه BB' . فإذا ما افترضنا على نحو غير صحيح أن $E(X_t u_t) = 0$، وتبعا لذلك، وضعنا الفرض $\Sigma X_t \hat{u}_t = 0$ ، فسوف نصل في النهاية إلى تقدير معلمات العلاقة BB' . بمعنى أننا سوف ننتهي بتقدير العلاقة بين Y_t، X_t التي يتوقع أن تكون في منتصف جميع النقاط في شكل الانتشار. وسينتج عن ذلك مقدرات متحيزة للمعلمات b_0 و b_1، وفي هذه الحال، سنميل إلى بخس تقدير b_0 (الجزء المقطوع من المحور الرأسي لـ AA' والمبالغة في تقدير b_1 (ميل AA'). ونؤكد هنا أن هذا التحيز لاتقل أهميته عند كبر حجم العينة. وهنا لن تكون مقدراتنا متحيزة، فقط، بل غير متسقة أيضا.



شكل رقم (٧-١)

دعنا الآن نعود إلى دالتنا البسيطة للاستهلاك والتي تأخذ الشكل :*

$$C_t = b_0 + b_1 Y_t + u_t. \tag{7.1}$$

في هذه المعادلة، نفترض أن الخطأ العشوائي u_t موزع توزيعا طبيعيا وله قيمة متوسطة صفرية، $E(u_t) = 0$، وتباين ثابت $E(u_t^2) = \sigma_u^2$، وغير مرتبط ذاتيا. لايفترض هنا استقلال u_t عن Y_t أو أنها غير مرتبطة بها، للأسباب التي سنناقشها الآن:

نعلم من النظرية الاقتصادية الكلية أنه توجد، في الأقل، معادلة إضافية أخرى في هذا النموذج، وهي معادلة توازنية تبين أن مستوى الناتج والدخل يستمر في التغير حتى يتعادل الطلب الكلي $(C_t + I_t)$ مع العرض الكلي Y_t:

$$Y_t = C_t + I_t, \tag{7.2}$$

حيث إن I_t هو مستوى الانفاق الاستثماري بوساطة الأفراد ومؤسسات الأعمال**.

دعنا نفترض أن I_t متغير خارجي، يعني هذا أن قيمته في أي فترة زمنية t تحدد بوساطة عوامل خارج النموذج، فقد يتحدد الإنفاق الاستثماري، مثلا، بوساطة

---

* لن نميز في النموذج المبسط الذي كوّناه في هذا البحث بين الدخل الكلي و الدخل المتاح، واتباعا لما جرى عليه العرف في الكتب الأخرى، سنرمز للدخل بالرمز Y ونعد، ببساطة، أن الاستهلاك دالة في الدخل.

** تعد المعادلة (7.2) معادلة توازنية بسيطة جدا لأنها تهمل طلب القطاع الحكومي وصافي الطلب الخارجي، ويمكننا، ببساطة، أن ندخل هذه المكونات الأخيرة للطلب في النموذج، ولكن ذلك غير ضروري للمشكلة التي نهتم بها هنا.

قوة العادة (حيث يزيد الاستثمار في إحدى الفترات بمقدار ٢٪ مثلا عن الفترة السابقة لها) أو بعوامل اجتماعية. سنفترض في هذا النموذج، على أية حال، أن هذه «القوى الخارجية» مهما كان نوعها، ليست مرتبطة بالخطأ العشوائي u_t في (7.1) ولذا، فإن التغاير بين I_t و u_t يكون صفرا.

$$E(I_t u_t) = \mathrm{cov}(I_t, u_t) = 0.$$

سنبين الآن – وبسبب العلاقة بين Y_t و C_t في المعادلة (7.2) – أن التغاير بين الدخل Y_t والخطأ العشوائي u_t في (7.1) ليس صفرا. ويمكننا توضيح ذلك بسهولة إذا ماقمنا بالتعويض عن قيمة C_t من (7.1) في (7.2) لنحصل على:

$$Y_t = b_0 + b_1 Y_t + u_t + I_t. \tag{7.3}$$

وبحل هذه المعادلة للحصول على Y_t، نصل إلى:

$$Y_t = \frac{b_0}{1-b_1} + \frac{I_t}{1-b_1} + \frac{u_t}{1-b_1} \tag{7.4}$$

فإذا ما ضربنا، بعد ذلك، (7.4) في u_t وأخذنا القيم المتوقعة لحصلنا على: *

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(Y_t, u_t) = E(Y_t u_t) &= E\left(\frac{b_0 u_t}{1-b_1} + \frac{I_t u_t}{1-b_1} + \frac{u_t^2}{1-b_1}\right) \\ &= \frac{b_0}{1-c_1} E(u_t) + \frac{1}{1-b_1} E(I_t u_t) + \frac{1}{1-b} E(u_t^2). \end{aligned} \tag{7.5}$$

ولما كانت القيمة المتوسطة لـ u_t هي الصفر وافترضنا أن التغاير بين u_t و I_t مساو للصفر، فإن الحدين الأولين في الصيغة الأخيرة من (7.5) يساويان الصفر، ولكن الحد الأخير ليس صفرا. وبالتحديد، يكون لدينا:

---

* نذكر، مرة أخرى، أنه طالما أن القيمة المتوسطة لـ u_t هي الصفر، فإن التغاير بين u_t و Y_t هو $E(u_t Y_t)$

لأن:
$$\begin{aligned} E[(u_t - 0)(Y_t - \mu_Y)] &= E(u_t Y_t) - E(u_t \mu_Y) \\ &= E(u_t Y_t) - \mu_Y E(u_t) = E(u_t Y_t), \end{aligned}$$

حيث إن μ_Y هو القيمة المتوسطة لـ Y_t

$$E(Y_t\,u_t)=\frac{1}{1-b_1}E(u_t^2)=\frac{\sigma_u^2}{1-b_1}\neq 0. \qquad (7.6)$$

نلاحظ أنه، وبسبب المعادلة الإضافية (7.2)، لم يعد بالإمكان افتراض أن التغاير بين المتغير المستقل Y_t والخطأ العشوائي u_t في (7.1) هو الصفر. وتشير المعادلة (7.6) إلى أن واحدا من الافتراضات الأساسية لنموذجنا للانحدار لم يعد صحيحا، لذلك، فإن استخدام طريقتنا المعتادة للتقدير سوف يؤدي - لأسباب ذكرناها من قبل - إلى إيجاد مقدرات متحيزة وغير متسقة لكل من b_0 و b_1.

قد يكون من المفيد الآن إكمال معالجتنا النظرية هذه بمناقشة أكثر بديهية لمصدر هذا التحيز. افترضنا في المعادلة (7.1) أن الإنفاق الاستهلاكي في الفترة C_t, t يعتمد على الدخل في الفترة الزمنية نفسها، Y_t. ولكننا نرى من (7.2) أن Y_t تعتمد، بدورها، على C_t. توجد لدينا إذا علاقة سببية تعمل في كلا الاتجاهين. فالمتغيران متداخلان: أي يعتمد كل منهما على الآخر. فإذا قمنا بتقدير (7.1) بوساطة طريقتنا المعتادة فإن ذلك يعني أننا نحدد نمط العلاقة الإحصائية بين C_t و Y_t. فإذا كانت العلاقة السببية تعمل في اتجاه Y_t إلى C_t بدون غموض أو لبس، يمكننا، حينئذ، أن تقديراتنا نفسها على أنها تشير إلى تأثير Y_t على C_t. ولكن، في حالة الاعتماد المتبادل [كما يظهر من (7.2)]، يعكس هذا الارتباط الاحصائي المحسوب بين C_t و Y_t خليطا من تأثير كل من المتغيرين على الآخر. وفي هذه الحال، لا يمكننا تفسير تقديراتنا على أنها مقياس لايتسم بالغموض لتأثير أحد المتغيرات، وهنا Y_t، على الآخر ، C_t. ونحتاج هنا إلى طريقة منقحة للتقدير تسمح لنا بفصل الأثرين عن بعضهما بعضا، أي إلى طريقة لعزل تأثير Y_t على C_t من تأثير C_t على Y_t.

هذه هي مشكلة تحيز المعادلات الآنية. وتنشأ هذه المشكلة، عموما، عندما تكون قيمة أحد المتغيرات المستقلة ذاتها دالة في المتغير التابع. افترض نموذج الانحدار المتعدد التالي :

$$Y_t = b_0 + b_1 X_{1t} + b_2 X_{2t} + u_t, \quad (7.7)$$

حيث X_{1t} هو المتغير المستقل الذي يحقق شروطنا المعتادة من حيث إنه مستقل عن الخطأ العشوائي. فإذا كان صحيحا أن X_{2t} يعتمد على Y_t، حينئذ، تكون لدينا معادلة أخرى للاهتمام بها - ربما تأخذ الشكل :

$$X_{2t} = c_0 + c_1 Y_t + r_t, \quad (7.8)$$

حيث إن r_t هو الخطأ العشوائي الذي يفترض، أيضا، استقلاله عن X_{1t}. سنترك للقارئ، على سبيل التدريب، أن يثبت (كما فعلنا من قبل) أنه

$$E(X_{2t}u_t) \neq 0.$$

تتضمن هذه المجموعة من المعادلات انتهاكا لواحد من الافتراضات الأساسية لنموذج الانحدار، وأي محاولة لاستخدام منهجنا المعتاد لتقدير (7.7) سوف ينتج عنه مقدرات متحيزة وغير متسقة للمعلمات كافة في المعادلة.

سوف نشير، من الآن فصاعدا، لخاصية الاتساق أو عدمها، فقط، لمقدراتنا. وسبب ذلك هو أن الاقتصاديين القياسيين يحلون «مشكلة نظم المعادلات الآنية» عن طريق بناء مقدرات متسقة لأنه لا توجد، عموما، مقدرات غير متحيزة للمعلمات في المعادلات التي تكون جزءا من نظام أكبر من المعادلات.

(٧-٢) طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين : حالة مبسّطة

تمكن الاقتصاديون القياسيون في السنوات الأخيرة من تطوير عدد من الطرق المختلفة لمعالجة مشاكل التقدير الخاصة بنظم المعادلات الآنية*، سوف نبين احداها هنا: طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (م ص م) Two-stage least squares. وتتسم هذه الطريقة بعدد من السمات الجيدة. فهي أولا، طريقة يسهل

* كما سنرى بعد قليل، فإن بعض المعادلات، أو معلمات معينة بها، لايمكن تقديرها. وفي الحقيقة، فإننا قد واجهنا هذه المشكلة في مجال آخر، وهو مجال الارتباط الخطي المتعدد، حيث لم نستطع تقدير بعض المعلمات في بعض المعادلات.

فهمها وتعتمد اعتمادا كبيرا على المادة العلمية التي تناولناها في هذا الكتاب، ثانيا، وفي ظل تحقق الشروط المعتادة، إذا كان يمكن تقدير المعادلة موضع الاهتمام، فإن م ص م (وعلى العكس من طرق التقدير الأخرى) تعمل دائما حيث توجد مقدرات متسقة للمعلمات الممكن تقديرها. ثالثا، يمكن أن نطلق على م ص م بأنها طريقة المعلومات المحدودة Limited-information. ونعني بذلك أنه يمكن تقدير معادلة معينة موجودة في إطار معادلا ت آنية عن طريق م ص م باستخدام معلومات عامة غير محددة، فقط، عن المعادلات الأخرى. بينما يتطلب تنفيذ عديد من الطرق الأخرى معلومات أكثر تفصيلا عن تلك المعادلات. رابعا، تحتاج م ص م إلى قدر متواضع من الحسابات مقارنة بالطرق الأخرى.

توضيح : المقدرات المتسقة

سنقدم أولا مقدمة حدسية لـــ م ص م. نذكر أن مشكلتنا، أساسا، هي وجود العلاقة السببية ذات الاتجاهين التي نجم عنها تغاير لا يساوي الصفر بين الخطأ العشوائي وواحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة. فإذا أردنا استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في التقدير (م ص م)*، فإنه ينبغي علينا - بطريقة أو بأخرى - التخلص من التغاير غير الصفري حتى تستوفي المعادلة المقدرة افتراضات نموذجنا للانحدار. وهذا ماتفعله، بالضبط، م ص م. إنها طريقة ذات مرحلتين، في المرحلة الأولى، نزيل من المتغير (أو المتغيرات) المستقلة ذلك الجزء المرتبط بالخطأ العشوائي. ويتضمن ذلك إيجاد مجموعة منقحة من القيم للمتغيرات المستقلة المشكوك فيها. هذه القيم المنقحة لاتكون مرتبطة بالخطأ العشوائي، ولذا

---

* نذكر من الفصل الثاني أن طريقتنا للتقدير باستخدام المتغير المساعد لها سمة «المربعات الصغرى»، بمعنى أن تلك الطريقة تكون مماثلة لتدنية مجموع الانحرافات المربعة للنقاط المشاهدة عن خط الانحدار المقدر. لهذا السبب، قد نشير إلى نتائجنا المعتادة على أنها نتائج طريقة المربعات الصغرى العادية (م ص ع)، ويعد هذا الترميز ملائماً للتمييز بين طريقتنا المعتادة م ص ع وطريقة م ص م.

تكون الخطوة الثانية، ببساطة، هي تقدير المعلمات بطريقتنا العادية للتقدير.

ولنعرف كيف يتم ذلك، دعنا نعود إلى نموذجنا المبسط ذي المعادلتين للدخل القومي حيث لدينا :

$$C_t = b_0 + b_1 Y_t + u_t, \quad (7.1)$$

$$Y_t = C_t + I_t. \quad (7.2)$$

وكما سبق، فإنه، بالتعويض عن C_t من (7.1) في (7.2) وحلها للحصول على Y_t نحصل على :

$$Y_t = \frac{b_0}{1-b_1} + \frac{I_t}{1-b_1} + \frac{u_t}{1-b_1}. \quad (7.4)$$

ويمكننا أن نبسط رموزنا عن طريق كتابة (7.4) على النحو :

$$Y_t = a_0 + a_1 I_t + q_t, \quad (7.9)$$

حيث :

$$q_t = \frac{u_t}{1-b_1}. \quad a_1 = \frac{1}{1-b_1}, \quad a_0 = \frac{b_0}{1-b_1},$$

لدينا الآن المتغير Y_t بوصفه دالة في I_t وفي الخطأ العشوائي q_t فقط. لاحظ أن q_t (مثل u_t) له متوسط يساوي الصفر. افترض للحظة أننا نعلم قيم a_0 و a_1. في ظل هذا الافتراض يمكننا اشتقاق متوسط Y_t، أي Y_t^m المرتبط بأي قيمة معطاة لـ I_t :

$$Y_t^m = a_0 + a_1 I_t. \quad (7.10)$$

ومن (7.9) ، يمكننا أيضا، رؤية أن :

$$Y_t = Y_t^m + q_t. \quad (7.11)$$

وبالرجوع إلى دالتنا الأصلية للاستهلاك (7.1) ، وبالتعويض في (7.11) عن قيمة Y_t، نحصل على :

$$\begin{aligned} C_t &= b_0 + b_1(Y_t^m + q_t) + u_t \\ &= b_0 + b_1 Y_t^m + (b_1 q_t + u_t). \end{aligned} \tag{7.12}$$

وبملاحظة أن $q_t = u_t / (1-b_1)$، يمكننا كتابة (7.12) على النحو التالي :

$$\begin{aligned} C_t &= b_0 + b_1 Y_t^m + \frac{u_t}{1-b_1} \\ &= b_0 + b_1 Y_t^m + q_t. \end{aligned} \tag{7.13}$$

سنبين الآن أن المعادلة (7.13)، بعكس (7.1)، تحقق الافتراضات الأساسية لنموذجنا للانحدار. فأولا، يمكننا رؤية أن الخطأ العشوائي له متوسط يساوي الصفر.

$$E(q_t) = E\left(\frac{u_t}{1-b_1}\right) = \frac{1}{1-b_1} E(u_t) = 0.$$

وثانيا، نجد أن المتغير المستقل لم يعد مرتبطا بالخطأ العشوائي، فإذا ضربنا (7.10) بـ q_t وأخذنا القيمة المتوقعة، نحصل على :

$$\begin{aligned} E(Y_t^m q_t) &= E(a_0 q_t + a_1 I_t q_t) \\ &= \left(\frac{a_0}{1-b_1}\right) E(u_t) + \left(\frac{a_1}{1-b_1}\right) E(I, u_t) = 0, \end{aligned} \tag{7.14}$$

وطالما أن القيمة المتوقعة لـ u_t تساوي صفرا، وطالما أن I_t مستقل عن u_t افتراضا.* لذا، يمكننا استخدام طريقتنا المعتادة في التقدير للحصول على مقدرات متسقة لـ b_0 و b_1. وسنفرض الشرطين $\Sigma\hat{q}_t = 0$ و $\Sigma Y_t^m \hat{q}_t = 0$ لاشتقاق المعادلتين الطبيعيتين:

---

* من الواضح أن الخطأ العشوائي q_t لن يعاني مشكلة الارتباط الذاتي (طالما أن ليس مرتبطا ذاتيا)، وسيكون له تباين ثابت، هو $\left[\sigma_u^2/(1-b)^2\right]$. يضاف إلى ذلك أن q_t سيكون موزعا توزيعا طبيعيا طالما أن u_t موزع كذلك.

$$\sum C_t = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum Y_t^m ,$$

$$\sum (C_t Y_t^m) = \hat{b}_0 \sum Y_t^m + \sum (Y_t^m)^2 ,$$

واللتين يمكننا حلهما للحصول على $\hat{b}_1$ و $\hat{b}_0$. لاحظ، أيضا، أن هاتين المعادلتين هما اللتان سنحصل عليهما لو أحللنا Y_t^m محل Y_t في المعادلة الأصلية (7.1) ومن ثم، واصلنا لنشتق المعادلتين الطبيعتين بالطريقة المعتادة.

وعلى سبيل المراجعة، وللتعامل مع مشكلة نظم المعادلات، نحـدد أولا القيمة المتوسطة للدخل Y_t^m المرتبطة بكل قيمة للاستثمار، I_t. أما الخطوة الثانية فتتمثل بإحلال هذا المتغير الجديد محل Y_t في المعادلة الأصلية، ومن ثم، تقدير المعلمات بالطريقة المعتادة. وبالطبع، عنـدمـا تحـل Y_t^m محل Y_t في معادلتنـا الأساسية (7.1)، فإننا نلاحظ أن الخطأ العشوائي، q_t، في معادلتنا الناتجة (7.13) ليس مماثلا للخطأ العشوائي الأصلي، u_t. ،وفي ضوء أهدافنا فهذا التغير غير مهم، في الحقيقة، وهو فعلا يرتبط بالترميز، فقط، لأننا بينا أن q_t لها السمات الأساسية نفسها كما لـ u_t.

وتتكون طريقة م ص م، في الواقع، من تنقية المتغير المستقل، Y_t، من ذلك الجزء، q_t، المرتبط بالخطأ العشوائي الأصلـي u_t. تذكر أن $Y_t = Y_t^m - q_t$. وكما أوضحنا أن Y_t^m غير مرتبط بـ q_t (وبالتالي بـ u_t) وعندما نستخدم Y_t^m بدلا من Y_t فنحن بالفعل قد طرحنا q_t من Y_t: بمعنى أننا قد أزلنا ذلك الجزء من Y_t الذي يحتوي على تأثير الجزء العشوائي للمتغير التـابـع C_t على المتغيـر المستقل Y_t، وبهذه الطريقة يمكننا، باستخدام م ص م، فصل التأثيرات التي كانت متداخلة من قبل.

وبينما تظهر هذه الطريقة من حيث المبدأ سليمة، فإن الصعوبة العمـلـيـة تكمن في عـدم امكانية تنفيذ ذلك مباشرة لأننا لانعرف قيم Y_t^m. تذكر أنه في المعادلة (7.10) :

$$Y_t^m = a_0 + a_1 I_t . \qquad (7.10)$$

افترضنا أن قيم كل من a_0 و a_1 معلومة. وهذا لن يكون صحيحا، عموما، إلا أنه يمكننا تقدير قيمتها. فإذا نظرنا إلى الخلف للمعادلة التي اشتققناها من النموذج الأصلي، أي (7.9)، يمكننا أن نتأكد أنها تحقق افتراضات نموذج الانحدار الأساسي كافة:

$$Y_t = a_0 + a_1 I_t + q_t . \qquad (7.9)$$

وباستطاعتنا أن نحصل على مقدرات لـ a_0 و a_1 : $\hat{a}_0$ و $\hat{a}_1$ مثلا، من المعادلات الطبيعية التي نوجدها عن طريق وضع $\Sigma\hat{q}_t = 0$ و $\Sigma(\hat{q}_t I_t) = 0$. وباستطاعتنا، حينئذ، استخدام $\hat{a}_0$ و $\hat{a}_1$ للحصول على مقدر لـ Y_t^m :

$$Y_t^m = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 I_t . \qquad (7.15)$$

وبالعودة إلى الرموز المستخدمة في الفصول السابقة، نجد أن Y_t^m ليست سوى القيمة المحسوبة لـ Y_t والمناظرة للانحدار (7.9) : $\hat{Y}_t^m = \hat{Y}_t$.

والمرحلة الثانية هي استخدام $\hat{Y}_t$ (بدلا من Y_t^m) لتقدير معادلة الاستهلاك، أي أننا سنجعل نموذجنا للانحدار يأخذ الشكل :

$$C_t = b_0 + b_1 \hat{Y}_t + u_t^* , \qquad (7.16)$$

حيث إن $u_t^* = u_t + b_1 \hat{q}_t$ ، طالما أن $Y_t = \hat{Y}_t + \hat{q}_t$. وباتباع المنهج المعتاد سنفترض الشروط $\Sigma\hat{u}_t^* = 0$ و $\Sigma(u_t^* \hat{Y}_t) = 0$ للحصول على المعادلات الطبيعية :

$$\sum C_t = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum \hat{Y}_t ,$$

$$\sum (C_t \hat{Y}_t) = \hat{b}_0 \sum \hat{Y}_0 + \hat{b}_1 \sum \hat{Y}_t^2 ,$$

التي سنقوم بحلها للحصول على $\hat{b}_0$ و $\hat{b}_1$ *. وفي الحقيقة يمكن إثبات (في ظل شروط عامة) أن كل من $\hat{b}_0$ و $\hat{b}_1$ التي حصلنا عليها متسقتان.

خلاصة القول لحالتنا التوضيحية هذه تتكون طريقة م‌ص‌م من أولا: انحدار المتغير المستقل المشكوك فيه، Y_t، على المتغير الخارجي، I_t، واستخدام هذه المعادلة المقدرة لاشتقاق المتغير المستقل الجديد، $\hat{Y}_t$. وثانيا: إحلال $\hat{Y}_t$ محل Y_t في معادلتنا الأصلية، وبعدئذ نقدر معادلتنا بالطريقة المعتادة. ونلاحظ هنا وفي ظل هذه الطريقة أن الخطأ العشوائي في المرحلة الثانية u_t^* هو تعديل مبسط للخطأ العشوائي الأصلي u_t.

بعض النتائج الإضافية

قبل المضي في تعميم طريقتنا، ينبغي أن نلاحظ أنه، عندما تكون لدينا مقدرات متسقة لـ b_0 و b_1، يمكننا وببساطة الحصول على مقدر متسق للخطأ العشوائي u_t في (7.1) بوساطة القاعدة الواضحة التالية:

$$\hat{u}_t = C_t - (\hat{b}_0 + \hat{b}_1 Y_t).$$

---

* من الناحية العلمية، لاحظ a_0 و a_1 في (7.9) سيتم تقديرها عن طريق فرض الشروط:

$$\Sigma \hat{q}_t = 0 \quad و \quad \Sigma(\hat{q}_t I_t) = 0$$

وطالما أن $\hat{Y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 I_t$ فإنه ينتج عن ذلك أن $\Sigma(\hat{q}_t \hat{Y}_t) = 0$ والآن، بسبب أن $u_t^* = u_t + b_1 \hat{q}_t$ في (7.16)، يكون لدينا:

$$\sum u_t^* = \sum \hat{u}_t = 0 \qquad , \qquad E(u_t) = 0,$$

وتفيد هذه الشروط أنه، لتقدير (7.16) نضع:

وطالما $E(u_t) = 0,$ فإن، $\sum \hat{u}_t^* = \sum \hat{u}_t = 0$

وطالما $E(u_t Y_t''') = 0.$ فإن، $\sum (\hat{u}_t^* \hat{Y}_t) = \sum (\hat{u}_t \hat{Y}_t) = 0$

وبمعنى آخر لا يؤدي مكون $\hat{q}_t$ في u_t^* أي دور في تقدير (7.16) وسنرى النتائج المترتبة على ذلك بالنسبة لصيغ التباين فيما بعد.

وبهذا، نحصل على مقدر متسق لتباين u_t بوساطة صيغتنا المعتادة :

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum \hat{u}_t^2}{n-2} \tag{7.17}$$

وأحد السمات الجيدة الأخرى لطريقة م‌ص‌م هو أنه متى تم إحلال Y_t^m محل Y_t فإن صيغنا القديمة لتباين $\hat{b}_0$ و $\hat{b}_1$ تظل صحيحة فيما عدا تغيرا في التفسير. وبالاشارة إلى (7.16) ، ويذكر أن متوسط العينة لـ $\hat{Y}_t$ هو $\overline{Y}_t = \hat{Y}$ ، فإنه يمكن إثبات أن الصيغ المعتادة :

$$\sigma_{\hat{b}_0}^2 = \sigma_u^2 \left[\frac{\sum \hat{Y}_t^2}{n \sum (\hat{Y}_t - \overline{Y})^2} \right], \tag{7.18}$$

$$\sigma_{\hat{b}_1}^2 = \sigma_u^2 \left[\frac{1}{\sum (\hat{Y}_t - \overline{Y})^2} \right], \tag{7.19}$$

فإنه يمكن إثبات أنها ماتزال صحيحة بشرط أن تكون العينة كبيرة لا نهائية. وطالما أنه لاتوجد لدينا عينات ذات حجم لانهائي، فإنه ينبغي علينا، مرة ثانية، تفسير هذه الصيغ باعتبارها قيما تقريبية.

سوف يلاحظ القارئ الفطن اختلافا واضحا في صيغ التباين. وبالتحديد، فطالما أن التقدير في المرحلة الثانية يتضمن المعادلة (7.16) حيث يصبح الخطأ العشوائي u_t^* (وليس u_t)، فإن صيغنا لتباين $\hat{b}_0$ و $\hat{b}_1$ في (7.18) و (7.19) ينبغي أن تتضمن تباين u_t^* (أي σ_u^{2*}) بدلا من σ_u^2. ولكن الحال ليست كذلك وسبب ذلك هو أن جزء $\hat{q}_t$ في صيغة u_t^*.

$$u_t^* = u_t + b_1 \hat{q}_t ,$$

يلغي بعضه بعضا في كل من $\hat{b}_0$ و $\hat{b}_1$. وينتج عن ذلك أنه يمكن إثبات أن قيم كل من هذين المقدرين تعتمد على u_t (وليس على u_t^*). ومن ثم، يعتمد كل من $\hat{b}_0$ و $\hat{b}_1$ على تباين u_t وليس على تباين u_t^*.

ولنرى ذلك، لاحظ أن مقدرنا $\hat{b}_1$ سيكون :

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum \hat{Y}_t - \overline{Y})C_t}{\sum (\hat{Y}_t - \overline{Y})^2}. \tag{7.20}$$

وبالتعويض عن C_t من (7.16) في (7.20) وبالاختصار، نحصل على :

$$\hat{b}_1 = b_1 + \frac{\sum (\hat{Y}_t - \overline{Y})u_t^*}{\sum (\hat{Y}_t - \overline{Y})^2}. \tag{7.21}$$

ولما كانت $\Sigma\hat{q}_t = 0$ و $\Sigma\left(\hat{q}_t\hat{Y}_t\right) = 0$ فإننا نحصل على :

$$\sum (\hat{Y}_t u_t^*) = \sum (\hat{Y}_t u_t) + b_1 \sum (\hat{Y}_t \hat{q}_t) = \sum (\hat{Y}_t u_t),$$
$$\sum (\hat{Y}_t u_t^*) = \overline{Y} \sum u_t + \overline{Y} b_1 \sum \hat{q}_t = \overline{Y} \sum u_t.$$

ويمكننا الآن أن نعبر عن $\hat{b}_1$ على النحو :

$$\hat{b}_1 = b_1 + \frac{\sum (\hat{Y}_t - \overline{Y})u_t}{\sum (\hat{Y}_t - \overline{Y})^2}. \tag{7.22}$$

وينتج عن ذلك، حدسيا، في الأقل، أن تباين العينة الكبيرة لـــ $\hat{b}_1$ سيتضمــن تباين u_t وليس u_t^*. ونترك للقارئ أن يثبت أنه يمكن، للأسباب نفسها، التعبيــر عن $\hat{b}_0$ بدلالة u_t.

وعلى الرغم من أن $\hat{\sigma}_u^2$ يكون، عادة، غير معلوم، فإنه يمكننا الحصول على مقدرات متسقة لتباينات $\hat{b}_0$ و$\hat{b}_1$ عن طريق إحلال المقدر $\hat{\sigma}_u^2$ المتسق محل σ_u^2:

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}_0}^2 = \hat{\sigma}_u^2 \left[\frac{\sum \hat{Y}_t}{n \sum (\hat{Y}_t - \overline{Y})^2} \right] \tag{7.23}$$

و

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}^2 = \hat{\sigma}_u^2 \left[\frac{1}{\sum (\hat{Y}_t - \overline{Y})^2} \right] \tag{7.24}$$

وأخيرا، يمكن اختبار الفرضيات أو بناء فترات الثقة عن طريق افتراض أن النسبة $\left(\hat{b}_i - b_i\right)/\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}$ حيث (i=0 و 1) متغير طبيعي معياري. ومرة أخرى، نجد، عند التطبيق، أن العينات ذات حجم محدود، ولذا فإن مثل هذه النتائج هي نتائج تقريبية، والسبب وراء التعقيد في هذه الحالة هو عدم خطية كل من $\hat{b}_0$ و $\hat{b}_1$ بالنسبة للأخطاء العشوائية من خلال اعتمادها على $\hat{Y}_t$ (على سبيل المثال، انظر 7.22).

(٧-٣) نظم المعادلات : مناقشة أكثر عمومية*

تحديد النموذج

سنعمم الآن مناقشتنا لنماذج المعادلات الآنية. افترض نموذج الانحدار المتعدد الذي يتكون من المعادلات :

$$Y_{1t} = b_0 + b_1 Y_{2t} + b_2 Y_{3t} + a_1 X_{1t} + \cdots + a_k X_{kt} + u_t, \tag{7.25}$$

$$Y_{2t} = c_0 + c_1 Y_{3t} + c_2 Y_{1t} + d_1 Z_{1t} + \cdots + d_t Z_{rt} + \varepsilon_t, \tag{7.26}$$

$$Y_{3t} = g_0 + g_1 Y_{2t} + g_2 Y_{1t} + h_1 W_{1t} + \cdots + h_s W_{st} + e_t, \tag{7.27}$$

حيث e_t, ε_t, u_t هي الأخطاء العشوائية. نفترض أن كل من هذه الاخطاء العشوائية له قيمة متوسطة صفرية :

$$E(u_t) = 0, \qquad E(\varepsilon_t) = 0, \qquad E(e_t) = 0,$$

وتباين ثابت :

$$E(u_t^2) = \sigma_u^2, \quad E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2, \qquad E(e_t^2) = \sigma_\varepsilon^2,$$

أي أنها غير مرتبطة ذاتيا كما أنها موزعة توزيعا طبيعيا. إضافة إلى ذلك، سنفترض أن هذه الاخطاء العشوائية غير مرتبطة بكل من X_t' ، Z_t' و W_t' الظاهرة في النظام (7.25)-(7.27). وعلى الرغم من أن الرموز المستخدمة في النموذج لاتدل

* لتبسيط العرض، نناقش نظم المعادلات في إطار نموذج ذي ثلاث معادلات، فقط. إلا أن النتائج تنطبق، أيضا، على جميع النماذج ذات الاحجام المختلفة.

على ذلك، إلا أننا نسمح بإمكانية ظهور واحد أو أكثر من هذه المتغيرات في أكثر من معادلة واحدة، وبمعنى آخر فإن X'_t، Z'_t و W'_t قد تكون لها عناصر مشتركة.

ينبغي أن يكون واضحا عدم إمكانية افتراض أن الأخطاء العشوائية غير مرتبطة، أيضا، بـ Y_{1t} ، Y_{2t} و Y_{3t}. وفي الحقيقة، وعموما، فإن كل واحد من Y_t سوف يكون مرتبطا بجميع الأخطاء العشوائية الثلاثة. على سبيل المثال يتضح لنا مباشرة من معادلة (7.25) أن Y_{1t} يعتمد على u_t ولذا، فإن هذين المتغيرين مرتبطان. فضلا عن ذلك، تشير المعادلة (7.26) إلى أن Y_{2t} يعتمد على Y_{1t} ومن ثم على u_t. وهكذا تكون Y_{2t}، عموما، مرتبطة بـ u_t. وبالمثل، تتضمن (7.27) أن Y_{3t} ترتبط، عموما، بـ u_t. ويمكن توسيع المناقشة هذه لتوضيح التغايرات غير الصفرية بين Y_{1t} ، Y_{2t} و Y_{3t} مع الأخطاء العشوائية الأخرى e_t, ε_t. وباختصار، إذا اشترك متغيران في علاقة ذات اتجاهين فإن كل متغير سوف يكون مرتبطا بالخطأ العشوائي في معادلة المتغير الآخر.

في هذا النموذج ذي المعادلات الثلاث تسمى Y_{1t} ، Y_{2t} و Y_{3t} بالمتغيرات الداخلية endogenous variables، تحدد قيمتها في الزمن t بوساطة النموذج المحدد في المعادلات (7.27-7.25). وهي المتغيرات التي حاول نموذجنا تفسيرها. ويطلق على المتغيرات الأخرى X'_t، Z'_t و W'_t بالمتغيرات المحددة قيمها مسبقا Predetermined variables. وهذه المتغيرات غير مرتبطة بالأخطاء العشوائية، كما أن قيمها في الفترة t لاتتحدد بوساطة النموذج في الفترة t . وسنوضح بعد قليل كيف تحدد قيمها. وفي الوقت نفسه ينبغي أن يكون واضحا أن قيم هذه المتغيرات المحددة مسبقا مع قيم الاخطاء العشوائية تحددان معا قيم المتغيرات الداخلية في النموذج في الفترة t. فمثلا، نجد أن مجموعة المعادلات الخطية مثل (7.27-7.25) يمكن حلها للحصول على قيم المتغيرات الداخلية Y_{1t} و Y_{2t} و Y_{3t} بدلالة المتغيرات المحددة قيمها مسبقا والاخطاء العشوائية. وهكذا، يمكننا، عن طريق حل هذا النموذج، الحصول على Y_t في الشكل :

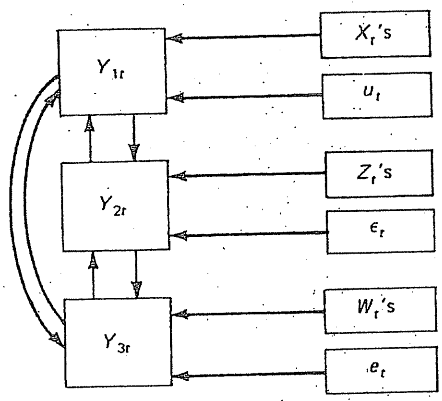
$$Y_{1t}=l_0+\sum_{i=1}^{k}l_i X_{it}+\sum_{i=k+1}^{k+r}l_i Z_{it}+\sum_{i=k+r+1}^{k+r+s}l_i W_{it}+\alpha_1 u_t+\alpha_2\varepsilon_t+\alpha_3 e_t, \qquad (7.28)$$

$$Y_{2t}=m_0+\sum_{i=1}^{k}m_i X_{it}+\sum_{i=k+1}^{k+r}m_i Z_{it}+\sum_{i=k+r+1}^{k+r+s}m_i W_{it}+\gamma_1 u_t+\gamma_2\varepsilon_t+\gamma_3 e_t, \qquad (7.29)$$

$$Y_{3t}=d_0+\sum_{i=1}^{k}d_i X_{it}+\sum_{i=k+1}^{k+r}d_i Z_{it}+\sum_{i=k+r+1}^{k+r+s}d_i W_{it}+\beta_1 u_t+\beta_2\varepsilon_t+\beta_3 e_t, \qquad (7.30)$$

وهكذا يتضح لنا أن قيم المتغيرات المحددة قيمها مسبقا وقيم الأخطاء العشوائية تحددان، تماما، قيم المتغيرات الداخلية، ويتضمن ذلك أن للمتغيرات المحددة مسبقا وللأخطاء العشوائية سمات مشتركة، فكل منهما لايتحدد بوساطة النموذج، كما أنهما ضروريان لتحديد قيم المتغيرات الداخلية، ولكن، هناك اختلاف رئيسي بينهما حيث إننا نفترض، على العكس من الاخطاء العشوائية، أننا نعرف أو نشاهد قيم المتغيرات المحددة مسبقا كل فترة زمنية. ويعني ذلك أنه إذا توافرت لدينا مشاهدات حول قيم خطأ عشوائي معين فإنه يمكن اعتبار أن هذا الخطأ العشوائي محددة قيمته مسبقا. وبالمقابل، قد يمكننا اعتبار الخطأ العشوائي متغيرا محددا مسبقا غير مشاهد له متوسط صفري وأنه غير مرتبط بالمتغيرات المحددة مسبقا المشاهدة كافة.

وعلى سبيل الخلاصة، نعرض في الشكل (٧-٢) تمثيلا منظما لهيكل العلاقة السببية لمجموعة العلاقات في (7.25) - (7.27). نلاحظ (كما هو موضح بالأسهم) أن المتغيرات المحددة مسبقا والاخطاء العشوائية تؤثر مباشرة في قيم المتغيرات الداخلية ولكنها لاتتأثر، بدورها، بها. وعلى العكس، هناك علاقة متبادلة (أو اعتماد متبادل) بين المتغيرات الداخلية، حيث تعتمد Y_{1t}، مثلا، على كل من Y_{2t} و Y_{3t}، ولكنها تؤثر، أيضا، في كل منهما.



شكل رقم (٧-٢)

طبيعة المتغيرات المحددة مسبقا

تأخذ المتغيرات المحددة مسبقا أحد شكلين، الأول : المتغيرات الخارجية Exogenous variables، وكما أشرنا في مناقشتنا من قبل لنموذج الاستهلاك المبسط (7.1)-(7.2) فإن هذا المتغيرات تحدد قيمها بوساطة قوى خارجة عن النموذج، ويفترض أن قيم المتغيرات الخارجة تعتمد على متغيرات ليست مرتبطة بأي شكل بالمتغيرات الداخلية أو بالأخطاء العشوائية في النموذج. وبمعنى آخر فإن هذه المتغيرات خارج نطاق التحليل.* وببساطة، نأخذ قيمتها كما تعطي لنا بدون آية محاولة لتفسيرها. ومن الأمثلة لأحد المتغيرات التي يمكن أن تعد متغيرا خارجيا في معادلة الاستهلاك حجم الأسرة. هذا المتغير يمكن اعتباره تغذية من النظام الاجتماعي للنموذج الاقتصادي، ويعد هذا المتغير متغيرا مهما في تحديد متغيرات اقتصادية، مثل الاستهلاك ولكن (في الأقل، في الفترة القصيرة) قد لا يتأثر، بدوره، بالمتغيرات الاقتصادية في نموذجنا هذا. وأحد الأمثلة الأخرى للمتغيرات الخارجية قد يكون كمية الامطار السنوية في معادلة لتفسير إنتاج القمح. وفي

* تحديد نطاق التحليل ليست مهمة سهلة، والمشكلة هي أن التحليل الأكثر شمولا يتطلب «مجالا أوسع» ولكن هذا، بدوره، يزيد من تعقيد النموذج.

الحالة الأولى (حجم الأسرة)، قد نفكر في توسيع نطاق التحليل لتفسير المتغير الخارجي، فمثلا قد يعتمد حجم الأسرة على فرص العمل وهلم جرا. وإذا كان الأمر كذلك فإن هذا المتغير لم يعد متغيرا خارجيا. وفي الحالة الثانية، قد تعد كمية الأمطار السنوية خارج نطاق أي توسيع مقبول للتحليل.

والشكل الثاني من المتغيرات المحددة مسبقا هو المتغير الداخلي المبطأ، ففي نموذج الاستهلاك، على سبيل المثال :

$$C_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + u_t, \tag{7.31}$$

$$Y_t = C_t + I_t, \tag{7.32}$$

يمكننا أن نرى أنه، في ظل افتراضاتنا المعتادة، يكون Y_t مرتبطا بالخطأ العشوائي u_t لأننا وجدنا عند حل المعادلات للحصول على Y_t، (كما لوحظ من قبل) أن Y_t تعتمد على u_t :

$$Y_t = \left(\frac{b_0}{1-b_1}\right) + \left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) Y_{t-1} + \left(\frac{1}{1-b_1}\right) I_t + \left(\frac{1}{1-b_1}\right) u_t. \tag{7.33}$$

ولكن ذلك ليس صحيحا بالنسبة لـ Y_{t-1} لأن قيمة Y_{t-1} محددة من الفترة الزمنية السابقة، ولأن قيمتها لايمكن أن تعتمد على C_t و u_t أو قيمة أي متغير آخر في الفترة t. على سبيل المثال، فإنه، عند ابدال t بـ (t-1) في (7.33)، نجد أن Y_{t-1} تعتمد على u_{t-1} وليس u_t.

$$Y_{t-1} = \left(\frac{b_0}{1-b_1}\right) + \left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) Y_{t-2} + \left(\frac{1}{1-b_1}\right) I_{t-1} + \left(\frac{1}{1-b_1}\right) u_{t-1}.$$

ويتضمن هذا أنه، إذا كانت قيمة الخطأ العشوائي u_t تحدد مستقلة في كل فترة زمنية (حتى يكون u_t غير مرتبط ذاتيا)، فإن u_t و Y_{t-1} يجب أن يكونا غير مرتبطين. وباختصار، فإنه، وبسبب أن قيمة Y_{t-1} ليست محددة بوساطة النموذج خلال الفترة t ولأنها غير مرتبطة بالخطأ العشوائي في الزمن t، فإنه يمكننا أن

نصف Y_{t-1} على أنه متغير محدد مسبقا* . وافتراضنا الأساسي بالتغاير الصفري بين المتغرات المحددة مسبقا والأخطاء العشوائية صحيحا لكل المتغيرات الخارجية والمتغيرات الداخلية المبطأة في النموذج.

المعادلات الهيكلية ومعادلات الشكل المختزل

قبل أن نفكر في تعميم طريقتنا في التقدير، نحتاج لتوضيح أخير. تسمى المعادلات الأساسية مثل (7.25)، (7.26) و (7.27) والتي تفسر سلوك المتغيرات الداخلية والتشابك فيما بينها المعادلات الهيكلية Structural equations . هذه هي المعادلات التي تقترحها لنا النظرية الاقتصادية. مثال ذلك أننا في نموذجنا البسيط لتحديد الدخل عرضنا نظاما من معادلتين هيكليتين :

$$C_t = b_0 + b_1 Y_t + u_t . \tag{7.1}$$

$$Y_t = C_t + I_t , \tag{7.2}$$

تتضمن هذه المعادلات الافتراضات النظرية بأن الإنفاق الاستهلاكي يعتمد على الدخل (7.1) وأن الناتج الكلي ينتقل إلى مستوى توازني يتعادل فيه مع الطلب الكلي (7.2). ومرة أخرى، فإن المعادلات الهيكلية هي تعبير اصطلاحي لنموذجنا الاقتصادي الأساسي.

إذا حلت المعادلات الهيكلية للحصول على المتغيرات الداخلية بدلالة المتغيرات المحددة مسبقا والاخطاء العشوائية مثل الموجودة في (7.22) – (7.30) فإنه يطلق على المعادلات الناتجة المعادلات ذات الشكل المختزل Reduced form equations . وتصف

* والاستثناء من ذلك هو الحالة التي تكون فيها الأخطاء العشوائية مرتبطة ذاتيا، وفي مثل هذه الحال، يمكن أن يكون المتغير الداخلي المبطأ مرتبطا بالأخطاء العشوائية في الفترة t في النموذج. وللقارئ المهتم، يناقش ملحق هذا الفصل كيف يمكن تقدير النموذج الذي يعاني مشكلة النظم والأخطاء العشوائية المرتبطة ذاتيا في الوقت نفسه، وقد تجد ذلك مفيدا في التعرف على كيفية تعامل الاقتصاديين القياسيين مع أكثر من مشكلة تقدير واحدة في الوقت نفسه.

هذه المعادلات كيف يحدد المتغير الداخلي بوساطة كل من المتغيرات المحددة مسبقا والأخطاء العشوائية.

وعلى سبيل المثال، إذا قمنا بحل المعادلات الهيكلية (7.1) و (7.2) للحصول على المتغيرين الداخلين فإننا نحصل على :

$$C_t = \frac{b_0}{1-b_1} + \frac{b_1 I_t}{1-b_1} + \frac{u_t}{1-b_1}, \tag{7.34}$$

$$Y_t = \frac{b_0}{1-b_1} + \frac{I_t}{1-b_1} + \frac{u}{1-b_1}. \tag{7.35}$$

ويمكننا إعادة كتابة (7.34) و (7.35) في الشكل :

$$C_t = a_0 + a_1 I_t + q_t, \tag{7.34A}$$

$$Y_t = d_0 + d_1 I_t + q_t, \tag{7.35A}$$

حيث إن $a_0 = d_0 = b_0 / (1-b_1)$ ، $a_1 = b_1 (1-b_1)$ و $d_1 = 1 / (1-b_1)$ وأخيرا $q_t = u_t / (1-b_1)$ ويطلق على المعادلات (7.34A) و (7.35A) أو المعادلات (7.34) و (7.35) معاملات الشكل المختزل لكل من C_t و Y_t على الترتيب. لاحظ أن هذه المعادلات المختزلة يترتب عليها أن كلا من C_t و Y_t يتحددان تماما بوساطة I_t و u_t.

وعلى سبيل مثال آخر، افترض نموذج الأجور - الأسعار التالي :

$$\dot{W}_t = a_1 + b_1 \dot{P}_t + c_1 R_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \tag{7.36}$$

$$\dot{P}_t = a_2 + b_2 \dot{W}_t + b_3 \dot{T}_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \tag{7.37}$$

حيث إن $\dot{W}$ و $\dot{P}$ هي معدل التغير في الأجور النقدية والأسعار الاستهلاكية على الترتيب، R_{t-1} هو معدل البطالة في آخر فترة زمنية، $\dot{T}_{t-1}$ هو معدل التغير في أسعار المواد الأولية في الفترة الزمنية و ε_{1t}, e_{2t} هي الأخطاء العشوائية. المعادلات (7.36) و (7.37) هي المعادلات الهيكلية بالنموذج، فهي تمثل الافتراضات بأن تغيرات الأجور تعتمد على تغيرات الأسعار، وعلى ظروف سوق العمل (كما هي ممثلة بمعدل البطالة في الفترة الزمنية السابقة) بينما تعتمد تغيرات الأسعار، بدورها،

على تغيرات الأجور والتغيرات في التكاليف الأخرى التي تمثلها بالتغيرات في أسعار المواد الأولية خلال الفترة الزمنية السابقة. وتكون المتغيرات الداخلية في النموذج هي $\dot{W}_t$ و $\dot{P}_t$ بينما تكون المتغيرات المحددة مسبقا هي $R_{(t-1)}$ و $\dot{T}_{(t-1)}$. في هذه الحال نجد أن المتغيرات المحددة مسبقا هي متغيرات خارجية مبطأة*، ولاتوجد هناك متغيرات داخلية مبطأة، وأخيرا، إذا حللنا النموذج (7.36) و (7.37) للحصول على كل من $\dot{W}_t$ و $\dot{P}_t$ فإننا نحصل على معادلات الشكل المختزل :

$$\dot{W}_t = d_0 + d_1\dot{T}_{t-1} + d_2 R_{t-1} + d_3\varepsilon_{1t} + d_4\varepsilon_{2t}, \quad (7.38)$$

$$\dot{P}_t = e_0 + e_1\dot{T}_{t-1} + e_2 R_{t-1} + e_3\varepsilon_{1t} + e_4\varepsilon_2, \quad (7.39)$$

حيث :

$$d_0 = \frac{a_1 + b_1 a_2}{1 - b_1 b_2},\ d_1 = \frac{b_1 b_3}{1 - b_1 b_2},\ d_2 = \frac{c_1}{1 - b_1 b_2},\ d_3 = \frac{1}{1 - b_1 b_2},\ d_4 = \frac{b_1}{1 - b_1 b_2},$$

$$e_0 = \frac{a_2 + b_2 a_1}{1 - b_1 b_2},\ e_1 = \frac{b_3}{1 - b_1 b_2},\ e_2 = \frac{b_2 c_1}{1 - b_1 b_2},\ e_3 = \frac{b_3}{1 - b_1 b_2},\ e_4 = \frac{1}{1 - b_1 b_2}.$$

لاحظ أن معادلات الشكل المختزل هي معادلات خطية في كل من المتغيرات المحددة مسبقا وفي الاخطاء العشوائية.

(٧-٤) طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين : تعميم

نظرة عامة

دعنا نعود الآن إلى مشكلتنا في التقدير. افترض أن لدينا مجموعة المعادلات (7.25)-(7.27) ونريد تقدير معاملات المعادلة (7.25) من هذا النموذج :

---

* يعترض بعضهم على «نطاق التحليل الضيق» في (7.36) و (7.37)، أي أن تحليلا كاملا للعلاقات بين الأجور - والأسعار ينبغي أن يتضمن معادلات تفسر معدل البطالة (بمعنى أن معدل البطالة لاينبغي أن يعد متغيراً خارجياً في نموذج يفسر العلاقة بين الأجور والأسعار). ولكن، كما ذكرنا من قبل، فإن تكلفة مثل هذا النموذج الأكثر شمولا ستكون زيادة في درجة تعقيده. ومرة أخرى، فإن تحديد الفاصل الذي يحدد نطاق التحليل يعتمد على تقدير الباحث.

$$Y_{1t} = b_0 + b_1 Y_{2t} + b_2 Y_{3t} + a_1 X_{1t} + \cdots + a_k X_{kt} + u_t, \qquad (7.25)$$

$$Y_{2t} = c_0 + c_1 Y_{3t} + c_2 Y_{1t} + d_1 Z_{1t} + \cdots + d_t Z_{rt} + \varepsilon_t, \qquad (7.26)$$

$$Y_{3t} = g_0 + g_1 Y_{2t} + g_2 Y_{1t} + h_1 W_{1t} + \cdots + h_s W_{st} + e_t, \qquad (7.27)$$

تتكون طريقة م‌ص‌م من الخطوات التالية : أولا، يجري انحدار للمتغيرات الداخلية في النموذج وهي Y_{2t} و Y_{3t} (أي المتغيرات المستقلة المرتبطة بالخطأ العشوائي) على كل المتغيرات المحددة مسبقا في هذا النموذج المكون من المعادلات الثلاث. وبالتحديد، فإننا سنقدر، بوساطة طريقة التقدير المعتادة، المعادلة :

$$\begin{aligned} Y_{2t} = m_0 + m_1 X_{1t} + \cdots + m_k X_{kt} + m_{(k+1)} Z_{1t} + \cdots + m_{(k+r)} Z_{rt} \\ + m_{(k+r+1)} W_{1t} + \cdots + m_{(k+r+s)} W_{st} + \theta_{1t}, \end{aligned} \qquad (7.40)$$

حيث θ_{1t} الخطأ العشوائي*، وبالمثل، سنجري انحدارا لـ Y_{3t} على المجموعة نفسها من المتغيرات المستقلة. ثم نستخدم بعد ذلك هذه المعادلات المقدرة لتحديد القيم المحسوبة $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$. ثانيا، إحلال $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$ محل Y_{2t} و Y_{3t} على الترتيب في المعادلة (7.25). ونضع نجمة على الخطأ العشوائي لتمييزه، وبعد ذلك، نقوم بايجاد المعادلات الطبيعية للمرحلة الثانية وحلها للحصول على مقدراتنا $\hat{b}_0$، $\hat{b}_1$ و $\hat{b}_2$ وايضا $\hat{a}_1$، $\hat{a}_2$، ... و $\hat{a}_k$، ومرة أخرى يتبين لنا أن $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$ هي مقدراتنا للجزء من $Y_{2t}\,Y_{3t}$، على الترتيب، غير المرتبطة بخطأ معادلتنا العشوائي، u_t.

تأطير

لمعرفة ذلك بصورة نظرية أوضح، نلاحظ أنه، طالما أن نموذجنا ذا المعادلات الثلاث خطي فإن الحل (أو معادلة الشكل المختزل) لـ Y_{2t}، مثلا، سوف يكون خطيا في كل من $X_t's$ و $Z_t's$ و $W_t's$، وأيضا، في u_t، ε_t و e_t، ولتبسيط هذه

* كما سنبين فيما بعد، فإن الخطأ العشوائي θ_{1t} هو مجموع موزون للاخطاء العشوائية الثلاث $(\varphi_1 u_t + \varphi_2 \varepsilon_t + \varphi_3 e_t)$ كما هو الحال في المعادلة (7.29).

الرموز، نرمز لمجموع كل الحدود في معادلة الشكل المختزل (انظر (7.25) باستثناء الأخطاء العشوائية كـ Y_{2t}^m أي أن Y_{2t}^m هو توليفة خطية من X's ، Z's و W's .*

$$Y_{2t}^m = m_0 + m_1 X_{1t} + \cdots + m_k X_{kt} + m_{(k+1)} Z_{1t} + \cdots + m_{(k+r)} Z_{rt} + m_{(k+r+1)} W_{1t} + \cdots + m_{(k+r+s)} W_{st} + W_{st}. \tag{7.41}$$

يمكننا الآن أن نعبر عن معادلة الشكل المختـزل لـــ Y_{2t} ببساطة أكثر على النحو:

$$Y_{2t} = Y_{2t}^m + \gamma_1 u_t + \gamma_2 \varepsilon_t + \gamma_3 \varepsilon_t, \tag{7.42}$$

حيث إن $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ثوابت.

لاحظ بعد ذلك أن

$$E(\gamma_1 u_t + \gamma_2 \varepsilon_t + \gamma_3 e_t) = \gamma_1 E(u_t) + \gamma_2 E(\varepsilon_t) + \gamma_3 E(e_t) = 0,$$

طالما أن جميع الاخطاء العشوائية لها متوسطات صفرية، ويدمج كل كل الاخطاء العشوائية الثلاثة في خطأ عشوائي واحد.

$$\theta_{1t} = \gamma_1 u_t + \gamma_2 \varepsilon_t + \gamma_3 e_t. \tag{7.43}$$

عندئذ، يمكننا كتابة (7.42) في الشكل:

$$Y_{2t} = Y_{2t}^m + \theta_{1t}, \tag{7.44}$$

حيث إن $E(\theta_{2t}) = v$، وبالمثل يمكننا أن نثبت أن:

$$Y_{3t} = Y_{3t}^m + \theta_{2t}, \tag{7.45}$$

حيث إن $E(\theta_{2t}) = 0$ و Y_{3t}^m هو توليفة خطية من $X_t's$، $Z_t's$ و $W_t's$ (انظر 7.30). أخيرا، كما فعلنا بالنسبة للحال البسيطة لمتغير مستقل واحد، يمكننا استخـدام كـل مـن (7.44) و (7.45) لإعادة كتابة أولى معادلاتنا الهيكلية (7.25) على النحو:

---

* على سبيل المثال، بالنسبة للنموذج (7.36) و (7.37)

$$\dot{W}_t^m = d_0 + d_1 \dot{T}_{(t+1)} + d R_{(t+1)}$$

حيث إن d_t عرفت (7.38).

$$Y_{1t} = b_0 + b_1 Y_{2t}^m + b_2 Y_{3t}^m + a_1 X_{1t} + \cdots + a_k X_{kt} + q_{1t} \quad (7.46)$$

حيث

$$q_{1t} = u_t + b_1 \theta_{1t} + b_2 \theta_{2t},$$

وهكذا يكون $E(q_{1t}) = 0$.

ينبغي أن يتضح الآن التناظر مع الحال البسيطة. فإذا كان لدينا مشاهدات عن Y_{2t}^m و Y_{3t}^m، عندها، يمكننا، ببساطة، تقدير (7.46) بالطريقة المعتادة. والسبب في ذلك هو أنه طالما Y_{2t}^m و Y_{3t}^m تعتمدان، فقط، على X_t's، Z_t's و W_t's، وطالما أن هذه المتغيرات المحددة مسبقا غير مرتبطة بالأخطاء العشوائية، لذا، فإن كلا من Y_{2t}^m و Y_{3t}^m ينبغي ألا تكون مرتبطة بدورها بالاخطاء العشوائية. وكما في الحال المبسطة، فإننا لانعرف قيم كل من Y_{2t}^m و Y_{3t}^m، ومن ثم، ينبغي أن نقدرها في البداية (بوساطة $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$) قبل أن نواصل التحليل كالمعتاد.

ينبغي أن نشير هنا إلى أن المقدرات التي يحصل عليها باستخدام طريقة (م ص م)، كما في الحال المبسطة ذات المتغيرين، تتصف بالتحيز، عموما، إلا أنها متسقة. نلاحظ، أيضا، أنه، بوجود مقدرات متسقة، قد نتمكن من بناء مقدرات متسقة للخطأ العشوائي، مثلا في (7.25)، من الصيغة التالية:

$$\hat{u}_t = Y_{1t} - (\hat{b}_0 + \hat{b}_1 Y_{2t} + \hat{b}_2 Y_{3t} + \hat{a}_1 X_{1t} + \cdots + \hat{a}_k X_{kt}). \quad (7.47)$$

بعد ذلك، قد نحصل على مقدر متسق لتباين الخطأ العشوائي بوساطة: *

$$\hat{\sigma}_u^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{\hat{u}_t^2}{n-k-3}. \quad (7.48)$$

ندون هنا، بدون اثبات، أن إحلال المتغيرات الداخلية المحسوبة محل نظيراتها في النموذج يؤدي إلى صيغ لتباين مقدرات المعلمات، كما لو أنها نتائج عينات كبيرة، تماما كما لو كان عندنا متغير مستقل واحد. فمثلا، بالرجوع إلى معادلة (7.25) يكون تباين العينة الكبيرة لمقدر $\hat{b}_1$ الناتج عن استخدام طريقة م ص م هو:

* نقسم على (n-k-3) في (7.48) لأنه يوجد (k+3) معلمات في نموذج الانحدار (7.46)

$$\sigma^2_{\hat{b}_1} = \sigma^2_u \left(\frac{1}{\sum \hat{v}_{1t}^2} \right), \tag{7.49}$$

حيث إن $\hat{v}_{1t}$ بواقي انحدار $\hat{Y}_{2t}$ على $\hat{Y}_{3t}$ $X_{1t},\cdots,X_{kt}$. لاحظ مرة أخرى أن $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$ هي متغيرات مستقلة في المرحلة الثانية بمعاملات في b_1 , b_2. وبالمثل نجد أن صيغة التباين في (7.49) تتضمن تباينات u_t وليس الخطأ العشوائي المناظر للمرحلة الثانية للانحدار $\left(u_t^* = u_t + b_1\hat{\theta}_{1t} + b_2\hat{\theta}_{2t}\right)$. أخيرا، فطالما أن σ_u^2 غير معلومة، عادة، فإن المقدر المتسق لتباين $\hat{b}_1$ يكون:

$$\sigma^2_{\hat{b}_1} = \sigma^2_u \left(\frac{1}{\sum \hat{v}_{1t}^2} \right), \tag{7.50}$$

وتوجد صيغ مشابهة لمقدرات المعلمات الأخرى.

وباستخدام هذه الصيغ، يمكننا اختبار الفرضيات وبناء فترات الثقة عن طريق استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب. وعمليا، ينبغي أن ينظر إلى مثل هذه النتائج على أنها نتائج تقريبية طالما أن حجم العينة محدود.

م ص م والمتغيرات المحذوفة

ينبغي علينا هنا توضيح أحد الأمور العملية. ففي (7.25)، تتكون المرحلة الأولى في ظل م ص م من انحدار كل متغير من المتغيرات المستقلة على جميع المتغيرات المحددة مسبقا في النموذج. وقد توجد حالة لاتتوافر فيها البيانات عن جميع هذه المتغيرات. افترض، مثلا، أنه ليست لدينا قيم مشاهدة عن Z_t و W_t من المعادلتين (7.26) و (7.27) على الترتيب. هذا لن يمنعنا، عموما، من استخدام (م ص م) لتقدير (7.25)، حيث تكون المرحلة الأولى في هذه الحالة من انحدار Y_{2t} و Y_{3t} على المتغيرات المتاحة والمحددة مسبقا كافة (أي تلك المتغيرات غير Z_t و W_t في مثالنا). ويمكننا، حينئذ، أن نستخدم معادلات المرحلة الأولى للحصول على $\hat{Y}_{2t}$

و $\hat{Y}_{3t}$ إذا قمنا باحلال $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$ محل Y_{2t} وY_{3t} على الترتيب، كما يمكننا أن نواصل التحليل للمرحلة الثانية بالطريقة السابقة نفسها. وتظل الصيغ والنتائج كافة التي ناقشناها من قبل صحيحة. وهكذا، فقد يمكن استخدام طريقة م ص م مع بيانات أقل من كاملة.

سنقوم الآن بمناقشة أكثر تحليلية لتوضيح لماذا يحدث ذلك. دعنا نهتم أولا بالمناقشة المتعلقة بـY_{2t}. لما كانت البيانات عن Z_t وW_t غير متوفرة، فإن انحدار المرحلة الأولى سيكون مشابها لـ (7.40) باستثناء غياب كل من Z_t وW_t.

$$Y_{2t} = \pi_0 + \pi_1 Y_{1t} + \cdots + \pi_k X_{kt} + \pi_{(k+1)} Z_{2t} + \cdots + \pi_{(k+r+1)} Z_{rt} + \pi_{(k+r)} W_{2t} + \cdots + \pi_{(k+r+s-2)} W_{2t} + \theta_{3t}. \tag{7.51}$$

نوجد $\hat{Y}_{2t}$ من مقدرات المعلمات لهذا النموذج التي حصل عليها عن طريق وضع الفروض التالية:

$$\sum \hat{\theta}_{3t} = 0, \quad \sum(\hat{\theta}_{3t} X_{jt}) = 0, \quad \sum(\hat{\theta}_{3t} Z_{it}) = 0, \quad \sum(\hat{\theta}_{3t} W_{mt}) = 0, \tag{7.52}$$

حيث $j = 1,2,...,k$ ، $i = 2,...,r$ و $m = 2,...,s$، وبوضوح أكثر يكون لدينا:

$$\hat{Y}_{2t} = \hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_1 Y_{1t} + \cdots + \hat{\pi}_k X_{kt} + \hat{\pi}_{(k+1)} Z_{2t} + \cdots + \hat{\pi}_{(k+r+1)} Z_{rt} + \hat{\pi}_{(k+r)} W_{2t} + \cdots + \hat{\pi}_{(k+r+s-2)} W_{2t}. \tag{7.53}$$

وكالعادة، يمكن التعبير عن Y_{2t} على النحو:

$$Y_{2t} = \hat{Y}_{2t} + \hat{\theta}_{3t}, \tag{7.54}$$

حيث تعرف $\hat{\theta}_{3t}$ على أنها $\left(Y_{2t} - \hat{Y}_{2t}\right)$. ومرة أخرى، ولأن $\hat{Y}_{2t}$ تعتمد على $X_{1t}, ..., X_{kt}$ و $Z_{2t}, ..., Z_{rt}$ و $W_{2t}, ..., W_{st}$، فإنه ينتج عن (7.52) أن:

$$\sum(\hat{Y}_{2t} \hat{\theta}_{3t}) = 0. \tag{7.55}$$

يمكننا الحصول على صيغة مناظرة لـ $\hat{Y}_{3t}$ عن طريق انحدار Y_{3t} على المجموعة نفسها من المتغيرات المحددة مسبقا للحصول على Y_{3t}. مع ملاحظة أن:

$$Y_{3t} = \hat{Y}_{3t} + \hat{\theta}_{4t}, \tag{7.56}$$

حيث إن $\theta_{4t} = Y_{3t} - \hat{Y}_{3t}$ سيكون لدينا:

$$\sum(\hat{Y}_{3t}\hat{\theta}_{4t})=0. \tag{7.57}$$

وأخيرا فطالما أن $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$ هما توليفان خطيان لـ X_{1t}، ...، X_{kt} و Z_{2t}، ...، Z_{rt} و $W_{2t}, ..., W_{st}$، فإنه يكون لدينا من (7.52) ومن الشروط المقابلة لـ $\hat{\theta}_{4t}$.

$$\sum(\hat{Y}_{2t}\hat{\theta}_{4t}) = 0 = \sum(\hat{Y}_{3t}\hat{\theta}_{3t}). \tag{7.58}$$

دعنا الآن نعود إلى المعادلة (7.25). بإحلال قيم Y_{2t} و Y_{3t} من معادلتي (7.54)، (7.56) على الترتيب، نحصل على:

$$Y_{1t} = b_0 + b_1\hat{Y}_{2t} + b_2\hat{Y}_{3t} + a_1 X_{1t} + \cdots + a_k X_{kt} + u'_t, \tag{7.59}$$

حيث إن:

$$u'_t = b_1\hat{\theta}_{3t} + b_2\hat{\theta}_{4t} + u_t.$$

وينتج عن (7.52) والشروط الخاصة بـ $\hat{\theta}_{4t}$ أن:

$$\sum u'_t = \sum u_t, \qquad \sum(u'_t\hat{Y}_{2t}) = \sum(u_t\hat{Y}_{2t}), \tag{7.60}$$

$$\sum(u'_t\hat{Y}_{3t}) = \sum(u_t\hat{Y}_{3t}) \qquad \sum(X_{jt}u'_t) = \sum(X_{jt}u_t),$$

حيث إن: $j = 1, ..., k$. أي أن الشروط الموجودة في (7.60) تبين أنه، بهدف التقدير، قد يمكننا معالجة u'_t بالطريقة نفسها التي نعالج بها u_t.

على سبيل المثال، كما في حالة الانحدار البسيط، تبين الشروط (7.60) أنه، لكي نقوم بتقدير (7.59)، فإنه ينبغي أن نضع الشروط التالية:

طالما أن $E(u_t) = 0$ $\qquad \sum\hat{u}'_t = \sum\hat{u}_t = 0$

طالما أن u_t غير مرتبطةبالمتغيرات المحددة $\qquad \sum(\hat{u}'_t\hat{Y}_{2t}) = \sum(\hat{u}_t\hat{Y}_{2t}) = 0$ (7.61)

مسبقا التي يعتمد عليها كل من $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$ $\qquad \sum(\hat{u}'_t\hat{Y}_{3t}) = \sum(\hat{u}_t\hat{Y}_{3t}) = 0$

(طالما أن $E(u_t X_{jt}) = 0$، لكل $(j = 1,2,...,k$ $\sum(\hat{u}'_t X_{jt}) = \sum(\hat{u}_t X_{jt}) = 0$

يمكن إثبات أنه، إذا قدرت معلمات (7.59) عن طريق فرض الشروط (7.61)، فإن طريقتنا المعتادة في التقدير ستؤدي إلى إيجاد مقدرات متسقة.

وباختصار وبمقارنة (7.59) بـ (7.25)، نجد أن كل ماينبغي علينا عمله هو إحلال $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$ محل Y_{2t} و Y_{3t} وتغيير رموز الأخطاء العشوائية ثم إكمال التحليل بالطريقة المعتادة.

وبالصدفة، فهذه السمة تعد من السمات الجيدة لطريقة م ص م. ولتقدير المعادلة موضع الاهتمام، فليس من الضروري القيام بتقدير نظام المعادلات بالكامل، كما أنه ليس ضروريا حتى تحديد ذلك النظام تحديدا كاملا أو الحصول على بيانات كاملة للمعادلات الأخرى في النموذج. وكل ماهو مطلوب هو وجود «مجموعة ملائمة» من المتغيرات المحددة مسبقا من نظام المعادلات يمكن استخدامها في انحدار المتغيرات المستقلة الداخلية (تلك المرتبطة بالخطأ العشوائي). وسنناقش فيما بعد ماذا نعني بالضبط «بالمجموعة الملائمة» من المتغيرات المحددة مسبقا. نشير هنا، فقط، إلى أن المجموعة الملائمة من المتغيرات المحددة مسبقا ينبغي أن تشمل كل المتغيرات المحددة مسبقا التي تظهر في المعادلة الجاري تقديرها. على سبيل المثال، في المعادلة (7.25)، نفترض أن Z_{1t} و W_{1t} ليستا متاحتين لتحديد $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$. وحذفهما مقبول لأن أيا من Z_{1t} و W_{1t} لايظهر في المعادلة الهيكلية (7.25). ولكن إذا لم تستخدم X_{1t} في بناء $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$ فإن الطريقة السابقة لن تؤدي إلى إيجاد مقدرات متسقة. وحتى نرى ذلك، نلاحظ أنه إذا لم تستخدم X_{1t} فلا يمكننا أن نستنتج من (7.52) أن $\Sigma\left(\hat{\theta}_{3t} X_{1t}\right) = 0$ لأنه لم يتم انحدار Y_{2t} على X_{1t}، وفي الحقيقة، فإن هذا المجموع لن يكون صفرا، عموما. في هذه الحال، فإن المعادلة المناظرة لـ X_{1t} في (7.60) لن تكون صحيحة.

$$\sum(u'_t X_{1t}) \neq \sum(u_t X_{1t}).$$

ولن يكون مبررا وضع المجموع المقابل في (7.61) مساويا للصفر.

نلاحظ أخيرا أنه، على الرغم من عدم ضرورة استخدام جميع المتغيرات المحددة مسبقا في النموذج في المرحلة الأولى من طريقة م ص م، إلا أن هناك فائدة من استخدامها جميعا. وعموما، يمكن إثبات أنه كلما زاد عدد المتغيرات المحددة مسبقا المستخدمة في المرحلة الأولى من طريقة م ص م انخفضت تباينات العينة الكبيرة لمقدرات المعاملات التي يحصل عليها في المرحلة الثانية. وعلى الرغم من أن إثبات هذه النتيجة يقع خارج نطاق هذا الكتاب، فإن هذه النتيجة لا ينبغي أن تثير دهشتنا. إن استخدام «معلومات» إضافية في شكل متغيرات محددة مسبقا في المرحلة الأولى ينبغي أن يؤدي إلى تحسين مقدرات المرحلة الثانية. نتجه الآن نحو مشكلة ما الذي يجعل مجموعة معينة من المتغيرات المحددة مسبقا ملائمة؟ ويجاب عن هذا السؤال من خلال مناقشة ما أصبح يعرف بمشكلة التمييز "the identification problem".

(٧-٥) مشكلة التمييز*

ربما نتذكر أننا أوضحنا، عند تقديم م ص م، أن إحدى مزايا هذه الطريقة هي أنه، ما دام في الإمكان تقدير المعادلة، فإن م ص م تعطي مقدرات متسقة للمعاملات. ولكن، قد تنشأ بعض الحالات المرتبطة بنظم المعادلات التي يكون من المستحيل عندها تقدير قيم بعض (أو ربما كل) المعلمات.

مثال (١)

افترض النموذج البسيط التالي لسوق إحدى السلع:

$$Q_t^d = a_0 + a_1 P_t + u_t, \tag{7.62}$$

$$Q_t^s = b_0 + b_1 P_t + \varepsilon_t, \tag{7.63}$$

* ترجع المساهمة الكلاسيكية في هذا الموضوع إلى: Franklin M. Fisher. *The Identification Problem In Econometrics*, (New-York, McGraw-Hill, 1966)، وتستند المناقشة في هذا المبحث جزئياً إلى هذا العمل.

$$Q_t^d = Q_t^s = Q_t. \tag{7.64}$$

يتكون النموذج من ثلاث معادلات: معادلة الطلب (6.62) ومعادلة العرض (6.63) ومعادلة توازنية للسوق (6.64) حيث إن Q_t^d و Q_t^s هما الكمية المطلوبة والكمية المعروضة في الفترة t على الترتيب، P_t: سعر السلعة في الفترة t، u_t و ε_t هما الخطآن العشوائيان المناظران، وكل منها بمتوسط صفر وتباين ثابت، كما أن كلا منهما غير مرتبط ذاتيا وموزع توزيعا معتدلا. تسمح لنا المعادلة (6.69) بجعل كل من Q_t^d و Q_t^s معادلتان للكمية Q_t (وهي الكمية التي يتم تبادلها، فعلا، خلال الفترة t). ويتضمن ذلك أن السعر يتعدل، حتى تتساوي الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة خلال كل فترة زمنية.

افترض أننا نرغب في تقدير المعلمات في معادلة الطلب. نلاحظ أولا أن P_t مرتبطة بـ u_t، لذا، فإن طريقتنا المعتادة في التقدير سوف تعطينا مقدرات غير متسقة للمعاملات. ولنبين ذلك، اجعل الجانب الأيمن من المعادلة (7.62) يتساوى مع الجانب الأيمن من المعادلة (7.63) لنحصل على:

$$a_0 + a_1 P_t + u_t = b_0 + b_1 P_t + \varepsilon_t. \tag{7.65}$$

وبحل (7.65) للحصول على P_t، نحصل على معادلة الشكل المختزل لـ P_t:

$$P_t = \frac{(b_0 - a_0)}{(a_1 - b_1)} + \frac{\varepsilon_t}{(a_1 - b_1)} - \frac{u_t}{(a_1 - b_1)}. \tag{7.66}$$

وبضرب (7.66) في u_t، وأخذ القيمة المتوقعة نحصل على:

$$E(P_t u_t) = E\left[\frac{(b_0 - a_0)u_t}{(a_1 - b_1)} + \frac{\varepsilon_t u_t}{(a_1 - b_1)} - \frac{u_t^2}{(a_1 - b_1)}\right]$$

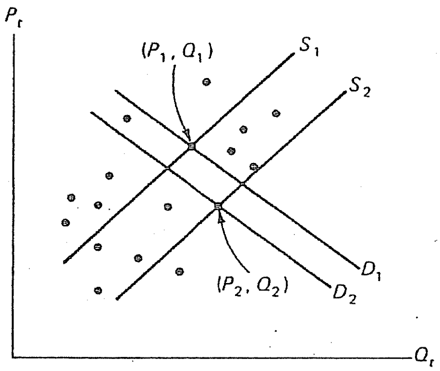
$$= \frac{(b_0 - a_0)}{(a_1 - b_1)} E(u_t) + \frac{E(\varepsilon_t u_t)}{(a_1 - b_1)} - \frac{E(u_t^2)}{(a_1 - b_1)} \tag{7.67}$$

$$= 0 + \frac{\mathrm{cov}(\varepsilon_t, u_t)}{(a_1 - b_1)} - \frac{\sigma_u^2}{(a_1 - b_1)}.$$

طالما أنه لايوجد سبب لتوقع أن تغاير(ε_t, u_t) وتباين $u_t(\sigma_u^2)$ متساويان فإنه يمكننا أن نفترض، عموما، أن:

$$E(P_t u_t) = \text{cov}(P_t, u_t) \neq 0. \tag{7.68}$$

وطالما أن (7.68) ليست، عموما، مساوية للصفر، فإن ذلك يعني أن المتغير المستقل P_t مرتبط بـــu_t، ولذا، تكون لدينا مشكلة نظم المعادلات الآنيــة. ولحـل المشكلة، افترض أننا نحاول تقدير (7.62) بوساطة م ص م. تتكون المرحلة الأولى، كما نذكر، من انحدار المتغير المستقل الداخلي (وهو هنا P_t) على جميع المتغيرات المحددة مسبقا في النموذج. ولكن لمحة سريعة إلى نموذجنا ذي المعادلات الثلاث تبين عدم وجود متغيرات محددة مسبقا*، ذلك أن معادلةP_t ذات الشكل المختزل (أي معادلة 7.66) لاتحتوي على متغيرات محددة سلفا في جانبها الأيمن، ومن ثم، لايمكننا هنا استخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين.

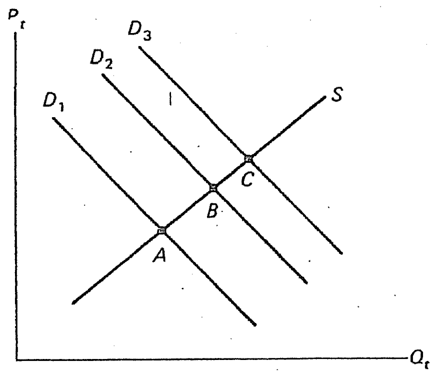


شكل رقم (٧-٣)

* في الحقيقة (وكما سنناقش فيمابعد)، يمكن اعتبار الحد الثابت متغيراً محدد مسبقاً. فإذا كان الأمر كذلك فإن معادلة P_t ذات الشكل المختزل (7.66) سوف تحتوي على متغير محدد مسبقاً. ولكن، (كما سنرى) فإننا سنظل غير قادرين على تقدير معادلة الطلب.

في هذه الحال، فإن معادلة الطلب (وأيضا، معادلة العرض) غير مميزة، بمعنى عدم إمكانية تقدير معلماتها. لاحظ أن مشكلة التمييز ليست مشكلة بيانات، لأنه مهما توافر لنا من بيانات حول السعر والكمية فإننا لن نكون قادرين على تقدير معاملات أي من معادلتي الطلب أو العرض. إن مشكلة التمييز هي مشكلة تحديد للنموذج، حيث إن هيكل النموذج وطبيعة المعلومات المتاحة هما اللذان يحولان دون إمكانية التقدير.

من المفيد هنا أن نعرض لمقولة بديهية ندعم بها صحة هذه النتيجة في الشكل (٧-٣)، يوجد لدينا شكل انتشار يحتوي على مشاهدات عن السعر والكمية عند نقاط زمنية مختلفة. وتمثل هذه النقاط المعلومات المتاحة التي ينبغي أن نستخدمها لتقدير منحنيات الطلب والعرض. والمشكلة التي نواجهها هي أن كل نقطة في الشكل تحدد بوساطة كلا المنحنيين الطلب والعرض. أي أن جداول الطلب والعرض تنتقل من فترة لأخرى (بسبب تغيرات ε_t و u_t) وينتج عن ذلك تغير في كل من السعر والكمية في السوق على مدى الزمن. ويتضح ذلك في الشكل (٧-٣) بوساطة مجموعتي منحنيات الطلب والعرض في الفترتين الزمنيتين الأولى والثانية اللتين تحددان معا Q_1, P_1 و Q_2, P_2. ومايلاحظ هو مجموعة نقاط منتشرة لتلك المجموعة في الشكل. ولكن لاتوجد نقاط، في علمنا، نتجت عن تغير في الطلب، فقط. فإذا ماتوافرت مثل هذه النقاط فإنه يمكننا استخدام هذه النقاط لتقدير معاملات منحنى العرض. فعلى سبيل المثال، إذا علمنا في الشكل (٧-٤) أن النقاط C, B, A، قد أمكن الحصول عليها بوساطة ثلاثة منحنيات للطلب تتحرك على منحنى العرض نفسه، فإنه يمكننا، حدسيا، أن نستخدم هذه النقاط الثلاث لتقدير معلمات الميل والجزء الثابت من منحنى العرض. ولكن، في الشكل (٧-٣)، طالما أنه لاتوجد لدينا طريقة يمكن بها أن نفصل بها تلك النقاط الناتجة عن تغير الطلب، فقط، فإننا غير قادرين على تقدير منحنى العرض. ولما كان المنطق نفسه يمكن أن يطبق على منحنى الطلب فلن تكون هناك طريقة في الشكل (٧-٣) يمكن أن «نميز» بها أيا من منحنى الطلب أو العرض.



شكل (٧-٤)

مثال (٢)

افترض نموذج العرض - الطلب المعدل التالي:

$$Q_t^d = a_0 + a_1 P_t + a_2 P_{t-1} + u_t, \tag{7.69}$$

$$Q_t^s = b_0 + b_1 P_t + b_2 P_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{7.70}$$

$$Q_t^d = Q_t^s = Q_t. \tag{7.71}$$

يشبه هذا النموذج (7.69) - (7.71) نموذجنا السابق للطلب والعرض باستثناء وحيد، وهو أن المتغير السعري المبطأ يظهر في كل من معادلتي الطلب والعرض.* وطالما أنه قد افترض أن الأخطاء العشوائية غير مرتبطة بـ P_{t-1}، فإنها لن تكو ن مرتبطة كذلك بأي من u_t أو ε_t، ولذا، قد يمكن اعتبارها متغيرا محددا مسبقا. ولكن متغير السعر الحالي، P_t، يرتبط بكل من u_t أو ε_t ولذلك، ينبغي أن نستخدم طريقة معدلة لتقدير معادلات الطلب والعرض.

* قد يشير وجود P_{t-1} إلى أن سلوك المشترين والبائعين يعتمد، تقريبا، على العادات أو المعلومات الماضية، أو بطريقة أخرى، فإن الأسعار المتوقعة في المستقبل تؤثر على القرارات التي تعتمد، بدورها، على تأثير كل من P_t و P_{t-1} في التوقعات.

افترض أننا نحاول استخدام طريقة م ص م لتقدير معلمات معادلة الطلب. ينبغي علينا أولا أن نكون انحدارا لـP_t على جميع المتغيرات المحددة مسبقا في النموذج، في حالتنا هذهP_{t-1}، ثم نوجد القيمة المحسوبة لـ P_t، مثلا:

$$\hat{P}_t = \hat{c}_0 + \hat{c}_1 P_{t-1}. \qquad (7.72)$$

بعدئذ نحل $\hat{P}_t$ محل P_t في (7.69) وفي المرحلة الثانية في تقدير المعادلة:

$$Q_t^d = a_0 + a_1 \hat{P}_t + a_2 P_{t-1} + u_t^*, \qquad (7.73)$$

حيث تكون الكمية المطلوبة هي$Q_t^d = Q_t$. ولكن، في ضوء (7.72) يتعطل منهجنا في التقدير مرة أخرى، لأن قيم$\hat{P}_t$ستكون مرتبطة ارتباطا خطيا تاما معP_{t-1}. هذه هي حالة الارتباط الخطي المتعدد التام التي لن تسمح لنا بإيجاد مقدرات منفصلة لكل من a_0، a_1 وa_2. وتظل معادلتنا للطلب والعرض غير مميزتين.

مثال (٣)

دعنا نستكشف شكلا ثالثا لنموذجنا للعرض والطلب:

$$Q_t^d = a_0 + a_1 P_t + a_2 Y_t + u_t, \qquad (7.74)$$

$$Q_t^s = b_0 + b_1 P_t + \varepsilon_t, \qquad (7.75)$$

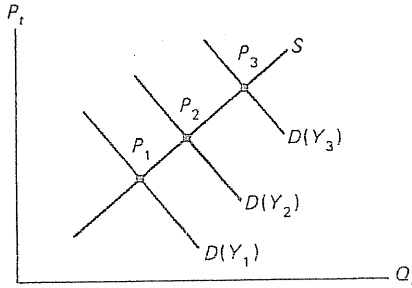
$$Q_t^d = Q_t^s = Q_t. \qquad (7.76)$$

يشبه هذا النموذج نموذجنا الأصلي مع استثناء وحيد وهو إضافة متغير جديد يظهر في معادلة الطلب هو مستوى الدخل(Y_t). سنفترض، من أجل هذا المثال استقلالY_t عن كل منu_t وε_t. دعنا نرى إذا كان من الممكن في هذه الحالة تقدير أي من دالتي الطلب أو العرض. إذا اخذنا معادلة الطلب (7.74) أولا، وجدنا أنه، بالإضافة إلى الحد الثابت، يوجد متغير واحد محدد مسبقا في النموذج هو(Y_t). لذلك، نعمل انحدارا لـP_t علىY_t للحصول على $\hat{P}_t$ (مثلا: $\hat{P}_t = \hat{h}_0 + \hat{h}_1 Y_t$) وبإحلال $\hat{P}_t$ محلP_t في معادلة الطلب (7.74) نجد كما في الحالة السابقة أنه لايمكننا الحصول على مقدرات لكل من a_0، a_1 و a_2 لأن لدينا مرة أخرى مشكلة الارتباط المتعدد الخطي

التام. إلا أنه يمكننا تقدير المعاملات في معادلة العرض (7.75). أي أنه إذا أحلت $\hat{P}_t$ محل P_t في (7.75) فإنه يمكننا أن نستمر ونكمل طريقة م‌ص‌م، لأننا لانواجه مشكلة تعدد علاقات خطية. ونجد أنه يمكننا الحصول على مقدرات متسقة لـb_0 وb_1 عن طريق إجراء انحدار لـQ_t على $\hat{P}_t$. ويمكننا، في هذه الحال، تقدير معاملات معادلة العرض ولكن لايمكننا ذلك بالنسبة لمعادلة الطلب.

يمكن أن يعطي تبرير أو توضيح بياني لهذه النتيجة. سيكون لدينا، مرة أخرى، شكل انتشار بينP_t وQ_t مشابه للشكل (٧-٣). ولكن، لدينا الآن معلومات إضافية مرتبطة بفصل هذه النقاط الناتجة عن تغير في الطلب فقط. ونرى، على وجه خاص، من تحديد معادلاتنا أن منحنيات الطلب والعرض تنتقل عندما تتغير الاخطاء العشوائيةε_t وu_t. ولكن، إضافة إلى هذا الأثر للأخطاء العشوائية، فإن منحنى الطلب، وليس منحنى العرض، سوف ينتقل إذا ماتغيرY_t. ويتضمن هذا، بالنسبة لشكل الانتشار، أنه إذا أمكن جعل الاخطاء العشوائية ثابتة عند الصفر، فإننا سنلاحظ مجموعة من النقاط تناظر القيم المختلفة لـY_t. وستمكننا هذه من تتبع منحنى العرض. وتظهر هذه الحالة في الشكل (٧-٥)، يمكننا في هذه الحالة أن نقدر منحنى العرض، إذا استطعنا الاعتماد على حقيقة أن الأخطاء العشوائية ليست مساوية للصفر، ولكنها تأخذ قيما مختلفة من فترة لأخرى. هذا التغير في الخطأ العشوائي قد أخذ في الحسبان، حدسيا، بوساطة افتراضنا بأن الاخطاء العشوائية مستقلة، وبالتالي غير مرتبطة بمستوى الدخل. ويمكننا هذا الشرط وافتراض أن الاخطاء العشوائية لها وسط حسابي مساو للصفر من توزيع "average out" تأثير تلك الأخطاء العشوائية عن طريق استخدام طرقنا المعتادة في التقدير. وبالمقابل، فإن المنحنيات في الشكل (٧-٥) يمكن النظر إليها على أنها منحنيات متوسطة تناظر كل مستوى من مستويات الدخل.

أي أنه بالنسبة لأي قيمة من قيمY_t تكون$E(u_t) = E(\varepsilon_t) = 0$، لذلك، فإن التأثير المتوسط للأخطاء العشوائية على موقع المنحنيات في الشكل (٧-٥) تكون صفرا. لاحظ، مع ذلك، عدم وجود مناقشة مماثلة تفيد إمكانية تقدير منحنى الطلب



شكل رقم (٧-٥)

لعدم وجود متغير في معادلة العرض يمكن (استنادا إلى عدم ظهوره في معادلة الطلب) أن يوجد انتقالات في منحنى العرض على مدى منحنى الطلب. في هذه الحالة الثالثة تكون معادلة العرض مميزة ولكن معادلة الطلب غير مميزة.

عرض أكثر عمومية

ستعرض الآن لبعض الأمثلة الأكثر عمومية. افترض أن المعادلة الهيكلية الأولى في نظام من المعادلات الآنية هي:

$$Y_{1t} = b_0 + b_1 X_{1t} + b_2 Y_{2t} + b_3 Y_{3t} + b_3 Y_{3t} + \varepsilon_t \,, \qquad (7.77)$$

حيث Y_{1t}، Y_{2t} وY_{3t} متغيرات داخلية، X_{1t} متغير محدد مسبقا، وأن الخطأ العشوائي يحقق الافتراضات التقليدية كافة. افترض، أيضا، أن نظام المعادلات الذي تنتمي إليه هذه المعادلة يحتوي على متغير إضافي واحد محدد مسبقا، مثلا، X_{2t}. في هذه الحالة لتقدير (7.77) سوف نستخدم منهج م‌ص‌م وذلك طالما أنه يتوقع أن تكون كل من Y_{2t} وY_{3t} مرتبطة بـ ε_t بانحدار Y_{2t} وY_{3t} على X_{1t} وX_{2t} نحصل على $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$.

$$\hat{Y}_{2t} = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 X_{1t} + \hat{\gamma}_2 X_{2t} \,, \qquad (7.78)$$

$$\hat{Y}_{3t} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_{1t} + \hat{\alpha}_2 X_{2t} . \quad (7.79)$$

فإذا عوضنا من (7.78) و (7.79) في المعادلـة (7.77) فإن نموذج الانحدار للمرحلة الثانية يأخذ الشكل:

$$Y_{1t} = b_0 + b_1 X_{1t} + b_2 \hat{Y}_{2t} + b_3 \hat{Y}_{3t} + \varepsilon_t^* . \quad (7.80)$$

حيث ε_t^m هو الخطأ العشوائي الجديد لنموذجنا. سنحاول الآن أن نقدر (7.80)بالطريقة المعتادة. ولكن طريقتنا في التقدير ستفشل مرة ثانية لوجود الارتبـاط الخـطـي المتعدد التام بين المتغيرات المستقلة. ولتوضيح ذلك، نضرب المعادلة (7.78) بـ $\hat{\alpha}_2$ والمعادلة (7.79) بـ$\hat{\gamma}_2$ ثم نطرح الأخيرة من السابقة لها للتخلص منX_{2t} والحصول على:

$$\hat{Y}_{2t} \hat{a}_2 = \hat{Y}_{3t} \hat{\gamma}_2 = (\hat{\alpha}_2 \hat{\gamma}_0 - \hat{\alpha}_0 \hat{\gamma}_2) + (\hat{\gamma}_1 \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1 \hat{\gamma}_2) X_{1t} . \quad (7.81)$$

حيث تشير المعادلة (7.81) إلى وجود علاقة خطية تامة بين قيم$\hat{Y}_{2t}$ ، $\hat{Y}_{3t}$ وX_{1t}. وينتج عن ذلك أن إحدى معادلاتنا الطبيعية لن تكون مستقلة خطيا عن المعادلات الأخرى ومن ثم، لن يكون من الممكن تقدير معلمات (7.80).

يمكننا أن نتفهم هذه النتيجة من خلال تفحص المعادلات الطبيعية المناظـرة (7.80). نحصل على المعادلتين الطبيعيتين الأوليـين عـن طـريـق وضـع$\Sigma\hat{\varepsilon}_t^* = 0$ و$\Sigma\hat{Y}_{3t}\hat{\varepsilon}_t^* = 0$. وتكون المعادلة الطبيعية الثالـثـة (والتي نحصل عليها عن طريـق وضع$\Sigma\left(\hat{\varepsilon}_t^*\hat{Y}_{3t}\right) = 0$ مستقلة عن المعادلتين الأوليـين لأنY_{2t} تعتمد علىX_{2t} [انظر إلى (7.78)]. فإذا لم تكن هذه المعادلة الأخيرة مستقلة عن المعادلتين السابقتين فإنها ستكون مساوية لــ $\hat{\gamma}_0$ مضروبة في المعادلة الأولى مضافا إليهـا$\hat{\gamma}_1$ مضروبة فـي الثانية. بمعنى آخر فإنX_{2t} «تفصل» المعادلة الطبيعية الثالثة عن المعادلتين الأوليين. ولكن المشكلة تتعقد عندما نتجه إلى المعادلة الطبيعية الرابعة التي نحصل عليها عن طريق وضع$\Sigma\hat{Y}_{3t}\hat{\varepsilon}_t^* = 0$. فكوننا استخدمنـاX_{2t} لعزل المعادلة الثالثة عن المعادلتين الأولين. فهل من الممكن استخدامها مرة أخرى لفصل المعادلة الرابعة عن الثلاثة الأول، وكما رأينا، فإن الإجابة هي بالنفي، لأن قيم$\hat{Y}_{3t}$ مرتبطة ارتباطا خطيا تاما

بقيم X_{1t} و $\hat{Y}_{2t}$.* ويمكن أن نتخيل أن كل معادلة خطية طبيعية مستقلة تتطلب معلومات جديدة – في صورة متغير جديد !! وطالما أنه لم يبق أي منها فإن معلومات (7.80) أو (7.77) ليست مميزة بسبب الحاجة إلى معادلة طبيعية رابعة مستقلة.**

افترض أن نظام المعادلات الذي يحتوي على (7.77) يشتمل على متغيرين إضافيين محددين مسبقا (X_{2t} و X_{3t} مثلا). حينئذ فإن المرحلة الأولى سوف تشتمل (7.78) و (7.79) على متغير مستقل إضافي X_{3t}. فإذا حذفنا، كما سبق، X_{2t} من معادلات المرحلة الأولى فسوف يكون لدينا معادلة خطية تربط بين كل من $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$ ، X_{1t} و X_{3t}. وبسبب هذا الحد X_{3t}، لن تكون $\hat{Y}_{3t}$ توليفة خطية تامة من X_{1t} و $\hat{Y}_{2t}$. في هذه الحال، لن يكون لدينا تعدد علاقات خطية تاما في المرحلة الثانية لطريقتنا م ص م. وستصبح المعادلة (7.77) مميزة (معرفة) الآن. ومن الواضح أن هذه النتيجة سوف تظل صحيحة إذا كان هناك أكثر من متغيرين إضافيين محددين مسبقا يظهران في نظام المعادلات الذي تكون معادلة (7.77) إحدى معادلاته. أي أن معادلتنا موضع السؤال ستكون مميزة إذا كان عدد المتغيرات الإضافية المحددة مسبقا [أو تلك التي لاتظهر في المعادلة (7.77)] أكبر من اثنين أو تساوي اثنين، وهو عدد المتغيرات المستقلة الداخلية.

---

* ينبغي أن تكون قادرا على استخدام (7.81) في إثبات أن المعادلة الطبيعية الرابعة سوف تساوي $\hat{\gamma}_2/(\hat{\alpha}_0\hat{\gamma}_2-\hat{\alpha}_2\hat{\gamma}_0)$ مضروبة في الأولى، مضافاً إليها $\hat{\gamma}_2/(\hat{\alpha}_1\hat{\gamma}_2-\hat{\alpha}_2\hat{\gamma}_1)$ مضروبة في الثانية مضافاً إليها $\hat{\alpha}_2/\hat{\gamma}_2$ مضروبة في الثالثة.

** مثال أكثر سهولة لهذه الحالة في النموذج:

$$Y_{1t}=b_0+b_1Y_{2t}+b_3Y_{3t}+u_t,$$

حيث إن Y_{2t} و Y_{3t} هي متغيرات داخلية، ويوجد متغير واحد محدد مسبقا، فقط، (مثلا) في بقية نظام المعادلات. في هذه الحال، ستؤدي انحداراتنا للمرحلة الأولى والحسابات إلى إيجاد قيم لـ $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$. ولكي قيم كل من $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3t}$ ستكون مركباتها خطية تامة لـ، وستكون مترابطة ترابطا كاملا مع بعضها البعض. ومن الواضح أن طريقتنا في التقدير ستفشل بسبب الارتباط الخطي المتعدد التام بين المتغيرات المستقلة.

نقطة أخيرة ينبغي أن نذكرها وهي أن المعادلة الطبيعية الأولى التي حصلنا عليها عن طريق وضع $\Sigma\varepsilon_t^* = 0$ يمكن أن نتخيل أنها تناظر الحد الثابت.* وبالمقابل، يمكننا أن نفكر في الحد الثابت كمتغير محدد مسبقا. وهكذا، نجد في مثالنا التالي أنه، إذا كانت المعادلة التي نقوم نقدرها لا تحتوي على حد ثابت، ولكن واحدة أو أكثر من المعادلات الأخرى في النموذج تحتوي عليه، فيمكننا أن نعد الحد الثابت واحدا من المتغيرات المحددة مسبقا في نظام المعادلات التي لا تظهر في معادلتنا التي نقدرها.

افترض، على سبيل المثال، النموذج التالي ذا المعادلتين:

$$Y_{1t} = b_1 Y_{2t} + b_2 X_t + \varepsilon_{1t}, \qquad (7.82)$$

$$Y_{2t} = \alpha_1 + \alpha_2 Y_{1t} + \varepsilon_{2t}, \qquad (7.83)$$

حيث إن X_t متغير محدد سلفا وإن ε_{1t} وε_{2t} اخطاء عشوائية تحقق افتراضاتنا الأساسية كافة. عند اللمحة الأولى للنموذج، يشك القارئ أننا لن نكون قادرين على تطبيق م ص م على المعادلة (7.82)، طالما أنه يتوافر لدينا متغير واحد محدد مسبقا X_t في نظام المعادلات وأن ذلك المتغير يظهر في المعادلة التي نريد تقديرها. ولكننا نجد أنه، بسبب استبعاد «الحد الثابت» من المعادلة (7.82)، يمكننا تطبيق م ص م لتقدير (7.82) لأن الحد الثابت المستبعد يزودنا بالمتغير الاضافي المحدد سلفا والذي نحتاج إليه. فيمكننا، مثلا، من المرحلة الأولى لمنهج م ص م أن نحصل على:

$$\hat{Y}_{2t} = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 X_t. \qquad (7.84)$$

يتضمن الشرط (7.84) أن هناك ثلاث معادلات طبيعية يمكن الحصول عليها بوساطة وضع الفروض التالية

$$N_1 : \sum \hat{\varepsilon}_{1t}^* = 0, \qquad N_2 : \sum (\hat{\varepsilon}_{1t}^* \hat{Y}_{2t}) = 0, \qquad N_3 : \sum (\hat{\varepsilon}_{1t}^* X_t) = 0, \qquad (7.85)$$

* فمثلا، يمكن التعبير عن المعادلة (7.80) على النحو التالي:

$$Y_{1t} = b_0 X_{0t} + b_1 X_{1t} + b_2 \hat{Y}_{2t} + b_3 \hat{Y}_{3t} + \varepsilon_t^*,$$

حيث إن X_{0t} تساوي الواحد الصحيح في كل فترة زمنية $(X_{0t}=1)$ لكل t. وهكذا، فإن الشرط $\Sigma\hat{\varepsilon}_t^* = 0$ يمكن أن نفكر بأنه $\Sigma\left(\hat{\varepsilon}_t^* X_{0t}\right) = 0$.

معادلتان، فقط، من هذه المعادلات الثلاث ستكونان مستقلتين، ويمكن طالما أن (7.82) لاتحتوي على الحدث الثابت أن نحتاج، فقط، إلى معادلتين طبيعيتين، وسوف نأخذ، ببساطة، المعادلات المتناظرة لكل من N_2 و N_3 في (7.85) لأن هذه الشروط تناظر المتغيرات المستقلة في المعادلة (7.82).

بيان عام*

استعانة بما ذكرناه في المبحث السابق دعنا نحاول الآن الوصول إلى قاعدة عامة للحصول على مقدرات متسقة باستخدام م ص م: نلاحظ أنه لكي تستخدم م ص م للحصول على مقدرات متسقة للمعلمات في معادلة الانحدار فلابد أن لايتجاوز عدد المتغيرات الداخلية المستقلة في المعادلة المراد تقديرها عدد المتغيرات المحددة مسبقا التي تظهر في النموذج ككل ولاتظهر في المعادلة المراد تقديرها. وبالمقابل، وعموما، تكون معادلة معينة في النموذج مميزة (ويمكن تقديرها باتساق) إذا كانت $K_2 \geq K_1$، حيث K_2 هي عدد المتغيرات المحددة مسبقا في النموذج والمستبعدة من المعادلة المعطاة، K_1 هي عدد المتغيرات الداخلية التي تظهر باعتبارها متغيرات مستقلة في تلك المعادلة.**

بالعودة إلى الأمثلة السابقة، نجد أنه في نموذجنا المبسط لتحديد الدخل، نستطيع أن نقدر معادلة الاستهلاك لأنه يوجد لدينا متغير داخلي واحد بوصفه متغيرا مستقلا Y_t ومتغير واحد محدد مسبقا I_t يوجد في النموذج ولا يظهر في

* تظل هذه القاعدة العامة المعطاة صحيحة في مجال تحليلنا. على سبيل المثال، لم نهتم بالحالات التي يكون فيها الباحث عالما بقيم تباينات معينة وعلاقات بين معلمات محددة. . إلخ. ولكن من الإنصاف القول إن التحليل الذي عرضناه هنا هو الذي نواجهه في التطبيق في أغلب الحالات.

** ينبغي علينا أن نستخدم التعبير «عموماً» لأن هذه الشروط في الواقع، شروط ضرورية، ولكنها غير كافية لتمييز المعادلة، انظر: Arthur S. Goldberger, *Econometric Theory* (New York, Wiley, 1964), pp. 306-329. ومناقشة هذه الشروط الكافية خارج نطاق هذا الكتاب. ولكن، من الناحية التطبيقية، فإن الشروط التي ناقشناها هنا هي الشروط التي نهتم بها عامة عند التطبيق.

معادلة الاستهلاك. ولم نكن قادرين على تقدير أي من معادلتي الطلب أو العرض في النموذجين الأول والثاني من نماذج الطلب والعرض لأنه، في هاتين الحالتين، كان لدينا متغير مستقل واحد ولكن لم توجد متغيرات محددة مسبقا مستبعدة. وأخيرا، في نموذجنا الثالث للطلب والعرض، كانت معادلة العرض مميزة بحكم أن المتغير الداخلي المستقل الواحد في معادلة العرض P_t قد قابله متغير محدد مسبقا Y_t يظهر، فقط، في معادلة الطلب. ولكن، لا توجد متغيرات محددة مسبقا مستبعدة من دالة الطلب، ولذلك وجدنا أنفسنا غير قادرين على تقدير تلك المعادلة.

ومنطق هذه القاعدة ينبغي أن يكون واضحا من الأمثلة السابقة التي تعرضنا لها. فحينما لايوجد عدد كاف من المتغيرات المحددة مسبقا والمستبعدة من المعادلة تتوقف طريقة م‌ص‌م للتقدير بسبب الارتباط الخطي المتعدد التام في المرحلة الثانية. دعنا نؤكد في الخلاصة أن هذه لاتمثل نقصا أو عيبا في طريقة م‌ص‌م على وجه التحديد، فطرق التقدير الأخرى، أيضا، غير قادرة على تزويدنا بمقدرات متسقة للمعادلات غير المميزة. إنه هيكل النموذج ذاته وطبيعة المعلومات المتاحة التي تمنع تفكيك التداخلات بين المتغيرات.

(٧-٦) تقدير م‌ص‌م: مثالان

حتى نعتاد على استخدام طريقة م‌ص‌م، نختتم هذا الفصل بعرض مثالين، يتضمن المثال الأول منهما تقدير منحنى طلب افتراضي على سلعة معينة. وسوف يسمح لنا هذا المثال بتتبع خطوات هذه الطريقة، بينما حصلنا على المثال الثاني من دراسة تطبيقية فعلية من إحدى الدوريات الاقتصادية الحديثة حول المالية العامة للمجالس المحلية.

نموذج للطلب والعرض

افترض أنه يوجد لدينا نموذج مبسط لسوق إحدى السلع الزراعية (الخرشوف، مثلا):

$$Q_t^d = b_0 + b_1 P_t + b_2 Y_t + u_t, \tag{7.86}$$

$$Q_t^s = a_0 + a_1 P_{t-1} + a_2 W_t + \varepsilon_t, \tag{7.87}$$

$$Q_t^d = Q_t^s = Q_t. \tag{7.88}$$

تشير المعادلة (7.86)، معادلة الطلب إلى أن الكمية المطلوبة في الفترة t تعتمد على السعر P_t والدخل Y_t. بينما تبين معادلة العرض (7.87) أن إنتاج الخرشوف يعتمد على P_{t-1}، سعر الفترة الزمنية السابقة، أي الفترة الذي يتخذ فيها القرار بالزراعة، وعلى الطقس W_t. سنستخدم الأمطار مقاسة بالبوصات مقياسا لأحوال الطقس. أخيرا، تتضمن المعادلة (7.88) وهي المعادلة التوازنية لسوق الخرشوف، أن السعر في الزمن t يتعدل ليساوي الكمية المطلوبة بالكمية المعروضة.

دعنا نفترض أن كلا من Y_t وW_t تتحدد بوساطة قوى خارج نطاق النموذج أي أنها متغيرات خارجية. افترض، أيضا، أن الأخطاء العشوائية لها متوسطات صفرية، وتباينات ثابتة، وأنها موزعة توزيعا طبيعيا، ولاتعاني من الارتباط الذاتي وأنها، أخيرا، مستقلة عن المتغيرات المحددة مسبقا. افترض أننا نرغب في تقدير المعاملات في معادلة الطلب على الخرشوف. نلاحظ أولا أن واحدا من المتغيرات المستقلة، P_t، هو متغير داخلي يتوقع أن يكون مرتبطا بالأخطاء العشوائية في النموذج. ولما كان استخدام طريقة المربعات الصغرى المعتادة سينجم عنها مقدرات غير متسقة للمعاملات، فإننا سنستخدم م ص م لتقدير (7.88). نلاحظ ثانيا أن معادلة الطلب مميزة، أي أنها تحتوي على متغير داخلي مستقل واحد، ولكن يوجد متغيران محددان مسبقا P_{t-1} وW_t يظهران في النموذج ولايظهران في معادلة الطلب نفسها. وبافتراض توافر بيانات حول هذه المتغيرات، فسيكون بالإمكان تقدير دالة الطلب باستخدام م ص م.

وقد جمعنا مجموعة من البيانات الافتراضية لمتغيرات النموذج التي تظهر في الجدول (٧-١). لاحظ وجود عشر مشاهدات، فقط، تكاد تكفي لتبرير استخدام منهج صحيح للحصول على نتائج للعينات الكبيرة. ونؤكد هنا على أن هدف هذا المثال، ببساطة، هو توضيح خطوات طريقة تقدير م ص م مع بعض الأرقام الفعلية.

أولى عملياتنا هي إجراء انحدار للمتغير المستقل في معادلة الطلب (أي P_t) على جميع المتغيرات المحددة مسبقا في النموذج. فبالإضافة إلى الحد الثابت، توجد ثلاث متغيرات محددة مسبقا: اثنان منها من المتغيرات الخارجية (Y_t, W_t) ومتغير داخلي مبطأ واحد (P_{t-1}). ولذا، فإن معادلة الانحدار المقدرة هي:

$$\hat{P}_t = -8.60 + 3.75\,Y_t - 0.22W_t + 0.42P_{t-1}. \qquad (7.89)$$

نستخدم الآن (7.89) لحساب مجموعة «مصححة» من القيم لـP_t، أي أننا نعوض عن قيم P_{t-1}, W_t, Y_t في المعادلة (7.89) ونحسب القيمة المناظرة لـP_t في كل فترة زمنية ($t = 1,...,10$). تظهر هذه السلسلة من القيم المحسوبة لمتغير السعر (مع القيم المشاهدة P_t) في الجدول (٧-٢).* أما المرحلة الثانية من طريقة م‌ص‌م فتتمثل بإحلال قيم $\hat{P}_t$ محل قيم P_t في معادلة الطلب ومن ثم تقدير المعادلة الجديدة بالطريقة العادية. وبعمل انحدار Q_t على $\hat{P}_t$ Y_t نحصل على:

$$\hat{Q}_t = -39.9 - 1.3\hat{P}_t + 9.5Y_t, \qquad (7.90)$$
$$(2.9) \quad (3.7) \quad (4.1)$$

حيث تكون الأرقام التي بين الأقواس هي القيم المطلقة المناظرة لنسب t. وهكذا يكون لدينا $\hat{b}_0 = 39.9$ ، $\hat{b}_1 = -1.3$ و $\hat{b}_2 = 9.5$.

فإذا كنا قد استخدمنا طريقة المربعات الصغرى المعتادة لتقدير معادلة الطلب على الخرشوف (أي استخدمنا P_t بدلا من $\hat{P}_t$) فسوف نحصل على النتائج التالية:

$$\hat{Q}_t = -25.1 - 0.7\hat{P}_t + 6.2Y_t, \qquad (7.91)$$
$$(1.9) \quad (2.1) \quad (2.8)$$

* لاحظ أنه يتوافر لدينا تسع مشاهدات، فقط، لـ $\hat{P}_t$ ، حيث إننا فقدنا مشاهدة واحدة عند استخدام المتغير المبطأ $\hat{P}_t$ في المعادلة (7.89).

جدول رقم (٧-١). بيانات افتراضية عن سوق الخرشوف*

الفترة (t)	الكمية (Q)	سعر الوحدة (P)	الدخل (Y)	الأمطار (W)
١	١١	٢٠	٨,١	٤٢
٢	١٦	١٨	٨,٤	٥٨
٣	١١	٢٢	٨,٥	٣٥
٤	١٤	٢١	٨,٥	٤٦
٥	١٣	٢٧	٨,٨	٤١
٦	١٧	٢٦	٩,٠	٥٦
٧	١٤	٢٥	٨,٩	٤٨
٨	١٥	٢٧	٩,٤	٥٠
٩	١٢	٣٠	٩,٥	٣٩
١٠	١٨	٢٨	٩,٩	٥٢

جدول رقم (٧-٢). الأسعار المقدرة والأسعار الفعلية

الفترة	P_t	$\hat{P}_t$
١	٢٠,٠	–
٢	١٨,٠	١٨,٥
٣	٢٢,٠	٢٣,١
٤	٢١,٠	٢٢,٤
٥	٢٧,٠	٢٤,٢
٦	٢٦,٠	٢٤,٢
٧	٢٥,٠	٢٥,١
٨	٢٧,٠	٢٦,١
٩	٣٠,٠	٢٩,٨
١٠	٢٨,٠	٢٩,٧

* وحدات هذه المتغيرات يمكن أن تكون:

Q = أطنان الخرشوف

P = سعر الوحدة من الخرشوف (بالقروش)

Y = متوسط الدخل العائلي السنوي (بآلاف الدولارات)

W = معدل الأمطار السنوية بالبوصات.

نلاحظ الاختلافات بين المعاملات المقدرة في (7.90) و (7.91). وتشير معادلة م ص م إلى أن الطلب على الخرشوف أكثر استجابة للتغيرات في سعره وفي الدخل العائلي عنه مقارنة بتقديرات معادلة م ص ع. وفي ضوء العدد الصغير من المشاهدات في عينتنا، فلن تتوافر لدينا ثقة كافية، في حال مثل هذه، بأن التقديرات التي حصلنا عليها عن طريق م ص م يمكن الاعتماد عليها. إلا أنه، في حالة النتائج المبنية على عينة كبيرة من القيم المشاهدة للمتغيرات (وبالطبع على بيانات فعلية وليست افتراضية)، فسيكون هناك سبب جيد، بسبب عدم الاتساق في مقدرات م ص ع لتفضيل النتائج المبنية على طريقة م ص م.

نموذج للمالية العامة المحلية

بعد أن رأينا كيف تعمل م ص م في وجود بيانات افتراضية، نتحول الآن لتطبيق هذه الطريقة في دراسة تطبيقية فعلية. والمشكلة التي سندرسها ليست مشكلة مهمة للاقتصاديين، فقط، بل ولرجال الإدارات المحلية، أيضا، وتنحصر هذه المشكلة في التساؤل التالي: ما تأثير السياسات المالية المحلية على قرارات الأفراد؟ هل تؤدي المعدلات العالية لضرائب الملكية إلى تثبيط انتقال الأفراد والمؤسسات المحتمل توطينهما بالمنطقة؟ ما درجة اهتمام المقيمين (الفعلية والمحتملة) بنوعية المدارس المختلفة؟ هل تؤثر نوعية المدارس هذه على قراراتهم بالتوطن في مناطق معينة؟ هذه، بالطبع، ليست أسئلة يسهل الإجابة عنها. ولكنها، ولأسباب واضحة، يهتم بها المسئولون المحليون في المناطق المختلفة.

ومنذ عشر سنوات، قدم تشالز تايبوت Charles Tiebout نموذجا نظريا للمالية المحلية يتعامل مع بعض هذه القضايا.* افترض تايبوت نظاما يتكون من عدد كبير من المحليات يقدم كل منها منتجات مختلفة من الخدمات العامة. ويقوم المستهلكون

* يرجع إلى: Charles Tiebout. "A Pure Theory of Local Expenditure.", *Journal of Political Economy*, 64 (Oct. 1956), pp. 416-424.

المنتقلون من منطقة لأخرئ باختيار المجتمع الذي سيتوطنون به وفقا لتفضيلاتهم لهذه الخدمات. فعلى سبيل المثال فالأفراد ذوو الطلب المرتفع على التعليم سوف يتجمعون في المناطق التي تتوافر بها المدارس المختلفة. وإحدى السمات الجيدة لنموذج تايبوت هو أنه يزودنا بالآلية التي يمكن من خلالها أن يعبر الأفراد عن طلباتهم على الخدمات المحلية وإشباعها من خلال قراراتهم بالتوطن (أو كما يطلق عليه أحيانا التصويت بالأقدام "Voting with their feet").

ولكن، على المستوى التطبيقي، يظل التساؤل حول ما إذا كان الأفراد (أو بعضهم، في الأقل) يتصرف بهذه الطريقة أم لا؟. يمكن تخيل الصعوبات العديدة التي تمنع الحركة الكاملة في نموذج تايبوت: تكاليف الانتقال من منطقة لأخرى، مواطن العمل وتكاليف المواصلات اليومية.. وهلم جرا. وعلى الرغم من ذلك، فعند النظر إلى هيكل مناطقنا الحضرية وحركيتها، فإن سلوك الأفراد لايبتعد كثيرا عما يفترضه نموذج تايبوت: فالأفراد الذين يعملون في المدن الرئيسية غالبا ماتتاح لهم فرص كبيرة في التوطن عند اختيار الضواحي، وهنا، قد تكون نوعية المدارس المحلية مهمة كثيرا في اختيار مكان الإقامة.

ولكن، كيف نختبر وجود مثل هذا السلوك؟ إحدى طرق ذلك هي التساؤل عن ماذا يتوقع أن نلاحظ إذا كان سلوكا من نوع تايبوت له أهمية ؟ فإذا كانت نوعية المدارس وعبء الضرائب، في الحقيقة، عوامل مهمة في قرارات الأفراد بالتوطن، فقد نتوقع أن ذلك سينعكس على قيم الملكيات بالمناطق المختلفة. على سبيل المثال، فإن مجتمعا به مدارس ممتازة (مع بقاء الأشياء الأخرى على ماهي عليه) سيكون مرغوبا للتوطن فيه بدرجة أكبر مقارنة بغيره من المجتمعات. وعند محاولة الأفراد الإقامة في ذلك المجتمع فسيدفعون قيم الملكيات إلى أعلى مقارنة بنظيراتها في الاماكن الأخرى. وبالمثل، فإن معدلات عالية من الضرائب، مع ثبات الاشياء الأخرى، ستؤدي إلى تخفيض قيم الملكيات المحلية. وباختصار، في ظل افتراض تايبوت، توقع أن تكشف الاختلافات المالية بين المحليات عن نفسها في شكل الاختلافات في قيم الملكيات بكل منها. يوحي ذلك أننا قد نختبر العلاقة

بين المتغيرات المالية وقيم الملكيات عبر المحليات المختلفة. سنفترض أن هذه العلاقة تأخذ الشكل التالي:

$$V_t = b_0 + b_1 X_{1t} + \cdots + b_k X_{kt} + b_{(k+1)} Z_{1t} + \cdots + b_{(k+1)} Z_{1t} + b_{(k+\ell+1)} T_t + u_t, \tag{7.92}$$

حيث إن:

V_t مقياس ما لقيم الملكية المحلية في المجتمع رقم t.

$X_{1t}, ..., X_{kt}$ المتغيرات غير المالية التي تؤثر في قيم الملكية المحلية.

$Z_{1t}, ..., Z_{1t}$ مستويات الإنتاج لعدد t خدمات العامة.

u_t الخطأ العشوائي.

وبعد ذلك، وباستخدام البيانات من عينة المحليات، يمكننا تقدير هذه العلاقة لنرى ما إذا كانت هناك أي علاقات منتظمة بين خدماتنا العامة والمتغيرات الضريبية وقيم الملكيات المحلية.

سنصف مثل هذه الدراسة*. باستخدام عينة من ٥٣ بلدية محلية في شمال شرق نيوجرسي** (تقع جميعها في إطار منطقة نيويورك الحضرية). تستلزم هذه الدراسة تقدير معادلة تشبه (7.92). يزودنا التعداد العام للسكان والمساكن في الولايات المتحدة الأمريكية بقدر ضخم من المعلومات المتعلقة بسمات السكان والمساكن في تلك البلديات. وعن طريق تكملة هذه البيانات بالمعلومات المالية حول الانفاق المحلي ومعدلات الضرائب من مدينة نيوجرسي، يمكننا، حينئذ أن نجمع

* يرجع إلى:

W. E. Oates., "The Efects of Property Taxes and Local Public Spending on Property Values : An Empirical Study of Tax Capitalization and The Tiebout Hypothesis" *Journal of Political, Economy,* 77(Nov.-Dec., 1969), pp. 957-971.

** بالولايات المتحدة الأمريكية.

بعض المقاييس المختلفة للمتغيرات في (7.92). واستخدمت الدراسة:*

V_t = القيمة الوسيطة للسكن المشغول بمالكه في المحليــة رقــم t باعتباره مؤشرا لقيم الملكيات المحلية.

تعتمد قيمة الوحدات السكنية في مجتمع معين على عدد من المتغيرات غير المالية ومنها مدى قرب البلد من المدينة الرئيسة بالولاية والسمات المادية لوحــدات السكن، وعديد من السمات غير الملموسة كالاعتبارات «البيئية» وهذه هي X_{it} في المعادلة (7.92). ولقياس تأثيرها، استخدمت الدراسة متغيرات مستقلة: المســافــة بالأميال بين البلدية وبين مدينة نيويــورك M_t والوسيط لعدد الحجرات لكل منزل يشغله مالكه في البلدية R_t والنسب المئوية للمساكن في البلدية التي بنيت قبل عام ١٩٥٠م N_t، مقياسا لعمر المساكن في البلدية، واستخدم دخل الأسرة الوسيط Y_t في البلديةمتغيرا تقريبيا للسمات غير الملموسة لها. والافتراض هنا هو أن الأســر ذات الدخل المرتفع سوف تنحو إلى التوطن في البلديات الأكثر «جاذبية»، وهكذا يمثل دخل الأسرة الوسيط مقياسا للسمات غير الملموسة للتوطن في البــلــديــة. وبالنسبة للمتغيرات المالية، اشتملت الدراسة على معدل الضرائب الفعال أو الحقيقي (T) على الملكية المحلية (وهو المعدل الاسمي بعد تصحيحه ليأخذ في الحســبــان الممارسات المختلفة لتقدير الضريبة)، ومقياسا للخدمات المحلية، استخدام الإنفاق لكل تلميذ E_t في المدارس العامة المحلية.** والخطوة الأولى هي عمل انحدار V_t علـى هذه المجموعة من المتغيرات المستقلة باستخدام طريقة المربعات الـصـغـرى العادية، وينتج عن هذ الانحدار المعادلة المقدرة.***

* هذه البيانات لسنة ١٩٦٠م.

** للحصول على مزيد من المعلومات حول هذ ه المتغيرات والتحويلات الرياضية المستخدمة في معــادلــة الانحدار الفعلية، انظر المقالة ذاتها.

*** المتغير P يعد النسبة المئوية للأسرة في البلدية التي تحصل على دخل يقل عن ٣٠٠٠ دولارا سنويا. ويساعد هذا في تصحيح القصور في متغير الدخل Y_t (انظر ص ص ٩٦٢-٩٦٣ من المقالة).

$$\hat{V} = -21 - 3.6 \log T + 3.2 \log E - 1.4 \log M$$
$$(2.4) \quad (4.1) \quad (2.1) \quad (4.8)$$
$$+ 1.7R + 0.05N + 1.5Y + 0.3P, \qquad R^2 = 0.93. \qquad (7.93)$$
$$(4.1) \quad (3.9) \quad (8.9) \quad (3.6)$$

نجد أن المتغيرات المستقلة كافة تحتوي على معاملات مقدرة تأخذ الإشارات المتوقعة. ومن نسب t، نجد أنه إذا وضعنا أيا من فرضيات العدم بانتفاء وجود علاقة (مثلا، $H_1 : b_i \neq 0 ; H_0 = b_i = 0$) فإننا سنرفضه عند مستوى معنوية 5%. وتظهر هذه النتائج (عند اللمحة الأولى) على أنها تدعم نموذج السلوك الفردي حيث تمارس المتغيرات المالية تأثيرا مهما على قرارات التوطن : فكلما ارتفعت معدلات الضرائب (مع ثبات العوامل الأخرى) انخفضت قيمة الوحدة السكنية، وعلى العكس، كلما ارتفع حجم الإنفاق لكل تلميذ، ارتفعت قيمة الوحدة السكنية. وسوف يتبين لنا أن الأفراد يرغبون، عادة، في دفع مبالغ أكبر للإقامة في مجتمعات ذات معدلات ضريبية منخفضة، وذات مدارس ممتازة.

ولكن، إذا فكرنا قليلا في نموذجنا للانحدار وفي منهج التقدير المتبع، فسوف تظهر بعض المشاكل الخطيرة. ذلك أنه، بينما نرغب في اعتبار بعض السمات المادية والبيئية للبلدية متغيرات خارجية، فإن متغيراتنا المالية هي، في الحقيقة، متغيرات داخلية. فعلى سبيل المثال، يعتمد معدل الضرائب، عادة، على حجم الموازنة العامة، وعلى حجم الوعاء الضريبي الذي يعتمد بدوره على قيم الملكية.* وبالمثل يتحدد مستوى الإنفاق على المدارس بمعدلات الضرائب (ومرة أخرى بقيم الملكية) وعلى الدخل والسياسات السكانية الأخرى.** وفي الحقيقة،

* تعد الضرائب على الملكيات أهم مصادر الإيرادات العامة على مستوى المحليات في الولايات المتحدة الأمريكية - ملحوظة المترجم.

** تؤثر معدلات الضرائب في الإنفاق العام لأنها تمثل في الحقيقة «سعراً» للخدمات العامة، على سبيل المثال، فإن السكان المنتمين لمجتمع يتسم بوعاء ضريبي تجاري وصناعي متسع يمكنهم أن يشتروا خدمات تعليمية عند سعر نسبي منخفض، لأن جزءاً كبيراً من الإنفاق على الطلاب يأتي من الضرائب المدفوعة بوساطة مؤسسات الأعمال المحلية. نتوقع أن يختار المقيمون في مثل هذه المنطقة ميزانية تعليمية أكبر من تلك التي يمكن أن يختاروها في حالة غياب مثل هذا الوعاء الضريبي الصناعي - التجاري المتسع.

يمكن للفرد أن يجادل عن حق بأن العلاقة السالبة المشاهدة في (7.93) بين معدلات الضرائب وقيمة الوحدات السكنية تعكس الحقيقة بأنه، مع توافر ملكيات ذات قيم عالية، يمكن تحصيل حجم معين من الإيرادات مع وجود معدلات منخفضة للضرائب. أي أن V التي تحدد T وليس العكس. وهذا يجعل من الضروري أن نأخذ في الحسبان النتائج المترتبة للمعادلتين الإضافيتين في نموذجنا واللذين يأخذان الشكل العام التالي:

$$T_t = f(V_t, E_t, \cdots), \tag{7.94}$$

$$E_t = g(T_t, Y_t, \cdots). \tag{7.95}$$

حيث تشير المعادلة (7.94) إلى أن معدل الضرائب دالة في مستوى الإنفاق المحلي وبين المتغيرات الأخرى (مثل V_t) التي تحدد حجم الوعاء الضريبي بينما تبين المعادلة (7.95) أن الإنفاق على التعليم العام دالة في معدل الضرائب والدخل وبعض المتغيرات الأخرى التي تعكس السمات الملائمة لسكان المجتمع رقم t. وباختصار، فإن متغيراتنا المالية [في هذه الحال، لوغاريتم (T_t) ولوغاريتم (E_t)] متغيرات داخلية في نموذجنا، ويعني هذا أنهما، على الأرجح، مرتبطان بالأخطاء العشوائية، ونتيجة لذلك، فإن معاملاتنا المقدرة في المعادلة (7.93) عرضة لتحيز المعادلات الآنية، ولذا، فإن م‌ص‌ع ليست بالطريقة الملائمة لتقدير نموذج الانحدار.

لهذا السبب، تعيد الدراسة تقدير المعادلة باستخدام م‌ص‌م. ويعني ذلك أنه ينبغي علينا أن نعمل انحدارا للمتغيرين الداخليين $E'_t = (\log E_t)$ و $T'_t = (\log T_t)$* على المتغيرات المحددة مسبقا في النموذج. وبهذه الطريقة، يتم إيجاد المتغيرات الخالية من المشكلة $\hat{E}'_t = (\log \hat{E}_t)$ و $\hat{T}'_t = (\log \hat{E}_t)$ ، ثم نقدر بعد ذلك المعادلة

* ينبغي أن يلاحظ القارئ أن المتغيرات الخالية من مشكلة التحيز ليست هي $\log(\hat{T}_t)$ و $\log(\hat{E}_t)$. أي أننا لانجري انحدار المرحلة الأولى لـ $\hat{T}_t$ و $\hat{E}_t$ ، ثم نأخذ بعد ذلك اللوغاريثمات بدلاً من ذلك نعامل كلاً من $\log T_t$ و $\log E_t$ باعتبارها متغيرات محولة (أي تأخذ شكلاً رياضيا آخر) T'_t, E'_t على المتغيرات المحددة مسبقا على $\hat{T}'_t$, $\hat{E}'_t$. هذه النقطة المهمة يجب مراعاتها لأننا سنبين في الفصل الثامن أن استخدام $\log(\hat{T}_t)$ و $\log(\hat{E}_t)$ سوف يؤدي إلى مقدرات متحيزة.

الأولية باستخـدام $\hat{E}_t'$ و $\hat{T}_t'$ بدلا مـن $\log E_t$ و $\log T_t$. وهكذا نجد أن الدراسة قد استخدمت احدى السمات المميزة لـ م ص م. تذكر من مناقشتنا السابقة أن استخدام م ص م لايتطلب تحديدا كاملا للمعادلات الأخرى في النموذج، أي أنه ليس من الضروري أن نحصل على بيانات عن المتغيرات المستقلة كافة في المعادلـة (7.94) والمعادلة (7.95)، بل نحتاج فقط لمعلومات عن بعضها. وبالتحديد، فإنه لكي يعمل منهجنا في التقدير، فإنه ينبغي علينا أن نحصل على متغيرين محددين مسبقا بالإضافة إلى المتغيرات الموجودة في المعادلة (7.93). ومنهج الدراسة هو عزل بعض المتغيرات الإضافية المحددة مسبقا التي ستدخل في المعادلتين (7.94) و (7.95). هذه هي متغيرات تؤثر في معدلات الضرائب وفي الإنفاق على المدارس، ومن أمثلتها الملكيات الصناعية والتجارية لكل نسمة والمستويات التعليمية للسكان ونسبة السكان الملتحقين بالمدارس، وهلم جرا.*

بعد تكوين انحدار $\log E_t$ و $\log T_t$ على هذه المتغيرات المحددة مسبقا، ثم حساب $\widehat{\log E_t}$ و $\widehat{\log T_t}$، تقدر الدراسة انحدار المرحلة الثانية للمعادلة والحصول على:

$$\begin{aligned}\hat{V} = &-29 - 3.6 \log T + 4.9 \log E - 1.3 \log M + 1.6R \\ &\quad (2.3) \quad (3.1) \qquad (2.1) \qquad\quad (4.0) \qquad (3.6) \\ &+ 0.06N + 1.5Y + 0.3P. \\ &\quad (3.9) \quad (7.7) \quad (3.1)\end{aligned} \tag{7.96}$$

ومن المدهش أن نلاحظ في حالتنا هذه (على العكس من المثال السابق) أن المعاملات المقدرة في معادلة م ص م هي، عموما، قريبة جدا من تقديرات م ص ع. فجميعها لها الإشارات نفسها، وتقريبا القيم ونفس نسـب t نفسها، والاختـلاف المهم الوحيد هو أن المعامل المقدر لمتغير الإنفاق على التعليم أكبر في م ص م منه في

* سيكون هناك، في الواقع، سبعة متغيرات محددة مسبقاً مستخدمة للحصول على $\log \hat{E}_t$ و $\log \hat{T}_t$، وتظهر المجموعة الكاملة لهذه المتغيرات في الصفحة ٩٦٥ من المقالة المذكورة.

معادلة مصرع [على الرغم من أن مصرع هنا (3.2) يقع داخل ٩٥٪ فترة ثقة للمقدر المبين في المعادلة (7.98)] وتدل النتائج المرتبطة بهذه الدراسةخاصة أن عدم الاتساق الموجود في المقدرات بسبب وجود الآنية في معادلات النموذج غير خطير. وفي حالات أخرى، تكون مقدرات مصرع ، مصرع مختلفة اختلافا كبيرا. وأخيرا (وعلى أية حال) نجد أن النتائج تعطينا دلائل تتفق مع النموذج الذي يوضح اهتمام الأفراد بالمتغيرات المالية المحلية عند اختيارهم للبلدية التي سيتوطنون بها.

ملحق: الأخطاء العشوائية المرتبطة ذاتيا في نموذج المعادلات الآنية*

ناقشنا في الفصلين السادس والسابع عددا من المشاكل التي تظهر عند التقدير عندما تتحق الافتراضات الأساسية للنموذج. وكان منهجنا، حينئذ، هو التعامل مع كل واحدة من هذه المشاكل على حدة، مع محاولة تطوير طرق أكثر أو أقل إقناعا في تعديل طرقنا في التقدير لنتعامل معها. ولكن، قد تظهر هذه المشاكل معا في بعض الحالات في نموذج الانحدار نفسه، ومن ثم، يصعب التعامل معها. نحاول في هذا الملحق الاهتمام بمثل هذه الحالة حيث يعاني النموذج، في حالتنا هذه مشكلة نظم المعادلات الآنية مضافا إليها مشكلة الارتباط الذاتي بين الاخطاء العشوائية، ونحاول اكتشاف كيف يمكن تقدير مثل هذا النموذج. ونأمل أن يزودنا هذا ببعض الملاحظات الدقيقة حول الطرق التي يعالج بها الاقتصاديون القياسيون مشكلتين أو أكثر من مشاكل التقدير في آن واحد.

افترض أننا مهتمون بالمعادلات الآنية التالية في نظام المعادلات الآنية التالي:

$$Y_{1t} = b_0 + b_1 Y_{1t} + b_2 Y_{2t} + b_3 Y_{3(t-1)} + u_t, \qquad (7A.1)$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad -1 < \rho < 1, \qquad (7A.1)$$

* تعتمد المناقشات التالية، بدرجات متفاوتة، على مقالة:

Ray C. Fair "The Estimation of Simultaneous Equation Models with Lagged Endogenous Variables and First order Correlated Errors." *Econometrica*, 38 (May 1970), pp. 507-516.

وأيضا، على مقالة J. Phillip Cooper في الموضوع نفسه *Econometrica*, 40(March 1972), pp. 305-310

حيث إن X_{1t} متغير خارجي ، Y_{2t} متغير داخلي $Y_{3(t-1)}$ متغير داخلي مبطأ، u_t هو الخطأ العشوائي. وعلى العكس من امثلتنا السابقة، نفترض أن الخطأ العشوائي مرتبط ذاتيا، كما يظهر من المعادلة (7A.2) حيث إن ε_t خطأ عشوائي موزع توزيعا طبيعيا مستقل، ومن ثم، لا يرتبط بجميع المتغيرات الخارجية (وجميع القيم المبطئة لها) في النموذج. نفترض، أيضا، أن ε_t لايعاني الارتباط الذاتي $[E(\varepsilon_s \varepsilon_t) = 0 \text{ for } s \neq t]$، وله قيمة متوسطة تساوي الصفر $[E(\varepsilon_t) = 0]$ وله تباين ثابت $[E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2]$.

وإذا كانت ρ صفرا في المعادلة (7A.2) فإننا سنعد $Y_{3(t-1)}$ متغيرا محددا مسبقا، ونكمل كما بينا من قبل. ولكن، لأننا نفترض هنا أن $\rho \neq 0$ فإننا نواجه صعابا إضافية. وبسبب الارتباط الذاتي، نتوقع أن تكون $Y_{3(t-1)}$ مرتبطة بـ u_t. ولنرى ذلك، لاحظ أنه طالما أن Y_{3t} متغير داخلي فإن $Y_{3(t-1)}$ ستعتمد،عموما، على $Y_{1(t-1)}$ والتي تعتمد، بدورها، على $u_{(t-1)}$. ينتج عن ذلك أن $Y_{3(t-1)}$ سوف تعتمد على $u_{(t-1)}$ وهكذا ستكون مرتبطة بـ u_t في ضوء المعادلة (7A.2). هذا يعني أننا لانستطيع أن نعامل $Y_{3(t-1)}$ باعتباره متغيرا محدد مسبقا. وينبغي أن يكون واضحا تعميم هذه النتيجة وهو أنه إذا كانت الأخطاء العشوائية مرتبطة ذاتيا فإن المتغيرات الداخلية المبطأة ستكون مرتبطة بالأخطاء العشوائية عموما.

لاحظ أننا قد نستمر في اعتبار المتغيرات الخارجية متغيرات محددة مسبقا، لأنها تظل غير مرتبطة بالأخطاء العشوائية. ويمكننا أن نرى ذلك عن طريق تكرار الإبطاء والإحلال لـ u_t في المعادلة (7A.2) والتي تعطينا :

$$u_t = \varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1} + \rho^2\varepsilon_{t-2} + \cdots. \tag{7A.3}$$

ولما كانت u_t تعتمد في النهاية على القيم المبطأة والقيم الحالية لـ ε_t ، وطالما أن هذه القيم لـ ε_t هي مستقلة عن المتغيرات الخارجية افتراضا، فإنه ينتج عن ذلك أن u_t ينبغي أن يكون غير مرتبط بالمتغيرات الخارجية. وهكذا يمكننا في المعادلة (7A.1) أن نفترض أن X_{1t} تكون غير مرتبطة بـ u_t.

يتبغي علينا الآن أن نعدل طريقتنا في التقدير م ص م لنأخذ في الحسبان الارتباط الذاتي. وقد ظهر من مناقشاتنا للفصول السابقة أنه يتبغي علينا أن نحصل أولا على مقدر ρ، ثم نحول المعادلة (7A.1) للتخلص من الخطأ العشوائي المرتبط ذاتيا، ثم نكمل م ص م.

ولسوء الحظ، فإن اشتقاق مقدر لـ ρ ليس عملية مبسطة كما كان عليه الحال في الفصل الخامس، عندما اعتبرنا الارتباط الذاتي بمعزل عن المشاكل الأخرى. وإذا كانت المعادلة (7A.1) تعاني، فقط، الارتباط الذاتي، فإن المنهج، كما وضح في الفصل الخامس هو الحصول على مقدرات متسقة $\hat{b}_0$، ...، $\hat{b}_3$ لـ b_0، ...، b_3 بوساطة م ص ع واستخدامها لتقدير u_t بوساطة $\hat{u}_t = Y_{1t} - \left(\hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_{1t} + \hat{b}_2 Y_{2t} + \hat{b}_3 Y_{3(t-1)}\right)$ ومن $\hat{u}_t$ سوف نحسب $\hat{\rho}$ من المعادلة (6.45). ولكن، طالما أن المقدرات الناتجة لـ b_0، ...، b_3 ستكون غير متسقة، ومن ثم، تؤدي، بدورها إلى ايجاد مقدر غير متسق لـ ρ، فيتبغي علينا أن نقدر (7A.1) بوساطة م ص م.

ولتنفيذ طريقة م ص م، نلاحظ أننا، بسبب ارتباط $Y_{3(t-1)}$ بـ u_t، نعامله كما لو أنه متغير داخلي، $Z_t = Y_{3(t-1)}$، مثلا. ولتبسيط الترميز، دع X_t تشير إلى المتغيرات الخارجية كافة (مشتملة على X_{1t}) في النظام في الفترة t. حينئذ تتمثل المرحلة الأولى لـ م ص م في الحصول على القيم المصححة أو «المنقاه» لكل من Z_t و Y_{2t} أي $\hat{Z}_t$ و $\hat{Y}_{2t}$.

والآن يمكننا أن نحصل نموذجيا على $\hat{Y}_{2t}$ عن طريق انحدار Y_{2t} على جميع المتغيرات الخارجية في النظام X_t.* وبالمثل، سنجعل $\hat{Z}_t = \hat{Y}_{3(t-1)}$ عن طريق انحدار Z_t على جميع القيم المبطأة للمتغيرات الخارجية X_{t-1}. ولكن لتضمن تحقق الشروط الفنية لـ م ص م نكون $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Z}_t$ عن طريق عمل انحدار لـ Y_{2t} و Z_t على كل من

* تذكر أنه، بسبب وجود الارتباط الذاتي، ينبغي أن نعامل المتغيرات الداخلية المبطئة باعتبارها متغيرات داخلية حالية، لذلك، تكون المتغيرات الخارجية هي المتغيرات المحددة مسبقا، فقط، في النموذج.

المتغيرات المشار إليها لـ X_t و X_{t-1} (على سبيل المثال، على كل من X_{1t} و $X_{1(t-1)}$*) من بين متغيرات أخرى). وعندما نحصل على $\hat{Y}_{2t}$ و$\hat{Z}_t$ فإن اكمال منهجنا ينبغي أن يكون واضحا. أي أننا سوف نقدر معلمات (7A.1) عن طريق إحلال $\hat{Y}_{2t}$ و $\hat{Y}_{3(t-1)}$ محل Y_{2t} و $Y_{3(t-1)}$ على الترتيب، ونضع نجمة على الخطأ العشوائي ثم نشتق المعادلات الطبيعية في المرحلة بطريقتنا العادية.

فإذا كنا مهتمين، فقط، بالحصول على مقدرات متسقة لـ b_0، b_1، b_2 وb_3 فقد يمكننا حل معادلاتنا الطبيعية للحصول على $\hat{b}_0$، ...، $\hat{b}_3$ ونتوقف عندها. ولكننا نرغب عادة في تحديد التباينات ونسب t المرتبطة بمقدراتنا حتى يمكننا إنشاء فترات الثقة واختبار الفروض. ولسوء الحظ فإننا، إذا توقفنا عند هذه النقطة من منهجنا للتقدير، لايمكننا الحصول على التباينات أو نسب t، بسبب استمرار وجود الأرتباط الذاتي معنا الذي جعل صيغنا للتباين غير صحيحة. ولذا، نضطر لعمل تعديلات إضافية.

ولما كان استخدامنا لـــ م ص م قد أنتج لنا مقدرات متسقة $\hat{b}_0$، $\hat{b}_1$، $\hat{b}_2$ و$\hat{b}_3$ ومعلمات (7A.1)، فيمكننا الحصول على مقدر متسق للخطأ العشوائي u_t من خلال:

$$\hat{u}_t = Y_{1t} - (\hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_{1t} + \hat{b}_2 Y_{2t} + \hat{b}_3 Y_{3(t-1)}. \qquad (7A.4)$$

وباستخدام منهجنا من الفصل الخامس، نحصل الآن على مقدر متسق لـ ρ :

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}\hat{u}_t}{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2} \qquad (7A.5)$$

---

* ينبغي أن يكون القارئ قادرا على إثبات أنه إذا كُوّنت $\hat{Y}_{2t}$ عن طريق إجراء انحدار Z_t على X_{t-1}، حينئذ، عموما، فإن الشروط الموضوعة في (7.61) لن تتحقق. أي إذا جعلنا $Y_{2t} = \hat{Y}_{2t} + \hat{\theta}_{1t}$ و $Z_t = \hat{Y}_{2t} + \hat{\theta}_{1t}$ حينئذ، فإن $\Sigma(\hat{\theta}_{2t}\hat{Y}_{2t}) \neq 0,\ \Sigma(\hat{\theta}_{1t}\hat{Y}_t) \neq 0$
(مساعدة للحل: ستكون $\hat{\theta}_{1t}$ مثل أي متغير خارجي حالي مثل X_{1L}، $\Sigma(\hat{\theta}_{1t}\hat{X}_{1t}) = 0$.
ولكن $\hat{Z}_t$ سوف تعتمد على $X_{1(t-1)}$.

وهذا (كما نتذكر) هو مقدر ρ المقترح بوساطة المعادلة (7A.2). وكما اوضحنا في الفصل الخامس نبطئ المعادلة (7A.1) لفترة زمنية واحدة ثم نضرب هذه المعادلة المبطئة بوساطة ρ وبعدئذ نطرح معادلتنا الناتجة من (7A.1) لنحصل على :*

$$Y_{1_t}^{*} = B + b_1 X_{1_t}^{*} + b_2 Y_{2t}^{*} + b_3 Y_{3(t-1)}^{*} + \varepsilon_t, \tag{7A.6}$$

حيث إن $B = (b_0 - \hat{\rho} b_0)$ وأن:

$$Y_{1t}^{*} = Y_{1t} - \hat{\rho} Y_{1(t-1)}, \qquad X_{1t}^{*} = X_{1t} - \hat{\rho} X_{1(t-1)},$$
$$Y_{2t}^{*} = Y_{2t} - \hat{\rho} Y_{2(t-1)}, \qquad X_{3t}^{*} = X_{3t} - \hat{\rho} X_{3(t-1)}.$$

وبعد أن نكون قد أزلنا مشكلة الارتباط الذاتي فعليا، يمكننا الآن أن نكمل التحليل بمثل ما قمنا به سابقا باستثناء وحيد في السابق هو أننا استخدمنا جميع المتغيرات الخارجية (X_t) وقيمها المبطأة (X_{t-1}) لتكوين القيم المصححة لـ Y_{2t} و $Y_{3(t-1)}$، ولكننا الآن مهتمين بالمتغيرات الداخلية Y_{2t}^{*} و $Y_{3(t-1)}^{*}$ في (7A.6).** هذه المتغيرات (على الترتيب) هي مركبات خطية من Y_{2t} و $Y_{3(t-1)}$ وقيمها المبطأة لفترة واحدة. لذلك، ففي محاولة أخرى لتحقيق التوافق للمتغيرات، نبني $\hat{Y}_{2t}^{*}$ و $\hat{Y}_{3(t-1)}^{*}$ عن طريق إجراء انحدار لـ $\hat{Y}_{2t}^{*}$ ومثلا $Z_t^{*} = Y_{3(t-1)}^{*}$ وعلى توليفاتها الخطية المناظرة من X_t و X_{t-1} على وجه التحديد $X_t^{*} = (X_t - \hat{\rho} X_{t-1})$ و $X_{t-1}^{*} = (X_{t-1} - \hat{\rho} X_{t-2})$. وعلى سبيل المثال، فإن أحد المتغيرات الذي نرمز له بـ X_t^{*} سيكون $X_{1t}^{*} = (X_{1t} - \hat{\rho} X_{(t-1)})$.

وحينما نحسب كلا من $\hat{Y}_{2t}^{*}$ و $\hat{Y}_{3(t-1)}^{*}$ نقوم بإحلالها في (7A.6) محل Y_{2t}^{*} و $Y_{3(t-1)}^{*}$، ونضع نجمة على الخطأ العشوائي ε_t، ثم نشتق بعد ذلك معادلتنا الطبيعية للمرحلة الثانية من الانحدار. ويمكن إثبا ت أن (في ظل تحقق شروط عامة) المقدرات الناتجة تكون متسقة ولها تباينات العينة الكبيرة المعطاة بوساطة الصيغ

---

* مرة أخرى، تكون المعادلة (7A.6) صحيحة تماما بدلالة الاحتمالات، فقط، في حالة ما إذا كانت العينة ذات حجم لانهائي. وسبب ذلك (بالطبع) هو أن $\hat{\rho}$ هو، فقط، مقدر متسق لـ ρ.

** ينبغي علينا أن نعد باستمرار $Y_{3(t-1)}^{*}$ متغيرا داخليا بسبب وجود المشاكل في استخدام $\hat{\rho}$ بدلا من المعلمة الحقيقية ρ في (7A.6).

المعتادة. لذا، يمكننا أن نكون فترات الثقة واختبار الفرضيات بالطريقة المعتادة. لاحظ أن مقدرنا لـ b_0 سيكون $\hat{b}_0 = \hat{B}/(1-\hat{\rho})$. وبالمثل سيصبح تباين العينة الكبيرة لـ $\hat{b}_0$:

$$\mathrm{var}(\hat{b}_0) = \frac{1}{(1-\hat{\rho})^2}\mathrm{var}(\hat{B}).$$

نلخص الآن نتائجنا ونعممها: إذا أعطينا معادلة في نظام من المعادلات الآنية تحتوي على أخطاء عشوائية مرتبطة ذاتيا، فإن المتغيرات الداخلية المستقلة المبطأة في تلك المعادلة ينبغي أن تعامل باعتبارها متغيرات داخلية، وتقدر مثل هذه المعادلة عن طريق : أولا، إجراء انحدار المتغيرات الداخلية المستقلة الحالية والمتغيرات المستقلة الداخلية المبطأة على جميع المتغيرات الخارجية في النموذج وعلى قيمها المبطأة لبناء القيم المقدرة ثم نحل بعد ذلك المتغيرات المقدرة محل المتغيرات المستقلة الحالية والمبطأة، ونكمل كالعادة للحصول على مقدرات متسقة للمعاملات في معادلة الانحدار. وباستخدام هذه المقدرات لـ م‌ص‌م، نوجد متسق للخطأ العشوائي الذي يستخدم، بدوره، للحصول على مقدر لـ ρ، $\hat{\rho}$، في نظام الارتباط الذاتي، ويمكننا، حينها، أن نحول معادلتنا الأصلية للتخلص من الارتباط الذاتي. ويستلزم الأمر استخدام م‌ص‌م مرة ثانية، مع تذكر أننا هنا، أيضا، ينبغي أن نعامل المتغيرات المستقلة الداخلية والمبطأة باعتبارها متغيرات داخلية (ليست محددة مسبقا). نكون انحدارا لقيمنا «المحولة» للمتغيرات الداخلية الحالية والمتغيرات الداخلية المستقلة المبطأة على المتغيرات الخارجية الحالية والمتغيرات الخارجية المبطأة، وبإحلال المتغيرات المصححة محل المتغيرات المستقلة، نتقدم لتنفيذ المرحلة الثانية لطريقة م‌ص‌م.

أسئلة

١- افترض النموذج :

$$C_t = b_0 + b_1 C_{t-1} + b_2 Y_t + \varepsilon_{1t}, \quad (1)$$

$$Y_t = I_t + C_t, \quad (2)$$

$$I_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 Y_{t-1} + a_3 r_t + \varepsilon_{2t}, \qquad (3)$$

حيث إن C، I، Y و r هي الإنفاق الاستهلاكي، الاستثماري، الدخل ومعدل الفائدة على الترتيب، افترض أن $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ليسا مرتبطين ذاتيا وأنهما مستقلان عن r_t

(أ) اذكر المتغيرات الداخلية والمتغيرات المحددة مسبقا في النموذج

(ب) كيف نقدر المعادلة (1) ؟

(ج) كيف نقدر المعادلة (3) ؟

٢- افترض النموذج التالي لسلوك الأجور - الأسعار :

$$\dot{W}_t = a_0 + a_1 (UN)_t + a_2 \dot{P}_t + \varepsilon_{2t},$$

$$\dot{P}_t = b_0 + b_1 \dot{M}_t + b_2 (UN)_t + b_3 \dot{W}_t + \varepsilon_{2t},$$

حيث إن :

$\dot{W}$ = نسبة التغير في الأجور،

UN = معدل البطالة،

$\dot{P}$ = نسبة التغير في الأسعار،

$\dot{M}_t$ = نسبة التغير في عرض النقود،

$\varepsilon_2, \varepsilon_1$ = الأخطاء العشوائية

افترض أن ε_{1t} و ε_{2t} لها متوسطات صفرية، وتباينات ثابتة وليست مرتبطة ذاتيا ومستقلة عن $(UN)_t$ وعن $\dot{M}_t$.

(أ) هل المعادلات السابقة مميزة ؟ وضح.

(ب) اذكر الخطوط العامة لطريقة تقدير المعادلة المميزة.

٣- افترض النموذج :

$$L_t = a_0 + a_1 W_t + a_2 S_t + u_{1t}, \qquad (1)$$

$$W_t = b_0 + b_1 L_t + b_2 P_t + u_{2t}, \qquad (2)$$

حيث :

L = كمية العمل المستخدم،

W = معدل الأجر،

S = المبيعات،

P = مقياس لإنتاجية العمل.

(أ) أوجد معادلات الشكل المختزل لكل من L_t و W_t.

(ب) وضح الخطوط العريضة لطريقة تقدير المعادلة (1).

٤- افترض أن طلب أحد الأفراد على الأحذية يأخذ الشكل :

$$D_{it} = a_0 + a_1 P_t + a_2 D_{i(t-1)} + u_{it}, \qquad (1)$$

حيث D_{it} هو طلب الفرد رقم i على الاحذية في الفترة t، P_t هو سعر الأحذية، افترض أن :

$$u_{it} = \rho u_{i(t-1)} + \varepsilon_{it}, \qquad -1 < \rho < 1,$$

حيث ε_{it} له متوسط صفر، وتباين ثابت، وليس مرتبطا ذاتيا، ومستقل عن P_t وعن جميع قيمه المعطاة.

(أ) بين أن المتغير التابع المبطأ $D_{i(t-1)}$ مرتبط بالخطأ العشوائي.

(ب) افترض أن المعادلة (1) ليست جزءا من نظام المعادلات. بين أنه، على الرغم من ذلك، يمكن تقديرها باستخدام م ص م.

٥- افترض نموذج الانحدار المتعدد التالي :

$$Y_t = b_0 + b_1 X_{1t} + b_2 X_{2t} + u_{1t}, \qquad (1)$$

$$X_{2t} = c_0 + c_1 Y_t + u_{2t}, \qquad (2)$$

أثبت أنه، في ظل الافتراضات العادية، $E(X_{2t} u_{1t}) \neq 0$.

٦- افترض نموذج الأجور - الأسعار:

$$\dot{W}_t = a_0 + a_1 \dot{P}_t + a_2 (UN_t) + \varepsilon_{1t}, \qquad (1)$$

$$\dot{P}_t = b_0 + b_1 \dot{W}_t + \varepsilon_{2t}, \qquad (2)$$

حيث :

$\dot{W}$ = نسبة التغير في الأجور النقدية.

$\dot{P}$ = نسبة التغير في الأسعار.

UN = معدل البطالة

(أ) بين أن طريقة م‌ص‌م لن تعمل إذا حاولنا تقدير المعادلة (1).

(ب) هل تفشل طريقة م‌ص‌م في العمل، أيضا، إذا حاولنا تقدير المعادلة (2)؟ وضح.

٧- افترض المعادلة الهيكلية التالية التي تعد جزءا من نظام معادلات آنية :

$$Y_{1t} = b_0 + b_1 X_{1t} + b_2 X_{2t} + b_3 Y_{3t} + u_{1t},$$

حيث إن Y_{1t}، Y_{2t} وY_{3t} متغيرات داخلية، X_{1t} متغير محدد مسبقا. افترض أن النظام المتكامل الذي أخذت منه هذه المعادلة يحتوي على عشرة متغيرات إضافية محددة سلفا، ولكن، افترض أنه يتوافر لدينا مشاهدات عن واحد منها، فقط، X_{1t} مثلا.

(أ) هل المعادلة مميزة ؟ لماذا نعم أو لماذا لا ؟

(ب) هل يمكننا تقدير المعادلة بوساطة م‌ص‌م ؟ اشرح.

٨- افترض نموذج المعادلتين

$$Y_{1t} = a_1 + b_1 X_t^2 + c_1 Y_{2t} + \varepsilon_{1t}, \qquad (1)$$

$$Y_{2t} = a_2 + b_2 X_t + c_2 Y_{1t} + \varepsilon_{2t}, \qquad (2)$$

حيث X_t : متغير محدد مسبقا، ε_1, ε_2 تحقق افتراضاتنا المعتادة.

(أ) هل كلا المعادلتين مميزتان ؟ ولماذا ؟

(ب) اشتق معادلات الشكل المختزل.

(ج) وضح، باختصار، طريقة لتقدير المعادلة الأولى من النموذج السابق.

٩- افترض أن الإنفاق الاستثماري الخاص يأخذ الشكل التالي :

$$I_{it} = a + b_1 r_{it} + b_2 S_{i(t-1)} + u_{it}, \qquad i = 1, \cdots, N,$$

$$r_{it} = r_t + b_3 I_{it} + \varepsilon_{it},$$

حيث :

I_{it} = الإنفاق الاستثماري للمنشأة رقم i في الفترة الزمنية t،

r_{it} = معدل الفائدة الذي يجب أن تدفعه تلك المنشأة لتمويل الاستثمارات،

$S_{i(t-1)}$ = مبيعات المنشأة في الفترة t-1،

r_t = متوسط معدل الفائدة في الاقتصاد القومي للأرصدة القابلة للاستثمار.

نفترض أن هذه المنشآت ذات العدد N كبيرة الحجم، لذلك فإن حجم انفاقها الاستثماري يؤثر على معدل الفائدة الذي تواجهه. افترض تحقق الشروط المعتادة كافة المرتبطة بكل من u_{it} و ε_{it}. افترض، أيضا، أنه تتوافر لدينا بيانات مقطعية، فقط:

(أ) ناقش هل تلك المعادلات مميزة أم لا ؟

(ب) أوجد معادلة الشكل المختزل لـ I_{it} ؟

الفصل الثامن

نماذج المعادلات الآنيّة غير الخطيّة

كانت نماذج المعادلات الآنية التي نوقشت في الفصل السابع كافة نماذج خطية في المتغيرات الداخلية. ولكن كثيرًا من (إن لم يكن معظم) النماذج التي يهتم بها الاقتصاديون في الحياة العملية هي نماذج غير خطية في المتغيرات الداخلية. فكثير من النماذج الاقتصادية، على سبيل المثال، تحتوي على الأجور، أي W، والأسعار، P، باعتبارها متغيرات داخلية. تشرح هذه النماذج، عادة، الطلب على العمل بدلالة معدل الأجر الحقيقي، W/P. ومن الواضح أن متغير الأجر الحقيقي، W/P، ينبغي أن يفسر بوساطة النموذج، وأنه يكون متغيرًا داخليًا إذا كان كل من W و P متغيرًا داخليًا. ومن الواضح، أيضًا، أن W/P ليس دالة خطية في المتغيرت الداخلية.

هناك عديد من الأمثلة الأخرى للمتغيرات الداخلية غير الخطية، فالإيراد الكلي عادة مايعرف بأنه حاصل ضرب (PQ) حيث P السعر و Q عدد الوحدات المباعة. ومرة أخرى، إذا كان كل من P و Q متغيرًا داخليان. فإن النماذج التي تحتوي على الإيرادات الكلية (ربما باعتبارها عنصرًا أساسيًا للوصول إلى الأرباح) ينبغي أن تعد نماذج غير خطية. وتوجد اعتبارات مشابهة في حالة النماذج التي تحاول إدخال إجمالي الأجور كحاصل ضرب معدل الأجر، W، في عدد وحدات العمل التي اشتريت في كل فترة زمنية، L. وبالمثل، نلاحظ أن معظم النماذج

الاقتصادية الكلية تفسر بعض المقاييس للمستوى العام للأسعار (على سبيل المثال، مكمش الناتج القومي الإجمالي) بالإضافة إلى القيم الحقيقية (المكمشة) والجارية لمعظم المتغيرات الاقتصادية المأخوذة في الاعتبار إن لم يكن كلها. وعلى سبيل المثال، تشرح هذه النماذج، عادة، الناتج القومي الإجمالي بالأسعار الثابتة وبالأسعار الجارية أيضًا. وهكذا، فإن مناقشتنا حتى الآن تبين أن النماذج التي تحتوي على كل من القيم الجارية والقيم الحقيقية (المكمشة) للمتغيرات الداخلية، ينبغي أن تعد نماذج غير خطية في المتغيرات الداخلية، إذا كان المكمش السعري داخليًا.

وهناك أمثلة إضافية أخرى للنماذج غير الخطية التي تنشأ من دوال الإنتاج غير الخطية في العوامل الداخلية للإنتاج، ومن منحنيات فليبس Phillips التي تصاغ بدلالة مقلوب معدل البطالة المحدد داخليًا، وأخيرًا، من طبيعة تعريف كثير من المتغيرات الاقتصادية التي يبحث الاقتصاديون تفسيرها. فمثلا يعرف معدل البطالة بأنه نسبة عدد العاملين العاطلين إلى عدد أفراد قوة العمل. فإذا كانت النماذج الكلية تبحث في تفسير حجم قوة العمل بالإضافة إلى عدد العمال العاطلين عن العمل، فإنها ينبغي أن تعد نماذج غير خطية.

سنناقش في هذا الفصل تحليل مثل هذه النماذج، وعلى نحو خاص سوف نوسع تحليلنا لمشكلة التميز وتطبيق طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين على النماذج التي تجسد الاشكال غير الخطية للمتغيرات الداخلية، ولكنها خطية في المعلمات.* وفي ملحق هذا الفصل، سوف نوسع نتائجنا لتشمل تلك المرتبطة

---

* المرجع الكلاسيكي لمشكلة التميز في كلا النماذج القياسية الخطية وغير الخطية هو :

F. Fisher. *The Identification Problem in Econometrics*. New York : McGraw-Hill, 1966.

أما مناقشتنا نحن لمشكلة التميز فستعتمد بشدة على مقالة:

H. H. Kelejian, "Identification of Nolinear Systems : An Interpretation of Fisher." *Princetion University, Econometric Research Program,* Research Paper No. 22 (Revesed), 1970.

وأخيرًا، تعتمد مناقشتنا لطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين على مقالة :

H. H. Keljian. "Two Stage Least Squareis and Econometric Models Linear in Parameters but Nonlinear in the Endogenous Variables." *Journal of American Statitical Association,* June 1971, vol. 66, pp. 373-374

بتقدير النماذج غير الخطية في المعلمات. ويجب أن نحذر القارئ من أن غير الخطية هذه تدخل تعقيدات إضافية في التحليل. ونتيجة لذلك، فإن بعض أجزاء هذا الفصل قد تستدعي درجة أكبر من التركيز، ولكن يشتق التحليل مباشرة وكلية من المادة العلمية الموجودة في الفصول السابقة. وقد يكون من المدهش رؤية امكانية مواصلة التحليل استنادًا إلى هذه المادة العلمية.

(٨-١) الإطار التحليلي

ينبغي علينا أولا أن نحدد، اصطلاحًا، نوع النموذج غير الخطي الذي سنحلله. وفي سبيل عمل ذلك، فإننا لن نوضح المشكلة الأكثر عمومية ولكن، في المقابل، سنوضح الشكل الأكثر تمثيلا للواقع. وهذا يعني أن معظم النماذج التي نهتم بها في التطبيقات ينبغي أن تلائم هذا الإطار التحليلي. نبدأ بنموذج مكون من معادلتين ثم نعمم النتائج بعد ذلك.

توضيح : نموذج من معادلتين

اعتبر النموذج التوضيحي التالي :

$$Y_{1t} = a_0 + a_1 Y_{2t} + a_2[Y_{1t} Y_{2t} / X_{1t}] + a_3 X_{2t} + \varepsilon_{1t}, \qquad (8.1)$$

$$Y_{2t} = b_0 + b_1 Y_{1t} + b_2[(Y_{1t} - 2Y_{2t})^2 e^{X_{3t}}] + b_3 X_{4t} + \varepsilon_{2t}, \qquad (8.2)$$

حيث X_{1t}، X_{2t}، X_{3t} و X_{4t} متغيرات خارجية، ε_{1t} و ε_{2t} هي أخطاء عشوائية، و Y_{1t}, Y_{2t} هما المتغيران المفترض أن يفسرهما النموذج (أي أنهما متغيران داخليان). افترض أن ε_{1t} و ε_{2t} مستقلان عن المتغيرات الخارجية X_{1s}،X_{2s}، X_{3s} و X_{4s} لجميع t و s وأن $E(\varepsilon_{it}) = 0$ و $E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma_i^2$ حيث i=1,2 افترض، أيضًا، أن ε_{1t} و ε_{2t} مستقلان عن ε_{1t} و ε_{2t} لجميع $t \neq s$، لذا فإن الأخطاء العشوائية لاتعاني الارتباط الذاتي.

هناك سمتان رئيستان مرتبطتان بالنموذج الموصوف في (8.1) و (8.2) ينبغي ملاحظتهما: الأولى أن النموذج خطي في المعلمات a_0، . . . ،a_3 و b_0، . . . ،b_3

والثانية أن النموذج غير خطي في المتغيرات الداخلية بسبب المتغيرات التي تظهر بين الاقواس تناظر المعلمتين a_2 و b_2. وينبغي ملاحظة أن قيمة هذه المتغيرات التي تظهر بين الاقواس يمكن تحديدها بوساطة قيم المتغيرات Y_{1t}، Y_{2t} و X_{1t}، X_{2t}. وبالمقابل، يمكن أن نعد المتغيرات داخل الاقواس دوال معروفة لهذه المتغيرات الأربع. ونعني بالدالة المعروفة تلك الدالة ذات الشكل المعروف التي لا تحتوي على معلمات غير معلومة. على سبيل المثال فإن المتغير الموضوع بين قوسين المناظر لـ b_0 ليس على الشكل $[(Y_{1t} - \gamma\, Y_{2t})\, e^{\gamma_2 X_{3t}}]$ ، حيث إن γ_1 و γ_2 هي معلمتان ذواتا قيم غير معلومة، ولو كان الأمر كذلك فلن يكون النموذج خطيًا في المعلمات.

والآن، افترض أن النموذج - لأي مجموعة معطاة من القيم للمعلمات في (8.1) و (8.2) والتي تتفق مع نظرية ذلك النموذج (مثلا لا يمكن أن يكون الميل الحدي للاستهلاك سالبًا - يمكن حله للحصول على المتغيرات الداخلية Y_{2t}, Y_{1t} بدلالة المتغيرات الخارجية $X_{4t}, ..., X_{1t}$ والأخطاء العشوائية $\varepsilon_{2t}, \varepsilon_{1t}$. وقد نستطيع، اعتمادًا على بعض المجموعات من القيم الممكنة للمعلمات، الحصول على حل صريح Explicit بطرق سهلة، على سبيل المثال، بوضع $a_2 = b_2 = 0$. وبالنسبة لبعض المجموعات الأخرى من قيم المعلمات قد نستطيع الحصول، فقط، على حل رقمي. قد نستطيع، مثلا، اشتقاق القيم العادية لـ Y_{1t} و Y_{2t} التي تناظر مجموعة محددة من القيم العددية للمتغيرات الخارجية والأخطاء العشوائية، فقط. ولكن، في أي من هاتين الحالتين، ستعتمد المتغيرات الداخلية Y_{1t} و Y_{2t}، كما تظهر بالنموذج، على قيم المتغيرات الخارجية والأخطاء العشوائية. وسنشير إلى هذه الظاهرة الآن بالقول أن حل النموذج للمتغيرات الداخلية يعتمد على المتغيرات الخارجية والأخطاء العشوائية أو أنه دالة فيها.

ولأن حل النموذج (8.1) و (8.2) للحصول على Y_{1t} و Y_{2t} يعتمد جزئيًا على الأخطاء العشوائية فلايمكننا، عمومًا، أن نفترض أن هذه المتغيرات الداخلية والأرقام

العشوائية مستقلة عن بعضها أو حتى غير مترابطة.* هذ النتيجة واضحة من المناقشة الموجودة في الفصل السابع. خذ الآن المتغير الموجود بين الأقواس والمناظر لـ a_2 نجد أن قيمته تعتمد على Y_{2t}, Y_{1t} و X_{1t}. ولما كانت قيم Y_{1t} و Y_{2t} تعتمد جزئيًا على الخطأ العشوائي فإن قيم هذا المتغير الذي بين الاقواس تعتمد ذاتها على الأخطاء العشوائية. ونتيجة لذلك، فإنها ستكون، عمومًا، مرتبطة بالأخطاء العشوائية. وبالمثل، فقد نستنتج ارتباط المتغير الموجود بين الأقواس والمناظر لـ b_2 بالأخطاء العشوائية، وللتعميم، نقرر أن أي دالة لمتغير داخلي واحد أو أكثر سوف ترتبط، عمومًا، بالأخطاء العشوائية.

بعض التوضيحات

قبل أن نتقدم في التحليل، ينبغي أن نوضح بعض النقاط المبهمة للقراء. افترض أن النموذج يحتوي على عدد M من المتغيرات الداخلية (Y_{1t}، . . . ، Y_{mt})، وعدد G من المتغيرات الخارجية X_{1t}،...، X_{Gt}. افترض، أيضًا، أن النموذج يحتوي على عدد M من الأخطاء العشوائية $\varepsilon_{1t}, \ldots, \varepsilon_{mt}$. افترض (كما في الحالة السابقة) أن النموذج يمكن حله للحصول على المتغيرات الداخلية بدلالة المتغيرات الخارجية والأخطاء العشوائية. ارمز لهذه الحلول كالتالي :

$$\begin{array}{l}
Y_{1t} = F_1\,(X_{1t}, \cdots, X_{Gt}, \varepsilon_{1t}, \cdots, \varepsilon_{Mt}) \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
Y_{Mt} = F_M\,(X_{1t}, \cdots, X_{Gt}, \varepsilon_{it}, \cdots, \varepsilon_{Mt}).
\end{array}$$

* بالنسبة للقراء الأكثر دراية بالاقتصاد القياسي، نلاحظ أن للمجموعة غير الخطية من المعادلات أكثر من حل واحد. سنكمل مناقشتنا في ظل الافتراض بأنه إذا كان لمعادلات النموذج أكثر من حل واحد، فإننا نستبعدها جميعاً باستثناء واحد منها وذلك عن طريق بعض القيود (غير المصرح بها) على المتغيرات في النموذج. على سبيل المثال، لايمكن أن تكون الأسعار سالبة وهلم جرا. وعلى سبيل التوضيح فإن المجموعة المكونة من المعادلتين $x^2 + y^2 = 20$ ، $|x| = 2|y|$ لها أربعة حلول (y=2, x=4) ، (y=2, x=-4) و (y=-2, x=4) وأخيرا (y=-2, x=-4). ولكن إذا كنا متأكدين من أن كلاً من X, Y ينبغي أن تكون موجبة فإن الحل الوحيد للنموذج هو (y=2, x=4).

وعمومًا، إذا كان النموذج غير خطي فإن الدوال أعلاه والتي تصف اعتماد المتغيرات الداخلية على الأخطاء العشوائية والمتغيرات الخارجية سوف لن تكون خطية. افترض أن النموذج يحتوي، أيضًا، على $\left(Y_{1t}^2 + Y_{3t}Y_{5t}\right)$، أو بتعمق أكثر على $K(Y_{1t}, ..., Y_{mt})$ بوصفه متغيرًا. حينئذ، فإن قيم حل النموذج لهذه المتغيرات $F_{1t}^2 + F_{3t}\,F_{5t}$ و $K(F_{1t}, ..., F_{mt})$، حيث بسطنا الرموز عن طريق التعبير عن $F_i(X_{1t}, ..., X_{Gt}, \varepsilon_{1t}, \varepsilon_m)$ بالرمز F_{it}، ومن الواضح أنه في النموذج غير الخطي دوال المتغيرات الداخلية على الأخطاء العشوائيةوالمتغيرات الخارجية، ولكنها ستكون مرتبطة، عادة، بالأخطاء العشوائية لأن قيمها تتحدد جزئيًا بوساطة قيم تلك الأخطاء.

ولأغراض التقدير، فقد نعرف المتغير الداخلي بأنه ذلك المتغير الذي يرتبط بالأخطاء العشوائية. لذلك فسوف نشير إلى المتغيرات المركبة Constructed التي هي عبارة عن دوال في واحد أو أكثر من المتغيرات الداخلية - بأنها دوال في المتغيرات الداخلية - أو، ببساطة، متغيرات داخلية. لاحظ أنه من غير المهم كون دالة المتغيرات الداخلية تحتوي، أيضًا، على متغيرات خارجية أم لا، لأن المتغير المركب سيكون مرتبطًا، عمومًا، بالأخطاء العشوائية، فقط، بسبب اعتماده على واحد أو أكثر من المتغيرات الداخلية. وبالمناسبة، نلاحظ أن النموذج المكون من المعادلتين (8.1) و (8.2) تحدد فيه قيم المتغيرات الداخلية الاربعة بدلالة المتغيرات الخارجية والأخطاء العشوائية، ولذلك، فإنه إذا كان يمكن التعبير عن Y_{1t} و Y_{2t} بدلالة المتغيرات الخارجية والأخطاء العشوائية. فإن المتغير المركب $(Y_{1t}Y_2 / X_{1t})$ يمكن التعبير عنه، أيضًا، بدلالة هذه المتغيرات نفسها.

توضيح آخر

في مقابل النموذج (8.1) و (8.2)، افترض النموذج ذا المعادلتين :

$$\log(Y_{1t}) = a_0 + a_1 Y_{2t}^3 + a_2 X_{1t} + \varepsilon_{1t}, \tag{8.3}$$

$$Y_{2t}^3 = b_0 + b_1[\log(Y_{1t})] + b_2 X_{2t} + \varepsilon_{2t}, \tag{8.4}$$

حيث إن Y_{1t} و Y_{2t} متغيران داخليان، X_{1t} و X_{2t} متغيران خارجيان، ε_{1t} و ε_{2t} الأخطاء العشوائية. افترض، أيضًا، أن الأخطاء العشوائية لها السمات المرغوب فيها كافة المذكورة في النموذج السابق.

قد يظهر هذا النموذج، عند اللمحة الأولى، على أنه نموذج غير خطي، ولكن، لأغراض التقدير فإن هذا النموذج يعد نموذجًا خطيًا، ولنرى ذلك، نعرف المتغيرين Z_{1t} و Z_{2t} على النحو التالي:

$$Z_{1t} = \log(Y_{1t}), Z_{2t} = Y_{2t}^{3}. \tag{8.5}$$

حينئذ، وبدلالة هذه المتغيرات، يمكن التعبير عن النموذج (8.3) و (8.4) على النحو التالي:

$$Z_{1t} = a_0 + a_1 Z_{2t} + a_2 X_{1t} + \varepsilon_{1t}, \tag{8.6}$$

$$Z_{2t} = b_0 + b_1 Z_{1t} + b_2 X_{2t} + \varepsilon_{2t}. \tag{8.7}$$

في هذا الشكل، يظهر النموذج على شكل نموذج مكون من معادلتين وهو خطي في المعلمات وفي المتغيرين Z_{1t} و Z_{2t}. لذا، يمكن تقدير معلماته بالطريقة المستخدمة في الفصل السابق. ونستنتج أنه، لأغراض التقدير، يكون النموذج الموجود في (8.3) و (8.4) نموذجًا خطيًا.

يمكن تحويل النموذج الموجود في (8.3) و (8.4) إلى نموذج خطي لأن عدد المعادلات، البالغ اثنين، يعادل عدد المتغيرات الداخلية. تذكر الآن أن النموذج في المعادلتين (8.1) و (8.2) له متغيرات داخلية أربعة. ولأن عدد المتغيرات الداخلية في ذلك النموذج يزيد عن عدد المعادلات، فإنه لايمكن التعبير عن النموذج بوصفه خطيًا في متغيرين داخليين، على سبيل المثال، دعنا نعرف Y_{1t} و Y_{2t} على النحو:

$$Z_{3t} = \left[\frac{Y_{1t} Y_{2t}}{X_{1t}}\right]; \quad Z_{4t} = (Y_{1t} - 2Y_{2t})^{2} e^{X_{3t}}. \tag{8.8}$$

عندئذ، إذا كان المطلوب التعبير عن النموذج (8.1) و (8.2) بوصفه نموذجًا من معادلتين بدلالة المتغيرين الداخليين Z_{3t} و Z_{4t} فإن المتغيرين Y_{1t} و Y_{2t} ينبغي أن

يعبر عنهما، أيضًا، بدلالة Z_{3t} و Z_{4t} . ويمكن التعبير عن Y_{1t} و Y_{2t} بدلالة Z_{3t} و Z_{4t} و (X_{1t} و X_{3t}) عن طريق حل المعادلات في (8.8) للحصول على Y_{1t} و Y_{2t} . ولكن، إذا تم ذلك فسيتضح أن كلا من Y_{1t} و Y_{2t} غير خطيتين في Z_{3t} و Z_{4t} . لتوضيح ذلك، دعنا نعبر عن هذه العلاقات على النحو التالي :

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= g_1(Z_{3t}, Z_{4t}, X_{1t}, X_{3t}), \\ Y_{2t} &= g_2(Z_{3t}, Z_{4t}, X_{1t}, X_{3t}), \end{aligned} \tag{8.9}$$

مع ملاحظة أن الدوال الموجودة (8.9) هي دوال غير خطية في Z_{3t} و Z_{4t}، حينئذ، يمكن التعبير عن النموذج الموجود في (8.1) و (8.2) بدلالة Z_{3t} و Z_{4t} على النحو التالي:

$$\begin{aligned} g_1(Z_{3t}, Z_{4t}, X_{1t}, X_{3t}) = a_0 &+ a_1 g_2(Z_{3t}, Z_{4t}, X_{1t}, X_{3t}) \\ &+ a_2 Z_{3t} + a_3 X_{2t} + \varepsilon_{1t}, \end{aligned} \tag{8.10}$$

$$\begin{aligned} g_2(Z_{3t}, Z_{4t}, X_{1t}, X_{3t}) = b_0 &+ b_1 g_1(Z_{3t}, Z_{4t}, X_{1t}, X_{3t}) \\ &+ b_2 Z_{4t} + b_3 X_{4t} + \varepsilon_{2t}, \end{aligned} \tag{8.11}$$

ومن الواضح أن النموذج الموجود في (8.10) و (8.11) ليس نموذجًا خطيًا في المتغيرات الداخلية.

تعميم

لأغراض التقدير، تبين النتائج السابقة أنه إذا كان النموذج يحتوي على عدد من المعادلات مساو لعدد المتغيرات الداخلية فإنه يمكن أن يعد نموذجًا خطيًا، بغض النظر عن المظهر الذي قد يوحي بغير ذلك. أما إذا كان عدد المتغيرات الداخلية أكبر من عدد المعادلات، فإن النموذج لايمكن، عمومًا، اختزاله إلى نموذج خطي. وبدقة أكثر، اعتبر نموذج المعادلات الآنية الذي يحتوي على عدد k من المعادلات، والتي تحدد قيمًا فريدة لكل من متغيراته الداخلية بدلالة المتغيرات الخارجية والأخطاء العشوائية.* افترض أن هذا النموذج نموذج خطي في المعلمات. افترض، أيضًا، أن عدد

* مرة أخرى، فإن النموذج غير الخطي سيحدد تحديدًا فريدًا قيم جميع متغيراته الداخلية إذا استبعدت جميع الحلول ماعدا احداها وذلك بسبب القيود المختلفة التي ينبغي أن تحققها تلك المتغيرات.

المتغيرات التي تظهر في النموذج وتعتمد على واحد أو أكثر من المتغيرات الداخلية k^*. افترض أخيراً أنه لا يمكن التعبير عن أي من المتغيرات k^* بوصفه مركباً خطياً من المتغيرات الأخرى (بمعنى أنها لا تعاني تعدد العلاقات الخطيـة)* حينئذ فإن النموذج غير خطي إذا كانـت $k^*>k$. أما إذا كانـت $k^*=k$ فإن النموذج يمكن اعتباره نموذجاً خطياً لأغراض التقدير. ولم نهتم بالحالة $k^*<k$ لأن هذه الحالة تناظر نظام المعادلات الزائد التحديـد overdetermined system (أي أنه يوجد عدد من المعادلات أكبر من عدد المتغيرات الداخلية). فإذا لم تكن بعض المعادلات في مثل هذه النماذج تكراراً لمعادلات أخرى فإن هذه النماذج لن تكون، عمـوماً، متسقة داخلياً.**

(٨-٢) مشكلة التميز

توضيح

اعتبر النموذج التالي ذي المعادلتين

$$Y_{1t} = a_0 + a_1 g(Y_{2t}) + a_2 X_t + \varepsilon_{1t}, \tag{8.12}$$

$$Y_{2t} = b_0 + b_1 Y_{1t} + \varepsilon_{1t}, \tag{8.13}$$

حيث إن $g(Y_{2t})$ دالة غير خطية معلومة في Y_{2t}، وأن X_t متغير خارجي يفترض أنه مستقل عن الأخطاء العشوائية ε_{1t} و ε_{2t} لجميع قيم t و s. افترض أن الأخطاء العشوائية تحقق جميع الصفات المرغوب فيها. فلها متوسطات صفرية، وتباينات ثابتة، وأخيراً ليست مرتبطة ذاتياً.

---

* وضع هذا الإفتراض من أجل استبعاد التكرارات غير المفيدة، على سبيل المثال، فإنه بدون هذا الافتراض، فإن النموذج الذي يحتوي على Y_{1t} ، Y_{2t} ، $2Y_{1t}$ و $3Y_{2t}$ سيوصف بأنه يحتوي على أربعة متغيرات داخلية.

** على سبيل توضيح بسيط، فإن النظام التالي المكون من معادلتين لمتغير واحد $3+2X=5$ و $X+10=5$، ليس متسقاً لأن المعادلة الأولى تتضمن أن $X=1$ بينما المعادلة الثانية تتضمن أن $X=5$.

تبين المناقشة الموجودة في الفصل السابع أن معلـمـات (8.12) ليست مميزة لأن (8.12) تحتوي على متغير داخلي واحد في الطرف الأيمن من المعادلة ولـكـن لاتستبعد أي من المتغيرات المحددة مسبقًا ولذلك، وفقًا لما جاء بالفصل السابـع، فإن محاولة تقدير (8.12) باستخدام م ص م ستفشل بسبب وجود الارتباط الخطي المتعدد التام في المرحلة الثانية. ولكن النموذج الموجود فـي (8.12) و (8.13) ليس نموذجًا خطيًا، ولذلك لاتنطبق النتائج المرتبطة بالتميز هنا، وبالتحديد فسنرى أنه في ظل وجود بعض الافتراضات الإضافية العامة تكون (8.12) مميزة.

لرؤية ذلك، افترض أن النموذج المكون من المعادلتين (8.12) و (8.13) يحدد قيم المتغيرات الداخلية (Y_{1t} و Y_{2t}) تحديدًا مفردًا بدلالة المتغير الخارجي (X_t) والأخطاء العشوائية ε_{1t} و ε_{2t}. ولتبسيط الرموز دع :

$$Z_t = g(Y_{2t}). \tag{8.14}$$

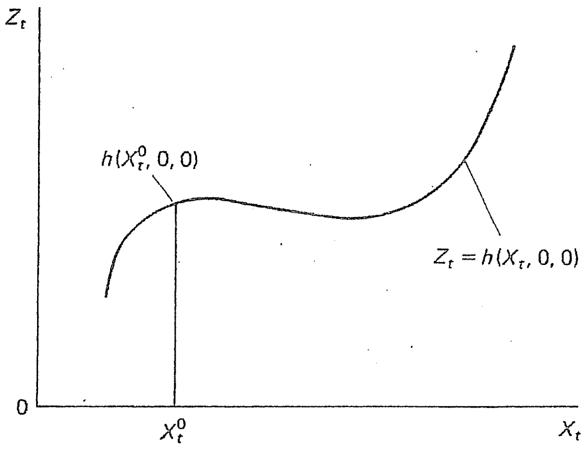
حينئذ، إذا كان النموذج يحدد قيمة Y_{2t} بدلالة X_t ، ε_{1t} و ε_{2t} فإنه يحدد، أيضًا، قيمة Z_t بدلالة هذه المتغيرات ونرمز لهذا الاعتماد على النحو :

$$Z_t = h(X_t, \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}), \tag{8.15}$$

ويلاحظ أنه، طالما أن النموذج غير خطي، فإن الدالة h في (8.15) ستكون، عمومًا، غير خطية. وإذا كانت ε_{1t} و ε_{2t} مساويتين تمامًا (بصفة دائمة) للصفر فإنه يمكن تحديد Z_t كلية بوساطـة X_t. لذلك إذا رسمت مشاهدات Z_t و X_t، فإنـه يمكن تتبع منحنى يتوصل إلى مـعـادلـتـه مـن خـلال (8.15) عن طريق وضـع $\varepsilon_{1t} = \varepsilon_{2t} = 0$ ، أي :

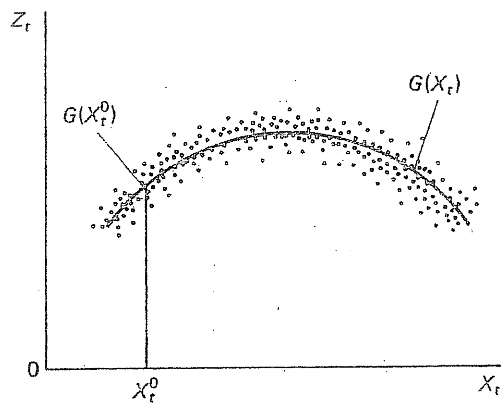
$$Z_t = h(X_t, 0, 0). \tag{8.16}$$

وعلى سبيل التوضيح، فقد تتبعنا المنحنى في الشكل (٨-١) وقد رسم عمدًا في شكل غير خطي، لأن النموذج غير الخطي (8.12) و (8.13) يتضمن، عمومًا، أن اعتماد المتغير $Z_t = g(Y_{2t})$ على المتغير الخارجي X_t لن يكون خطيًا.



شكل رقم (٨-١)

نتناول الآن الحالة الأكثر واقعية حيث إن ε_{1t} و ε_{2t} ليستا مساويتين تمامًا ودائمًا للصفر. في هذه الحالة، تتضمن (8.15) أن Z_t لن تحدد كلية بوساطة X_t. ولكن مرة أخرى، بالاشارة إلى (8.15) لن تكون Z_t مستقلة عن X_t لأن X_t هو أحد العناصر المحددة لـ Z_t. ولتوضيح ذلك، افترض أنه توجد لدينا عينة لانهائية من المشاهدات عن Z_t و X_t. حينئذ فإن مناقشتنا تشير إلى أنه إذا رسمنا هذه المشاهدات في شكل بياني فإن شكل الانتشار لهذه النقاط سيكون منحنى يعكس الاعتماد الجزئي لـ Z_t على X_t ويظهر مثل هذا الشكل في الشكل رقم (٨-٢).



شكل رقم (٨-٢)

بالنسبة للشكل رقم (٨-٢) نلاحظ أولا : أن جميع النقاط لاتقع علـى المنحنى المشار إليه لأن X_t هي، فقط، أحد العوامل المحددة لـ Z_t. ثانيًا أن هناك عددًا من الطرق التي يمكن للفرد أن يتتبع بها منحنى ما بدلالة شكل الانتشـار. والمنحنى المشار إليه في شكل رقم (٨-٢) هو المنحنى الذي يعطي القيمة المتوسطة لـ X_t والمناظرة لقيم معطاة لـ X_t. على سبيل المثال، تكون القيمة المتوسطة لـ Z_t المناظرة لـ $X_t = X_t^0$ هي ارتفاع المنحنى $G(X_t^0)$. ثالثًا : رسمنا عن عمد المنحنى في الشكل رقم (٨-٢) بطريقة مختلفة عن المنحنى الممثل في (٨-١) وسبب ذلك هو أن المنحنى كما حددناه بوساطة شكل رقم (٨-١) سيكون مختلفًا، عمومًا، عن منحنى العلاقة المتوقعة في شكل رقم (٨-٢) وعلى الرغم من أن ذلك الأمر قد يبدو غير منطقي إلا أنه يمكن توضيحه، فعلى سبيل المثال، طبقًا للقيمة المعطاة لـ X_t وهي (X_t^0) تكون القيمة المتوسطة لـ Z_t من (8.15) هي :

$$E(Z_t)=E[h(X_t^0, \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})]. \tag{8.17}$$

فإذ كانت الدالة h في (8.17) غير خطية في كل ε_{1t} و ε_{2t}، فإن نتائجنا في الملحق ب (B) من الفصل الأول وبالتحديد، (1B.12) تتضمن :

$$E[h(X_t^0, \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})] \neq h(X_t^0, E(\varepsilon)_{1t}, E(\varepsilon)_{2t}) = (X_t^0, 0, 0). \tag{8.18}$$

لذلك، تكون قيمة المنحنى في الشكل (٨-١) التي تناظر $X_t = X_t^0$ [أي $(h(X_t^0, 0, 0)$] ليست مساوية للقيمة المناظرة للمنحنى في الشكل (٨-٢) والتي تساوي :

$$G(X_t^0)=E[h(X_t^0, \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})]. \tag{8.19}$$

وكما ذكر فإن المنحنى في الشكل رقم (٨-٢) يعطي القيمة Z_t المناظرة لأي قيمة لـ X_t. وبتعريف:

$$V_t = Z_t - G(X_t). \tag{8.20}$$

حينئذ، فإن القيمة المتوسطة V_t المناظرة لأي قيمة معطاة لـ X_t هي الصفر، على سبيل المثال، عندما يكون X_t هي X_t^0، تكون القيمة المتوسطة لـ V_t كالتالي :

$$E[V_t]=E[Z_t]-G(X_t^0)=G(X_t^0)-G(X_t^0)=0. \tag{8.21}$$

نتذكر من المبحث (٦-٣) في الفصل السادس، أنه، طالما أن القيمة المتوسطة لـ V_t

هي الصفر لأي قيمة معطاة لـ X_t، فإن القيمة المتوسطة العامة لـ V_t تكون، أيضًا، صفرًا، كما أن V_t غير مرتبط بـ X_t.

ويمكن إعادة ترتيب حدود (8.20) على النحو :

$$Z_t = G(X_t) + V_t. \tag{8.22}$$

وفي الحقيقة، فإن العلاقة في (8.22) تشابه، تمامًا، تلك العلاقات التي استخدمناها في اشتقاق نماذج الانحدار متعددة الحدود في المبحث (٥-٣). وبالتحديد يمكننا من (8.22) أن نتبين أن القيمة رقم t لـ Z_t مرتبطة ارتباطًا غير خطي بالقيمة رقم t للمتغير المستقل X_t وللحد V_t الذي يمكن اعتباره خطأً عشوائيًا، له قيمة متوسطة صفرية تناظر أي قيمة معطاة للمتغير المستقل، وللتوضيح، افترض كما فعلنا في المبحث (٥-٣) أن :

$$G(X_t) \doteq b_0 + b_1 X_t + b_2 X_t^2 + \cdots + b_k X_t^k. \tag{8.23}$$

حينئذ، من (8.22)، يكون لدينا :

$$Z_t \doteq b_0 + b_1 X_t + b_2 X_t^2 + \cdots + b_k X_t^k + V_t. \tag{8.24}$$

ولتبسيط عرضنا للموضوع، نفترض أن العلاقة بين (8.23) و (8.24) علاقة تساو ونؤكد هنا على أن هذا الافتراض، فقط، من اجل عرض الموضوع، وسيتضح أن النتائج أدناه لا تعتمد على هذا الافتراض.

افترض أن لدينا الآن عدد n من المشاهدات حول متغيرات النموذج (8.12) و (8.13) . حينئذ، طالما أن Z_t دالة معلومة في Y_t، أي $Z_t = g(Y_t)$ فإنه يمكننا أن نحصل على عدد n مشاهدات حول Z_t. ويمكننا، لذلك، اعتبار (8.24) نموذج انحدار، وباستخدام هذا النموذج، تكون القيمة المحسوبة لـ Z_t هي :

$$\hat{Z}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_t + \hat{b}_2 X_t^2 + \cdots + \hat{b}_k X_t^k, \tag{8.25}$$

حيث حصلنا على $\hat{b}_0$ ،... ، $\hat{b}_k$ بوساطة الطريقة المعتادة.

اعتبر الآن مشكلة تقدير (8.12). يكون المتغير الداخلي في الجانب الأيمن هو $g(Y_t)$، وهو متغيرنا Z_t. ولتطبيق منهج م ص م للمعادلة (8.12)، يمكننا إحلال القيمة المحسوبة لـ Z_t (أي $\hat{Z}_t$) محل Z_t. فإذا قمنا بعمل ذلك، فإن المرحلة الثانية

لن تتسم بوجود تعدد العلاقات الخطية، وطالما أن اعتماد $\hat{Z}_t$ على X_t ليس خطيًا، فإن $\hat{Z}_t$ لن تكون دالة خطية تامة في X_t. والإيحاء هو أن معلمات (8.12) يمكن أن تقدر باتساق ولذا تكون المعادلات مميزة.

تنقيح

افترضنا، في التحليل السابق، أن دالة القيمة المتوسطة $G(X_t)$ في (8.22) يمكن التعبير عنها في شكل متعدد الحدود في X_t. نبين في هذا المبحث أن هذا الافتراض ليس ضروريًا للتمييز، ومن ثم للتقدير المتسق للمعادلة (8.12). وسنبين، أيضًا، أنه إذا كان النموذج (8.12) و (8.13) خطيًا، بمعنى أن $g(Y_{2t}) = Y_{2t}$، فإن المعادلة (8.12) لايمكن تقديرها باتساق باستخدام طريقة مشابهة للطريقة الموصوفة من قبل وبالتحديد افترض أن $g(Y_{2t}) = Y_{2t}$. افترض، أيضًا، أن Y_{2t} ينحدر على قوى X_t (مثلا، X_t، X_t^2، ...، X_t^k) وأن القيمة المحسوبة لـ Y_{2t} يحصل عليها على النحو :

$$\hat{Y}_{2t} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_t + \cdots + \hat{\alpha}_k X_t^k . \tag{8.26}$$

حينئذ، فإن تطبيق م ص م لـ (8.12) بعد إحلال $\hat{Y}_{2t}$ محل Y_{2t} يؤدي إلى الحصول على مقدرات غير متسقة.

من الملائم أن نوضح النتيجة الأخيرة في البداية، ثم نوضح بعد ذلك النتيجة الأولى. بداية، نلاحظ أنه إذا كانت $g(Y_{2t}) = Y_{2t}$، فإن حل النموذج الخطي (8.12) و (8.13) لـ Y_{2t} (أي معادلة الشكل المختزل) قد يمكن التعبير عنها على النحو التالي :

$$Y_{2t} = \pi_0 + \pi_1 X_t + \psi_t , \tag{8.27}$$

حيث تكون القيمة المتوسطة للمتغير ψ_t لأي قيمة معطاة من X_t هي الصفر $E(\psi_t = 0)$. * وهكذا (بالنسبة للحالة الخطية)، تكون القيمة المتوسطة لـ Y_{2t} المناظرة

* ينبغي أن يكون واضحا من المبحث (٧-٤) أن ψ ماهي إلا توليفة خطية من الأخطاء العشوائية ε_{1t} و ε_{1t}.

لقيمة معطاة من X_t أي $(\pi_0 + \pi_1 X_t)$. وينتج عن ذلك أن نموذج الانحدار الذي يربط Y_{2t} بـ X_t ، X_t^2 ، ... ، X_t^k يمكن التعبير عنه على النحو التالي :

$$Y_{2t} = \pi_0 + \pi_1 X_t + \pi_2 X_t^2 + \cdots + \pi_k X_t^k + \psi_t\,, \qquad (8.28)$$

حيث إن $\pi_2 = \pi_3 = \cdots = \pi_k = 0$

دع القيمة المحسوبة لـ Y_{2t} من انحدار Y_{2t} على X_t ، X_t^2 ، ... ، X_t^k هي :

$$\hat{Y}_{2t} = \hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_1 X_t + \hat{\pi}_2 X_t^2 + \cdots + \hat{\pi}_k X_t^k\,, \qquad (8.29)$$

حينئذ، من (8.28) ومن افتراضات النموذج (8.12) والنموذج (8.13) يكون لدينا : $E(\hat{\pi}_2) = E(\hat{\pi}_3) = \cdots = E(\hat{\pi}_k) = 0$.* ويمكن، أيضًا، إثبات أنه، في ظل تحقق بعض الافتراضات الفنية المعقولة فـإن $\hat{\pi}_0$ ، $\hat{\pi}_1$ ، ... ، $\hat{\pi}_k$ هي مقدرات متسقة لمعلماتـهـا المتصلة بها، لذلك، فإن $\hat{\pi}_2$ ، ... ، $\hat{\pi}_k$ تؤول في الاحتمال إلى الصفر. ويتضمن هذا أنه، إذا كانت $g(Y_{2t}) = Y_{2t}$ وكان حجم العينة لانهائيًا فإن $\hat{Y}_{2t}$ سوف تؤول إلى $(\pi_0 + \pi X_t)$ باحتمال قدره الواحد الصحيح. لذلك إذا كان النموذج خطـيًا، وإذا كان حجم العينة لانهائيًا، فإن طريقة م ص م بعد إحلال $\hat{Y}_{2t}$ محل Y_{2t} في (8.29) ستتسم بوجود تعدد العلاقات الخطية التام في المرحلة الثانية وذلك باحتمال قدره الواحد الصحيح. وستفشل الطريقة، ولن يكون المنهج مـتـسـقًا. ولكن، لاحظ في حالة العينة النهائية (المحدودة) يمكن تطبيق طريقة م ص م لأن $\hat{Y}_{2t}$ في (8.29) لن يكون مرتبطًا ارتباطًا خطيًا تامًا مع X_t. إلا أننا نؤكد هنا أن المنهج ليس متسقًا، لأن خاصية الاتساق ترتبط بوجود عينة لانهائية.

اعتبر الآن الحالة غير الخطية حيث $g(Y_{2t}) \neq Y_{2t}$. وقد أظهرنا، فعلاً، في هذه الحالة أن $g(Y_{2t})$ يمكن التعبير عنها [انظر (8.22)] على النحو التالي :

$$g(Y_{2t}) = G(X_t) + V_t\,, \qquad (8.30)$$

حيث إن القيمة المتوسطة لـ V_t المناظرة لأي قيمة من قيم X_t تساوي الصفر، وقد أشرنا،

---

* يناظر النموذج فـي (8.28) النموذج الخطي العام الذي اعتبرناه في الفصل الرابع. في ذلك الـفـصـل، أوضحنا، بالنسبة لذلك النموذج الذي اعتبرناه، أن مقدرات المعلمات تتسم بعدم التحيز.

أيضًا، إلى أن دالة القيمة المتوسطة $G(X_t)$ سوف تكون، عادة، غير خطية في X_t.

وإذا كون انحدار لـ $g(Y_{2t})$ على القوى k الأولى من X_t، وإذا كان حجم العينة لا نهائيًا فإن المنحنى المقدر الناتج ، أي :

$$\widehat{g(Y_{2t})} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_t + \cdots + \hat{\alpha}_k X_t^k \tag{8.31}$$

سوف يكون أفضل مقارب لمتعدد الحدود من الدرجة k للمنحنى $G(X_t)$.* أما إذا كانت $G(X_t)$ غير خطية فإن افضل مقارب لمتعدد الحدود لن يكون خطيًا، عمومًا. وعادة، يتحسن التقريب بأخذ درجات أعلى لمتعدد الحدود. وينتج عن ذلك أنه إذا كان حجم العينة لانهائـيًا فلن يتحول $\widehat{g(Y_{2t})}$ في (8.31)، عمـومًا، إلى دالة خطية في X_t. ونتيجة لذلك، لا نتوقع أن تفشل طريقة م‌ص‌م في حالة العينة اللانهائية.

---

* للقراء المتخصصين، نرمز إلى متعدد الحدود من الدرجة k في X بالرمز $p(X_t, \alpha)$ حيث إن α ترمز إلى معلماته. حينئذ فإن طريقة المربعات الصغرى سوف توجد α لتدنية :

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left[g(Y_{2t}) - P(X_t, \alpha) \right]^2$$

أو، بهدف التوضيح، L/n. وبتذكر أن $V_t = g(Y_{2t}) - G(X_t)$ فإن L/n يمكن التعبير عنها :

$$\frac{L}{n} = \frac{\sum [g(Y_{2t}) - G(X_t) + G(X_t) - P(X_t, \alpha)]^2}{n}$$
$$= \frac{\sum V_t^2}{n} + 2\frac{\sum D_t V_t}{n} + \frac{\sum D_t^2}{n}$$

حيث إن $D_t = G(X_t) - P(X_t, \alpha)$. لاحظ أن قيمة D_t محددة بوساطة قيمـة X_t. وبالعودة إلى (8.30) القيمة المتوسطة لـ V_t التي تناظر أي قيمة من قيم X_t هي الصفر. وينتج عن ذلك أن القيمة المتوسطة لـ V_t والمناظرة لأي قيمة من قيـم D_t هي الصفر. ولذلك فتشير مناقشتنا في المبـحـث (٦-٣) أن V_t غير مرتبطة بـ D_t، وبسبب ذلك، يمكن إثبات أنه، في ظل تحقيق مجموعة من الافتراضات الإضافية المعقولة، فإن النهاية الاحتمالية لحاصل ضرب التقـاطـع (cross product) أعلاه يساوي الصفر. لذلك ينبغي أن يكـون واضحًا، أنه في حالة العينة اللانهائية فإن L/n تصغر عن طريق اختيار α لتدنيه $\Sigma D_t^2 / n$ ، طالما أن هذا هو المكون الوحيد لـ L/n الذي يتضمن α.

قاعدة لتمييز النماذج غير الخطية

ينبغي أن يكون القارىء الآن مقتنعًا بأن قواعد التمييز للنماذج الخطية لايمكن أن تطبق بدون تعديل على النماذج غير الخطية. ونعطي الآن القواعد المناظرة للنماذج غير الخطية، بعدئذ، سنعطي التوضيحات التي تبين أن هذه القواعد معقولة.

افترض نموذجًا مكونًا من عدد M من المعادلات، يكون خطيًا في المعلمات لكنه غير خطي في المتغيرات الداخلية، وكل معادلة من هذا النموذج لها علاقة بمتغير اقتصادي معين. ويظهر هذا المتغير، عادة، في الجانب الايسر من المعادلة، ويكون معاملها ضمنيًا هو الواحد الصحيح.

سنشير إلى مثل هذا المتغيرات بالمتغيرات الداخلية الأساسية. على سبيل المثال تكون المتغيرات الداخلية الأساسية في النموذج (8.12) و (8.13) هي Y_{1t} و Y_{2t}. دعنا نشير إلى جميع المتغيرات الداخلية الأخرى التي تظهر في النموذج بالمتغيرات الداخلية الإضافية. على سبيل المثال، فإن النموذج (8.12) و (8.13) يحتوي على متغير داخلي إضافي واحد وهو $g(Y_{2t})$. تتضمن مناقشتنا في المبحث (٨-١) أنه إذا لم يحتو النموذج على أي متغيرات داخلية إضافية فيعتبر، ولأغراض التقدير، نموذجًا خطيًا.

افترض أن الأخطاء العشوائية للنماذج لها متوسطات صفرية، وغير مرتبطة ذاتيًا، ومستقلة عن جميع قيم المتغيرات الخارجية التي تظهر في النموذج. افترض، أيضًا، أنه يمكن التعبير عن المتغيرات الداخلية الأساسية للنموذج بدلالة الأخطاء العشوائية والمتغيرات الخارجية والمتغيرات الداخلية المبطأة (ان وجدت) والمتغيرات الداخلية الإضافية. اعتبر، على سبيل المثال، النموذج الموجود في (8.12) و (8.13). إن شكل المعادلة (8.12) يتخذ الشكل المطلوب حيث إنه لايظهر في جانبها الايمن أي من المتغيرات الداخلية الأساسية. ويمكن، بسهولة، الوصول إلى تعبير مشابه لـ Y_{2t} عن طريق التعويض عن قيمة Y_{1t} من (8.12) في (8.15) .

أخيراً، افترض أن هناك حلا وحيدًا للنموذج بالنسبة للمتغيرات الداخلية الأساسية بدلالة المتغيرات الخارجية والأخطاء العشوائية والمتغيرات الداخلية المبطأة. فإذا لم يتحقق هذا الافتراض فإن النموذج لن يكون كاملا بمعنى أنه لن يحدد أو يفسر المتغيرات التي بنى النموذج لتفسيرها.

في ظل هذا الافتراضات، وبعض الافتراضات الفنية الأخرى، يمكن إثبات أن معلمات معادلة معينة من النموذج (مثلا، رقم i) يمكن تقديرها باتساق، ولذلك، تكون تلك المعادلة مميزة إذا كان :

$$A_{1i} \geq A_{2i}, \qquad (8.32)$$

حيث إن A_{2i} عدد المتغيرات الداخلية الأساسية التي تظهر في الجانب الأيمن من المعادلة رقم i و A_{1i} عدد المتغيرات المحددة مسبقًا والمتغيرات الداخلية الإضافية التي تظهر في النموذج والتي لا تظهر في المعادلة رقم i، ويعرف المتغير المحدد مسبقًا في النماذج غير الخطية كالنموذج تحت الدراسة بأنه أي متغير يظهر في النموذج غير مرتبط بالقيم الحالية للأخطاء العشوائية. لذلك، فإن المتغير المحدد مسبقًا سوف يكون أي متغير يظهر في النموذج ولاتعتمد قيمته على القيم المعاصرة لواحد أو أكثر من المتغيرات الداخلية الأساسية (أي أن قيمته ستعتمد، فقط، على المتغيرات الخارجية والمتغيرات الداخلية المبطأة).

فإذا أخذنا قاعدة العد في (8.32) بذاتها، فإنها تكون شرطًا ضروريًا لتمييز المعادلة رقم i في النموذج موضوع الاهتمام. ويعني هذا أنه إذا كانت المعادلة رقم i مميزة فإن العلاقة (8.32) ستنطبق ولكن العلاقة (8.32) لا تضمن بذاتها أن تكون المعادلة رقم i، في الحقيقة، مميزة. وفي النماذج غير الخطية، تكون الشروط «الإضافية الفنية» التي ينبغي أن تتحقق لضمان أن المعادلة المعطاة في النموذج مميزة تكون صعبة التحديد، ومن النادر الاهتمام بها في التطبيق ويتضمن المنهج العادي اختبار (8.32) وعند تحقق (8.32)، نفترض أن الشروط «الفنية الإضافية» التي تكون كافية لتحقيق تمييز المعادلة متحققة.

تختلف قاعدة العد المعطاة (8.32) عن تلك التي تقترحها نتائج الفصل

السابع، لأن المتغيرات الداخلية الإضافية تجمع مع المتغيرات المحددة مسبقًا وليس مع المتغيرات الداخلية الأساسية. وقبل محاولة تبرير هذه القاعدة في (8.32)، دعنا نطبق هذه القاعدة بالنسبة للنموذج في (8.12) و (8.13) بالنسبة للمعادلة (8.12) لدينا (بوضع i=1)، $A_{11} = 0$، طالما لم يتم استبعاد أي من المتغيرات المحددة مسبقًا من المعادلة وأن $A_{21} = 0$، وطالما أنه لاتظهر المتغيرات الداخلية الأساسية في الجانب الايمن من المعادلة، لذلك تتحقق (8.32) ($0 \geq 0$) وهكذا بافتراض أن الشروط الفنية الإضافية متحققة تكون (8.12) مميزة، وبالنسبة للمعادلة (8.13) لدينا $A_{12} = 2$ وطالما أن $g(Y_{2t})$ و X_2 مستبعدتان من (8.13) ، و $A_{22} = 1$، طالما أن Y_{1t} تظهر في الجانب الايمن. لذلك تكون $A_{12} \geq A_{22}$، وهكذا مع افتراض تحقق الشروط الفنية الإضافية فإن المعادلة (8.13) مميزة أيضًا.

تبرير القاعدة

دعنا الآن نحاول أن نوضح لماذا نجمع المتغيرات الداخلية الإضافية في مجموعة واحدة مع المتغيرات المحددة سلفًا لأغراض التمييز. اعتبر مرة أخرى النموذج المبسط في (8.12) و (8.13) ، مع ملاحظة أن هذا النموذج نموذج غير خطي بسبب وجود المتغير الداخلي الإضافي $g(Y_{2t})$، غير أننا قد أثبتنا، أنه في (8.30)، يمكن التعبير عن $g(Y_{2t})$ باعتباره مجموع مقدارين. الأول هو دالة غير خطية في X_t [$G(X_t)$] والثاني هو الخطأ العشوائي V_t بقيمة متوسطة تساوي صفرًا تناظر أي قيمة لـ X_t وقد بينا أنه يمكن تقريب $G(X_t)$ بدلالة الانحدار متعدد الحدود لـ $g(Y_{2t})$ على قوى X_t [انظر، على سبيل المثال (8.31)].

إذا تم إحلال (8.30) في (8.12) فإن النموذج ذي المعادلتين (8.12) و (8.13) يمكن التعبير عنه على النحو :

$$Y_{1t} = a_0 + a_1 G(X_t) + a_2 X_t + w_t, \tag{8.33}$$

$$Y_{2t} = b_0 + b_0 Y_{1t} + \varepsilon_{2t}, \tag{8.13}$$

حيث إن $w_t = \varepsilon_{it} + a_1 V_t$. وطالما أن w_t هي مركب خطي من ε_{1t} و V_t فإنه يمكن

اعتباره خطأ عشوائيًا بمتوسط صفر تناظر أي قيمة لـ X_t. لذا، فإن V_t غير مرتبطة بأي من X_t أو $G(X_t)$.

ويمكن اعتبار (8.33) و (8.13) نموذجًا خطيًا مكونًا من معادلتين في المتغيرات التابعة Y_{1t} و Y_{2t}، والتي تتضمن الحد الثابت $G(X_t)$ و X_t بوصفها متغيرات محددة مسبقًا. لاحظ أن هذا النموذج يحتوي على معلمات الانحدار نفسها كالنموذج الأصلي (8.12) و (8.13) (أي a_0، a_1، a_2، b_0 و b_1). لاحظ، أيضًا، أنه، بخلاف الأخطاء العشوائية، يمكن الحصول على النموذج من النموذج الأصلي عن طريق إحلال المتغير الداخلي الإضافي $G(Y_t)$ بوساطة «دالته المتوسطة» في X_t، أي $G(X_t)$، ومن الواضح أنه إذا كانت (8.33) و (8.13) مميزتين ، فإن (8.12) و (8.13) يجب أن تكونا مميزتين أيضًا، حيث إن لهما المعلمات نفسها.

ولأغراض الشرح ،سوف تستمر مناقشتنا عن طريق افتراض إمكانية تحديد المشاهدات عن $G(X_t)$ في حالة مشاهدة X_t. هذا الافتراض ليس ضروريًا، إلا أنه يبسط المناقشة. وإحدى الطرق لتبرير هذا الافتراض هي افتراض $G(X_t)$ يمكن تقريبها تقريبًا كاملا بمتعدد الحدود من الدرجة k في X_t الذي يمكن تقديره باتساق عن طريق انحدار $g(Y_t)$ على قوى X_t. على سبيل المثال، في ظل هذه الافتراضات، ستحدد قيمة $G(X_t)$ من قيمة X_t [انظر (8.31)] على النحو :

$$G(X_t)=\hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_1 X_t+\cdots+\hat{\alpha}_k X_t^k. \tag{8.34}$$

وطالما أننا نعتبر، فقط، حالة العينة الكبيرة $(n=\infty)$ فيمكننا أن نسمح «بقيم كبيرة» جدًا لـ k.

وإذا توافرت المشاهدة عن $G(X_t)$، فإن النموذج الموجود في (8.33) و (8.13) يدخل ضمن إطار النماذج الخطية المعتبرة في الفصل السابع. بالتحديد، ومع تحقق شروط فنية إضافية، نرى أن (8.33) مميزة لأن الجانب الأيمن من المعادلة يحتوي، فقط، على متغيرات محددة مسبقًا. وبالمقابل (وبدلالة رموز الفصل السابع)، تكون (8.33) مميزة طالما أن $k_2 \geq k_1$، لأن كلا من k_1 و k_2 صفر، حيث إن k_2 هي عدد المتغيرات المحددة مسبقًا والمستبعدة من المعادلة، و k_1 هو عدد المتغيرات

الداخلية في الجانب الأيمن. لاحظ أن هذه النتيجة المرتبطة بـ k_1 و k_2 تكون متماثلة مع النتيجة السابقة المرتبطة بـ A_{11} و A_{21} ويمكن الحصول عليها من المعادلات الأصلية (8.12) و (8.13) من خلال تصنيف المتغير الداخلي الإضافي $g(Y_{2t})$ بوصفه متغيرًا محددًا مسبقًا. وبالمثل فيما يتصل بـ (8.13)، يكون لدينا $k_2 \geq k_1$ (طالما أن $k_2 = 2[G(X_t)]$ و X_2 مستبعدة) و $k=1$ (طالما أنه Y_{1t} مشتمل عليها) لاحظ، مرة أخرى، أن هذه النتيجة يمكن الحصول عليها عن طريق تصنيف $g(Y_{2t})$ بوصفه متغيرًا محددًا مسبقًا في النماذج غير الخطية (8.12) و (8.13) .

تعميم لتبرير قاعدة التمييز

يمكن تعميم النتيجة السابقة. ولتوضيح ذلك، نعطي أولا نتيجة أكثر عمومية تناظر (8.30) .

عمومًا، قد يحتوي النموذج الخطي المكون من m من المعادلات من الشكل الذي نعالجه على عديد من متغيرات داخلية إضافية، إضافة إلى متغيرات محددة مسبقًا. وفي ظل توفر بعض الافتراضات المعقولة، يمكن التعبير عن كل من هذه المتغيرات الداخلية الإضافية على شكل مجموع لمقدارين إحداهما [يتشابه مع $G(X_t)$ السابق] يعطي القيمة المتوسطة للمتغير الإضافي المناظر للقيم المعطاة من المتغيرات المحددة مسبقًا، والآخر هو الخطأ العشوائي ذو القيمة المتوسطة الصفرية لأي مجموعة قيم معطاة للمتغيرات المحددة مسبقًا. وعلى سبيل التوضيح، افترض أن $(Y_{1t}Y_{2t})$ متغير داخلي إضافي و X_{1t}، X_{2t}، X_{3t} هي المتغيرات المحددة مسبقًا للنموذج غير الخطي. حينئذ، وفي ظل افتراضات معقولة، يمكن التعبير عن $(Y_{1t}Y_{2t})$ على النحو التالي :

$$(Y_{1t}Y_{2t}) = H(X_{1t}, X_{2t}, X_{3t}) + \psi_t, \tag{8.35}$$

حيث إن $H(X_{1t}, X_{2t}, X_{3t})$ دالة في X_{1t} ، X_{2t} و X_{3t}، و ψ_t متغير له قيمة متوسطة صفرية مناظرة لأي من قيم المجموعة المعطاة لـ X_{1t} ، X_{2t} و X_{3t} . فعلى سبيل المثال، إذا كانت $H(X_{1t}, X_{2t}, X_{3t}) = \left(X_{1t}^2 + X_{2t}\right)e^{X_{3t}}$ ، وإذا كانت $H_{1t}=3$ ، $X_{2t}=5$ و $X_{3t}=3$

ستكون القيمة المتوسطة المقابلة لـ $Y_{1t}Y_{2t}$ هي :

$$H(3,5,0)=(9+5)e^{0}=14. \qquad (8.36)$$

وبالمقابل، افترض أن لدينا عينة من المشاهـدات عـن X_{1t} ، X_{2t} ، X_{3t} ، Y_{1t} وY_{2t} . وبفرض أن المشاهدات عـن X_{1t} ، X_{2t} و X_{3t} قد استخدمت كمـا فـي التوضيح السابق لتكوين مشاهدات عن H_t حيث :

$$H_t=\left(X_{1t}^2+X_{2t}\right)e^{X_{3t}} \qquad (8.37)$$

حينئذ، إذا كانت العينة لانهائية، فإن شكل الانتشار بين ($Y_{1t}Y_{2t}$) (على المحور الرأسي) و H_t سوف يتكون من نقاط تقع حول خط °45 الذي يمر من خلال نقطة الأصل.

دعنا نعتبر الآن نموذجًا غير خطي أكثر عمومية يتكون من m من المعادلات. إلا أنه خطي في المعلمات، وبجعل المتغيرات الداخلية الرئيسية Y_{1t}، ...، Y_{mt} والمتغيرات الداخلية الإضافية $g_{1t}=g_1(Y_{1t},...,Y_{mt})$ ، $g_{2t}=g_2(Y_{1t},...,Y_{mt})$ ، ...، $g_{rt}=g_r(Y_{1t},...,Y_{mt})$ *، والمتغيرات المحددة مسبـقًا X_{1t}، ...، X_{pt} فضمن إطار مناقشتنا أعلاه وفي ظـل افـتـراضــات معقولة، يمكن التعبير عن g_{it} على النحو :

$$g_{it}=H_i(X_{1t},\cdots,X_{pt})+\psi_{it} \qquad i=1,\cdots,r, \qquad (8.38)$$

حيث إن متوسط ψ_{it} يساوي الصفر لأي مجموعة معطاة من القيم لـ X_{1t}، ...، X_{pt} وباقي مناقشتنا واضح الآن. ويمكن اختزال هذا النموذج غير الخطي إلـى نمـوذج خطي بإحلال التعبير المناظر لكل متغير داخلي إضافي محل المتغير الأصلي كما في (8.38) وتجميع الأخطاء العشوائية، بعدئذ، في نهاية الجانب الأيمن من كل معادلة.**

---

* قد تكون المتغيرات الداخلية الاضافية، عمومًا، دوال في المتغيرات المحددة مسبقًا وفي المتغيرات الداخليـة الأساسية، أيضًا ومن أجل تبسيط الرموز لم نعالج هذه الحالة.

** على سبيل المثال، افترض أن المعادلة الأولى هي :

$$Y_{1t}=a_0+a_1Y_{2t}+a_2g_{1t}+a_3g_{2t}+a_4X_{1t}+\varepsilon_{1t},$$

حيث تتضمن المعادلة (8.38) أنه يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة على النحو :

$$Y_{1t}=a_0+a_1Y_{2t}+a_2H_{1t}+a_3H_{2t}+a_4X_{1t}+(\varepsilon_{1t}+a_2\psi_{1t}+a_3\psi_{2t}),$$

حيث إن $(\varepsilon_{1t}+a_2\psi_{1t}+a_3\psi_{2t})$ يؤخذ على أنه الخطأ العشوائي.

وسوف يحتوي النموذج الخطي الناتج على Y_{1t}، ...، Y_{mt} بوصفها متغيرات داخلية، X_{1t}، ...، X_{pt} و H_{1t}، ...، H_{rt} بوصفها متغيرات محددة مسبقًا حيث :

$$H_{it} = H_i(X_{1t}, \cdots, X_{pt}), \qquad i = 1, \cdots, r. \tag{8.39}$$

سوف يحتوي هذا النموذج الخطي على معلمات نموذج الانحدار نفسها كما هو الحال بالنسبة للنموذج غير الخطي الأصلي. فإذا طبقت القواعد المرتبطة بالتمييز والمعطاة في الفصل السابع لكل معادلة من هذا النموذج الخطي فستكون النتائج متماثلة مع تلك التي يمكن الحصول عليها عن طريق تطبيق (8.32).

هناك نقطة واحدة ترتبط بالافتراضات «الفنية الإضافية» وقد ذكرنا من قبل أنه قد يكون من المفيد أن نعرض للخطوط العريضة. وفي الحقيقة، فإن النتائج التي توصلنا إليها مبنية على افتراض ضمني هو أن المتغيرات المحددة مسبقًا X_{1t}، ...، X_{pt} و H_{1t}، ...، H_{mt} لاتعاني الارتباط الخطي المتعدد، فإذا كانت هذه المتغيرات مرتبطة خطيًا ببعضها بعضًا. فإن نتائجنا في (8.32) لن تكون صحيحة. اعتبر، مرة أخرى، مثلا، أن النموذج الخطي الذي ينتج عن تطبيق (8.38) للنموذج غير الخطي المشار إليه سابقًا. افترض أن الجانب الأيمن من المعادلة الأولى لهذا النموذج يحتوي على ثلاثة متغيرات داخلية أساسية، مثلا، Y_{2t}، Y_{3t} و Y_{4t} والحد الثابت والمتغير المحدد مسبقًا X_{1t} . افترض أن هذه المعادلة تستبعد X_2 و X_{3t} و H_{1t}، أيضًا ولكن $H_{1t}=X_{2t}+X_{3t}$. هل يستنتج من ذلك أنه إذا تحققت شروط فنية إضافية تكون معادلتنا مميزة؟ والإجابة مطلقًا لا. افترض، مثلا، أننا نحاول تطبيق طريقة م ص م لتقدير معلمات المعادلة الأولي للنموذج الخطي. سنحاول في المرحلة الأولى أن نحسب $\hat{Y}_{2t}$، $\hat{Y}_{3t}$ و $\hat{Y}_{4t}$ عن طريق تكوين انحدار للمتغيرات Y_{2t}، Y_{3t} و Y_{4t} على الحد الثابت X_{1t}، X_{2t}، X_{3t} و H_{1t}. ولكن مجهودات مرحلتنا الأولى سوف تفشل بسبب الارتباط الخطي المتعدد التام بسبب وجود العلاقة الخطية $H_{1t}=X_{2t}+X_{3t}$. ومن الواضح أن هذه المعادلة لن تكون مميزة لأن هناك متغيرين اثنين غير مرتبطين خطيًا قد حذفا من المعادلة، بينما تحتوي المعادلة على ثلاثة متغيرات داخلية في الجانب الأيمن.

هنا بعض الشروط التي يمكن أن نستنبط على أساسها ما إذا كانت المتغيرات المحددة مسبقًا X_{1t}، ...، X_{pt} و H_{1t}، ...، H_{mt} مرتبطة خطيًا مع بعضها بعضًا أم لا. إضافة إلى ذلك فإن النتائج التي عرضناها يمكن تعديلها لتأخذ في الحسبان هذه الحالة. ولكن المناقشة معقدة. ومثل هذه الحالة من الارتباط الخطي المتعدد التام لاتواجه إلا نادرًا في التطبيقات. لذلك ننهي المناقشة باحالة القارئ المتمكن في الاقتصاد القياسي إلى المصادر الأخرى.* ونذكر مرة أخرى قرائنا الآخرين أن تحليلنا ليس شاملا.

(٨-٣) تقدير م ص م

نعرض في هذا المبحث الخطوط العريضة لطريقة م ص م لتقدير النماذج القياسية الخطية في المعلمات، غير الخطية في المتغيرات الداخلية. والمنهج المقترح هو تعميم مباشر للمنهج الموجود في المبحث (٨-٢).

الخطوط العريضة للطريقة

افترض أن المعادلة رقم i للنموذج القياسي من النوع الذي ندرسه مميزة. حينئذ، ومع تحقق افتراضات معقولة، يمكن أن نقدر هذه المعادلة على نحو متسق باستخدام الطريقة التالية :

الخطوة الأولى : نحصل على القيم المحسوبة لكل متغير داخلي أساسي يظهر في الجانب الأيمن من المعادلة عن طريق إجراء انحدار لذلك المتغير على

---

* انظر الفصل الخامس من :

F. Fisher. *The Identification Problem in Econometrics* (New York: McGraw-Hill, 1966), and H. H. Kelejian. "Identification of Nonlinear Systems: An Interpretation of Fisher." *Princeion University, Econometric Research Program,* Research Paper No. 22 (Revised), 1970, A nice overall review of the issues involved is given in Chapter 8 of S. Goldfeld and R. Quandt, *Nonlinear Mehtods in Econometrics* (Amsterdam: North Holland, 1972).

المتغيرات المحددة مسبقًا التي تظهر في النموذج وربما على قوى (أي مربعات أو مكعبات . . الخ) هذه المتغيرات، وسوف نفصل فيما بعد المدى الذي يمكن أن نستخدم فيه قوى المتغيرات المحددة مسبقًا.

الخطوة الثانية : نحصل على القيم المحسوبة للمتغيرات الداخلية الإضافية بالطريقة نفسها الموضحة في الخطوة الأولى.

الخطوة الثالثة : نحل القيم المحسوبة للمتغيرات الداخلية الأساسية والإضافية محل قيمتها في المعادلة رقم i، وبعدئذ، نقدر معلمات المعادلة بطريقة المربعات الصغرى.

ففي ظل شروط معقولة، يمكن إثبات أن مقدرات المعلمات التي يحصل عليها في المرحلة الثانية تكون متسقة. والآن نعرض بعض الملاحظات المهمة للمنهج.

ملاحظة (١)

إذا احتوى النموذج على عديد من المتغيرات المحددة مسبقًا، فإن قوى هذه المتغيرات المحددة مسبقًا لن يستخدم في المرحلة الأولى إلا إذا أدى عدم استخدامها في المرحلة الثانية إلى ارتباط خطي تام. والنقطة المهمة هنا هي أن الخاصية المرغوبة فيها لمنهج التقدير (أي خاصية الاتساق) هي خاصية للعينات الكبيرة ($n = \infty$)، فإذا كان حجم العينة لانهائيًا فيمكن، في ظل افتراضات معقولة إثبات أن استخدام قوى أعلى للمتغيرات المحددة مسبقًا بالإضافة إلى قواها الدنيا في المرحلة الأولى سيؤدي إلى تباينات أصغر فأصغر للمقدرات التي يحصل عليها في المرحلة الثانية. والمنطق وراء ذلك هو أن انحدارات متعدد الحدود للمرحلة الأولى تصبح تقريبات افضل وافضل لدوال القيم المتوقعة المناظرة كلما اخذنا في الاعتبار قوى أعلى. [انظر (8.31) والهامش في صفحة ٣٤٧]. ولكن، طالما أنه عند التطبيق يكون

حجم العينة، عادة، محدودًا فإنه ينبغي أن يكون عدد المتغيرات المستقلة المعتبرة في المرحلة الأولى التي يعتمد جزئيًا على عدد القوى المأخوذة في الحسبان محدودًا.* وفي الحقيقة فإنه يمكن إثبات أنه إذا اعتبر عدد كبير من القوى للمتغيرات بحيث أصبح عدد المتغيرات في المرحلة الأولى مساويًا لعدد المشاهدات، فإن طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين تختزل إلى طريقة المربعات الصغرى العادية.** ولذا، يتولد عنها مقدرات غير متسقة. وهنا نقع في معضلة: فلتخفيض تباين العينة الكبيرة، ينبغي زيادة عدد المتغيرات في المرحلة الأولى، ومن الناحية الأخرى، إذا كان حجم العينة محدودًا أي كلما اقترب عدد المتغيرات المستخدمة في المرحلة الأولى عن حجم العينة فإن مقدرات المربعات الصغرى ذات المرحلتين تصبح مشابهة أكثر لمقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية غير المتسقة. والنسبة المثلى بين حجم العينة وعدد المتغيرات المستخدمة في المرحلة الأولى موضوع لم يحسم بعد. ولكننا نقترح، إذا كان بالإمكان ذلك أن كون الفرق بين حجم العينة وعدد المتغيرات المستخدمة في المرحلة الأولى ٢٠، في الأقل.

ملاحظة (٢)

اعتبر w عدد المتغيرات المحددة مسبقًا في النموذج، و N هو حجم العينة، حينئذ، يفترض ضمنيًا من (١) أن $(N\text{-}w) \geq 20$ حيث يقيد في المرحلة الأولى عدد قوى المتغيرات المحددة مسبقًا، فقط، ولكن، في حالة النماذج كبيرة الحجم، قد

* على سبيل المثال، فإن نموذج الانحدار :

$$Y_{1t} = b_0 + b_1 Y_{1t} + b_2 X_{2t} + b_3 X_{2t}^2 + b_4 X_{2t}^2 + \varepsilon_t$$

يحتوي على خمسة متغيرات مستقلة (بما فيها الحد الثابت).

** تتحول م ص م إلى م ص ع إذا كانت القيم المحسوبة للمتغيرات الداخلية غير مساوية القيم الفعلية المناظرة. وفي الحقيقة فإن هذا هو مايحدث بالضبط، إذا تجاهلنا الدقة النظرية، إذا كان حجم العينة مساوياً عدد المتغيرات بما فيها الحد الثابت في المرحلة الأولى. هذه النتيجة ينبغي أن تكون واضحة. إذا كان هناك قيم وعددها N لمتغير ينبغي أن يفسر بدلالة متغيرات عددها N، ومن ثم معلمات عددها N، فإن التوضيح ينبغي أن يكون كاملاً.

تكون من الكبر بحيث تساوي حجم العينة N. أو قد تكون $20 > (N\text{-}w)$. في مثل هذه النماذج، ينبغي تقييد عدد المتغيرات المحددة مسبقًا ذات الشكل الخطي التي تدخل في المرحلة الأولى وذلك لأسباب مماثلة لما ذكرنا من قبل في (١). هناك طرق مختلفة عدة لاختيار المتغيرات المحددة مسبقًا التي ستدخل في انحدارات المرحلة الأولى. ولكن، لغرض أن تكون المقدرات متسقة، ينبغي أن تشتمل هذه المجموعة من المتغيرات المحددة مسبقًا على جميع المتغيرات المحددة مسبقًا في المعادلة التي نقوم بتقديرها، وينبغي أن تشتمل، أيضًا، في الأقل، على عدد مماثل من المتغيرات المحددة مسبقًا غير الموجودة في المعادلة كعدد المتغيرات الداخلية الأساسية والإضافية الموجودة في الجانب الأيمن من تلك المعادلة. وعلى الرغم من أن النموذج الذي ندرسه الآن ليس نموذجًا خطيًا، إلا أن مبررات هذه القاعدة هي المبررات نفسها المعطاة في المبحثين (٧-٤) و (٧-٥) من الفصل السابع لحالة النماذج الخطية، ومناقشتنا التالية من الملاحظة الثالثة ستوضح ذلك.

ملاحظة (٣)

ينبغي أن تستخدم مجموعة متغيرات (المرحلة الأولى) المستقلة نفسها في الحصول على المتغيرات المحسوبة كافة التي تستخدم في المرحلة الثانية. وبالتحديد، افترض أن المعادلة رقم i هي :

$$Y_{it} = b_0 + b_1 Y_{1t} + b_2 (Y_{2t} Y_{3t}) + b_3 Y_{2t}^2 + a_1 X_{1t} + \varepsilon_{it}. \qquad (8.40)$$

افترض، أيضًا، أن النموذج الكامل يحتوي على متغيرات محددة مسبقًا X_{2t} وX_{3t}.

دع $\hat{Y}_{1t}$ يحصل عليه من الانحدار :*

$$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 X_{2t} + a_3 X_{3t} + \alpha_4 X_{1t}^2 + a_5 X_{2t}^2 + V_{1t}. \qquad (8.41)$$

دع $Z_{1t} = (Y_{2t} Y_{3t})$ و $Z_{2t} = Y_{2t}$، حينئذ، فإنه لابد أن يحصل على $\hat{Z}_t$ من انحدار Z_{1t} على الحد الثابت و X_{1t}، X_{2t}، X_{3t}، وX_{1t}^2 وX_{2t}^2. وبالمثل، ينبغي أن نحصل

* لاحظ أن (8.41) لاتحتوي على X_{3t}^2 . قد قمنا بذلك، فقط، لتوضيح أنه، بسبب أن انحدار المرحلة الأولى يحتوي على مربعات X_{1t} و X_{2t} ، فليس هناك حاجة إلى أن يتضمن مربع X_{3t} .

على $\hat{Y}_{2t}$ من انحدار Z_{2t} على المجموعة نفسها من المتغيرات. فإذا لم يستخدم المجموعة نفسها في تحديد $\hat{Y}_{1t}$، $\hat{Z}_{1t}$ و$\hat{Z}_{2t}$ فإن المقدرات التي يحصل عليها في المرحلة الثانية لن تكون متسقة. وسوف نشير فيما يلي لسبب ذلك.

ملاحظة (٤)

في وصف طريقة التقدير بالنسبة لـ (8.40)، أشرنا إلى أنه ينبغي في المرحلة الثانية إحلال $\hat{Z}_{1t}$ و$\hat{Z}_{2t}$ محل $Z_{1t} = Y_{2t}Y_{3t}$ و $Z_{2t} = Y_{2t}^2$ على الترتيب. ويمكن إثبات أنه بإحلال $\left(\hat{Y}_{2t}\hat{Y}_{3t}\right)$ و $(Y_{2t})^2$ محل $(Y_{2t}Y_{3t})$ و Y_{2t}^2، حيث يحصل على $\hat{Z}_{2t}$ و $\hat{Z}_{3t}$ بوساطة انحدار Y_{2t} و Y_{3t} على المتغيرات المستقلة للمرحلة الأولى، فإن المقدرات الناتجة لمعلمات الانحدار التي حصل عليها من انحدار المرحلة الثانية لن تكون متسقة. وبشكل أعم، دع $g_{1t} = g_1(Y_{1t}, ..., Y_{mt})$ متغيرًا داخليًا إضافيًا يظهر بوصفه متغيرًا في المعادلة موضع الاهتمام. حينئذ، يتطلب التقدير المتسق لمعلمات الانحدار أن يحل $\hat{g}_{1t}$ محل g_{1t} في المرحلة الثانية، ونحصل على $\hat{g}_{1t}$ عن طريق انحدار g_{1t} على المتغيرات المحددة مسبقًا (وربما قوى هذه المتغيرات)، أما إذا تم إحلال g_{1t} في المرحلة الثانية بوساطة $g_1\left(\hat{Y}_{1t},\cdots,\hat{Y}_{mt}\right)$ حيث سيحصل على كل $\hat{Y}_{jt}$ عن طريق انحدار Y_{jt} على المتغيرات المحددة مسبقًا (وربما قوى هذه المتغيرات) فإن مقدرات معلمات الانحدار لن تكون متسقة. وقبل توضيح المنطق وراء هذا، نعود إلى توضيح لماذا ينبغي استخدام المجموعة نفسها من المتغيرات المستقلة في المرحلة الأولى في تحديد القيم المحسوبة المتغيرات الداخلية كافة.

تبرير لبعض الملاحظات المهمة

اعتبر، مرة أخرى، المعادلة (8.40). افترض أن المتغيرات المحددة مسبقًا للنموذج الذي تكون (8.40) جزءًا منه هي الحد الثابت X_{it} و X_{2t}. وللتوضيح، افترض أن المتغيرات المستخدمة في المرحلة الأولى هي الحد الثابت X_{1t}، X_{2t}، X_{1t}^2 وX_{2t}^2. ونرمز إلى القيمة المحسوبة لـ Y_{1t} التي يحصل عليها بوساطة انحدار

Y_{1t} على هذه المتغيرات مثـل $\hat{Y}_{1t}$ حينئذ، فـإن $\hat{Y}_{1t}$ سوف يكون مولـدًا خطيًا للمتغيرات المستقلة، مثلا :

$$\hat{Y}_{1t} = \hat{d}_0 + \hat{d}_1 X_{1t} + \hat{d}_2 X_{2t} + \hat{d}_3 X_{1t}^2 + \hat{d}_4 X_{2t}^2 , \qquad (8.42)$$

حيث إن $\hat{d}_0$ ، ... ، $\hat{d}_4$ هي المعلمات المقدرة في انحدار المرحلة الأولى.

دع $\hat{\phi}_{1t}$ الباقي المقدر من انحدار المرحلـة الأولـى، أي :

$$\hat{\phi}_{1t} = Y_{1t} - \hat{Y}_{1t} . \qquad (8.43)$$

بعد ذلك، نعلم من نتائجنا في الفصول السابقة أن $\Sigma\left(\hat{\phi}_{1t}, Y_{1t}\right) = 0$ طالما أن المعادلات الطبيعية للمرحلة الأولى تكون مبينة على الشروط :

$$\begin{aligned} &\sum \hat{\phi}_{1t} = 0, \qquad \sum (\hat{\phi}_{1t} X_{1t}) = 0, \qquad \sum (\hat{\phi}_{1t} X_{2t}) = 0, \\ &\sum (\hat{\phi}_{1t} X_{1t}^2) = 0, \qquad \sum (\hat{\phi}_{1t} X_{2t}^2) = 0. \end{aligned} \qquad (8.44)$$

والآن، دع $Z_{1t} = (Y_{2t} Y_{3t})$، ودع $\hat{Z}_{1t}$ القيمة المحسوبة لـ Z_{1t} والتي يحصل عليها من انحدار Z_{1t} عل المتغيرات المستقلة في المرحلة الأولى نفسها أي الحد الثابـت وX_{1t}، X_{2t}، X_{1t}^2، X_{2t}^2. ودع $\hat{\phi}_{2t}$ الباقي المقدر المناظر.

$$\hat{\phi}_{2t} = Z_{1t} - \hat{Z}_{1t} . \qquad (8.45)$$

نلاحظ أن معادلة الانحدار التي استخدمت لحساب $\hat{Y}_{1t}$ مبينة على الشروط :

$$\begin{aligned} &\sum \hat{\phi}_{2t} = 0, \qquad \sum (\hat{\phi}_{2t} X_{1t}) = 0, \qquad \sum (\hat{\phi}_{2t} X_{2t}) = 0 \\ &\sum (\hat{\phi}_{2t} X_{1t}^2) = 0, \qquad \sum (\hat{\phi}_{2t} X_{2t}^2) = 0. \end{aligned} \qquad (8.46)$$

نلاحظ، أيضًا، أن الشروط فـي (8.46) تتضمـن أن $\Sigma\left(\hat{\phi}_{2t}, \hat{Z}_{1t}\right) = 0$ وأخيرًا، دع $Z_{2t} = Y_{2t}^2$ ودع $\hat{Z}_{2t}$ القيمة المحسوبة لـ Z_{2t} التي حصل عليها عن طريق انحدار Z_{2t} على المجموعة نفسها من المتغيرات المستقلة. دع الباقي المقدر من هذا الانحدار :

$$\hat{\phi}_{3t} = Z_{2t} - \hat{Z}_{2t} . \qquad (8.47)$$

ولاحظ أن $\hat{\phi}_{3t}$ سوف تحقق الشروط :

$$\sum \hat{\phi}_{3t} = 0, \qquad \sum (\hat{\phi}_{3t} X_{1t}) = 0, \qquad \sum (\hat{\phi}_{3t} X_{2t}) = 0$$
$$\sum (\hat{\phi}_{3t} X_{1t}^2) = 0, \qquad \sum (\hat{\phi}_{3t} X_{2t}^2) = 0. \tag{8.48}$$

لاحظ، أيضًا، أن الشروط في (8.48) تتضمن أن $\Sigma(\hat{\phi}_{3t}, \hat{Y}_{1t}) = 0$ ، إضافة إلى ذلك بسبب أن $\hat{Y}_{1t}$ ، $\hat{Z}_{1t}$ و $\hat{Z}_{2t}$ هي مولفات خطية المجموعة نفسها من المتغيرات، فإن الشروط في (8.44)، (8.46) و (8.48) تتضمن أن :

$$\sum (\hat{\phi}_{it} \hat{Y}_{1t}) = 0, \qquad \sum (\hat{\phi}_{it} \hat{Z}_{1t}) = 0, \qquad \sum (\hat{\phi}_{it} \hat{Z}_{2t}) = 0 \tag{8.49}$$

حيث i=1، 2، 3، أي أن مجموع حاصل ضرب التقاطع للبواقي من أحد انحدارات المرحلة الأولى، مع القيم المحسوبة للمتغير من انحدار مرحلة أولى أخرى يساوي الصفر.

نحتاج نتيجة أولية إضافية في (8.42)، تربط القيمة المحسوبة لـ Y_{1t} بالمتغيرات المستقلة في المرحلة الأولى عن طريق مقدرات المعلمـات $\hat{d}_0$ ، ... ، $\hat{d}_4$. فإذا كان حجم العينة لانهائي، فإن هذه المقدرات سوف تؤول إلى ثوابت. دعنا نرمز إلى هذه الثوابت على الترتيب بـ $\hat{d}_0$ ، ... ، $\hat{d}_4$ وبالمثل نرمز إلى قيم العينة الكبيرة $\hat{Y}_{1t}$ بالرمز Y_{1t}^m حيث :

$$Y_{1t}^m = d_0 + d_1 X_{1t} + d_2 X_{2t} + d_3 X_{1t}^2 + d_4 X_{2t}^2 . \tag{8.50}$$

وبالمثل، دع قيم العينة الكبيرة Z_{1t} و Z_{2t} هي Z_{1t}^m و Z_{2t}^m. دعنا الآن نبين أن اتساق مقدرات م‌ص‌م يتطلب مجموعة المتغيرات المستقلة نفسها في انحدارات المرحلة الأولى كافة، يمكن إعادة ترتيب المعادلات (8.43) ، (8.45) و (8.47) على النحو :

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= Y_{1t} + \phi_{1t} , \\ Z_{1t} &= \hat{Z}_{1t} + \hat{\phi}_{2t}, \\ Z_{2t} &= \hat{Z}_{2t} + \hat{\phi}_{3t} . \end{aligned} \tag{8.51}$$

وبالتعويض من المعادلات (8.51) في المعادلة التي نقدرها، أي (8.40)، نحصل على:

$$Y_{it} = b_0 + b_1 \hat{Y}_{1t} + b_2 \hat{Z}_{1t} + b_3 \hat{Z}_{2t} + a_1 X_{1t} + \dot{W}_t , \tag{8.52}$$

حيث إن $W_t = b_1\hat{\phi}_{1t} + b_2\hat{\phi}_{2t} + b_3\hat{\phi}_{3t} + \varepsilon_{1t}$ ، وبالمثل مناقشتنا في الفصل السابع، نلاحظ أن المكون الوحيد للخطأ العشوائي W_t ذي الصلة هو ε_{it} طالما أن:

$$\begin{aligned}&\sum W_t=\sum \varepsilon_{it}, && \sum(\hat{Z}_{2t}W_t)=\sum(\hat{Z}_{2t}\varepsilon_{it}),\\ &\sum(W_t\hat{Y}_{1t})=\sum(\hat{Y}_{1t}\varepsilon_{it}), && \sum(X_{1t}W_t)=\sum(X_{1t}\varepsilon_{it})\\ &\sum(W_t\hat{Z}_{1t})=\sum(\hat{Z}_{1t}\varepsilon_{it}).\end{aligned} \tag{8.53}$$

لذلك، فإن الإيحاء هو تقدير (8.52) عن طريق منهجنا العادي المعدل لطريقة المربعات الصغرى والمعطى بوساطة الشروط التالية [أنظر (8.52)] :

وطالما أن $E\left[\sum \varepsilon_{it}\right]=0;$ فإن $\sum \hat{W}_t=0,$

وطالما أن $E\left[\sum (Y_{1t}^m \varepsilon_{it})\right]=0;$ فإن $\sum(\hat{W}_t \hat{Y}_{1t})=0,$

(8.54) وحيث إن $E\left[\sum (Z_{1t}^m \varepsilon_{it})\right]=0;$ فإن $\sum(\hat{W}_t \hat{Z}_{1t})=0,$

وحيث إن $E\left[\sum (Z_{2t}^m \varepsilon_{it})\right]=0;$ فإن $\sum(\hat{W}_t \hat{Z}_{2t})=0,$

وحيث إن $E\left[\sum (X_{1t} \varepsilon_{it})\right]=0.$ فإن $\sum(\hat{W}_t X_{1t})=0,$

يمكن إثبات أنه -تحت شروط معقولة- تكون مقدرات المعلمات في (8.52) التي يحصل عليها بهذه الطريقة متسقة.

إن عدم استخدام المجموعة نفسها من المتغيرات المستقلة في حساب $\hat{Y}_{1t}$ ، $\hat{Z}_{1t}$ و $\hat{Z}_{2t}$ يعني أن الشروط الموجودة في (8.49) لن تتحقق. ونتيجة لذلك، فإن الشروط كافة في (8.53) سوف لن تتحقق. لذلك، إذا تم تقدير (8.52) بوساطة طريقة المربعات الصغرى العادية المعدلة فإن المقدرات الناتجة سوف تكون مبنية على المعادلات الطبيعية غير المتسقة مع تحديد النموذج. وعلى سبيل التوضيح، افترض أن $\hat{Z}_{3t}$ مبنية على متغيرات مستقلة ليست مماثلة لتلك المستخدمة في $\hat{Y}_{1t}$ و $\hat{Z}_{1t}$. حينئذ (وعمومًا) لايوجد سبب منطقي في هذه الحالة ليكون مجموع حاصل ضرب التقاطعات $\hat{\phi}_{1t}$ و $\hat{Z}_{2t}$ أو $\hat{\phi}_{2t}$ و $\hat{Z}_{2t}$ مساويًا الصفر وسوف يكون لدينا

(عمومًا) $\Sigma(\hat{\phi}_{3t}Z_{2t}) \neq 0$ و $\Sigma(\hat{\phi}_{3t}\hat{Z}_{2t}) \neq 0$ ولذا، وفي هذه الحالة:

$$\sum(W_t \hat{Z}_{2t}) = b_1\left[\sum(\hat{\phi}_{1t}\hat{Z}_{2t})\right] + b_2\left[\sum(\hat{\phi}_{2t}\hat{Z}_{2t})\right] + \sum(\varepsilon_{it}\hat{Z}_{2t}). \tag{8.55}$$

فالمعادلة الطبيعية التي حصل عليها بوساطة وضع $\Sigma(\hat{W}_t\hat{Z}_{2t}) = 0$ (مثلا) ليست «مقترحة» بوساطة افتراضات النموذج.* على سبيل المثال، تقترح المعادلة (8.55) تقدير معادلتنا بوضع $\Sigma(\hat{W}_t\hat{Z}_{2t}) = b_1\left[\Sigma(\hat{\phi}_{1t}\hat{Z}_{2t})\right] + b_2\left[\Sigma(\hat{\phi}_{2t}\hat{Z}_{2t})\right]$ ، فإذا فعلنا ذلك فسوف يكون لدينا طريقة تقدير مختلفة وأكثر تعقيدًا.

نعود الآن إلى القضية المطروحة في (4). دع $g_t = g(Y_{1t}, \ldots, Y_{mt})$، متغيرًا داخليًا إضافيًا يظهر في المعادلة التي نرغب في تقديرها. سنرى الآن أنه إذا كان طريقة المرحلتين بعد إحلال $g(\hat{Y}_{1t}, \cdots, Y_{mt})$ محل $g(Y_{1t}, \ldots, Y_{mt})$ في المرحلة الثانية فستكون مقدرات المعلمات الناتجة غير متسقة.

اعتبر، مرة أخرى، تقدير (8.40)، ولكن افترض الآن أنه قد تم إحلال $\hat{Y}_{2t}^2$ محل Y_{2t}^2 في المرحلة الثانية، حيث حصل على $\hat{Y}_{2t}^2$ عن طريق انحدار Y_{2t} على المتغيرات المستقلة في المرحلة الأولى. في هذه الحال، يمكن التعبير عن Y_{2t} على النحو:

$$Y_{2t} = \hat{Y}_{2t} + \hat{\phi}_{4t}, \tag{8.56}$$

حيث إنه من بين أشياء أخرى:

$$\sum(\hat{Y}_{2t}\hat{\phi}_{4t}) = 0. \tag{8.57}$$

* نلاحظ بالنسبة للقراء الأكثر دراية، أنه إذا لم نستخدم المجموعة نفسها من المتغيرات المستقلة في جميع انحدارات المرحلة الأولى، فإن البواقي الناتجة عن هذه الانحدارات لن تكون مستقلة إحصائيـاً عن جميع المتغيرات المستقلة في المرحلة الثانية. وسيؤدي هذا إلى مقدرات غير متسقة للسبب نفسه الذي تؤدي به طريقة م ص م إلى مقدرات غير متسقة في النظم الخطية إذا لم تستخدم المتغيرات المحددة مسبقًا كافة والمتضمنة في المرحلة الأولى.

وبإيجاد مربع جانبي المعادلة (8.56)، يكون لدينا :

$$Y_{2t}^2 = \hat{Y}_{2t}^2 + (\hat{\phi}_{4t}^2 + 2\hat{\phi}_{4t}\hat{Y}_{2t}) \\ = \hat{Y}_{2t}^2 + \hat{\psi}_t \qquad (8.58)$$

حيث إن $\hat{\psi}_t$ مساو للحد الموجود بين الأقواس في (8.58). ومن الواضح أن $\hat{\psi}_t$ لن تحقق الشروط المشابهة لتلك المعطاة في (8.44)، (8.46) و (8.48). على سبيل المثال في ضوء (8.57) و (8.58) :

$$\sum \hat{\psi}_t = \sum \hat{\phi}_{4t}^2 \neq 0.$$

ينبغي أن يكون واضحًا، أيضًا، أن الخطأ العشوائي في انحدار المرحلة الثانية لن يحقق شروطًا مثل تلك الشروط الموجودة في (8.53). ونتيجة لذلك، فلن تكون المقدرات الناتجة للمعلمات متسقة.

(٨-٤) تبيانيات العينة الكبيرة

لحسن الحظ، فإن صيغ التباين المعطاة في الفصل السابع لمقدرات المربعات الصغرى ذات المرحلتين في النظام الخطي للمعادلات ماتزال تنطبق، أيضًا، على المقدرات في النظام غير الخطي. فعلى سبيل المثال، اعتبر، مرة أخرى، التقدير ذا المرحلتين المطبق على (8.40) عن طريق إحلال $\hat{Y}_{1t}$، $\hat{Z}_{1t}$ و $\hat{Z}_{2t}$ محل Y_{1t}، $Z_{1t} = (Y_{2t}Y_{3t})$ و $Z_{2t} = Y_{2t}^2$ على الترتيب. حينئذ، وفي ظل شروط مماثلة، يمكن إثبات أن مقدرًا متسقًا لتباين العينة الكبيرة $\hat{b}_1$ سيكون كالتالي :

$$\widehat{\operatorname{var}\left(\hat{b}_1\right)} = \frac{\hat{\sigma}_i^2}{\sum \hat{q}_t^2} \qquad (8.59)$$

حيث إن $\hat{\sigma}_i^2$ مقدر متسق لتبايـن ε_{it} و $\hat{q}_t$ الباقي رقم t من انحـدار $\hat{Y}_{1t}$ على

الحد الثابت، $\hat{Z}_{1t}$ ، $\hat{Z}_{2t}$ و X_{1t} . والمقدر المتسق الواضح لتباين ε_{it} هو :*

$$\hat{\sigma}_i^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{(Y_{it} - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 Y_{1t} - \hat{b}_2 Z_{1t} - \hat{b}_3 Z_{2t} - \hat{a}_1 X_{1t})^2}{n-5}, \qquad (8.60)$$

حيث : n هي حجم العينة، وبالمثل، كما أوضحنا في الفصل السابع، تختبر الفرضيات أو بناء فترات الثقة عن طريق استخدام التوزيع الطبيعي على سبيل التقريب. على سبيل المثال. نجد أن الاستدلالات المتصلة بـ b_1 (في الحالة السابقة) ستكون مبنية على الافتراض بأن:

$$\frac{\left(\hat{b}_1 - b_1\right)}{\sqrt{\widehat{\operatorname{var}}\left(\hat{b}_1\right)}} \qquad (8.61)$$

متغير طبيعي معياري. مرة أخرى، كما في الحالة الخطية، ستكون النتائج صحيحة تمامًا إذا كان حجم العينة لانهائيًا .

(٨-٥) مثال

نعطي الآن مثالا يوضح ويعمم بعض النتائج التي حصلنا عليها في هذا الفصل. ولأن هدف المثال هو توضيح كيفية الوصول إلى نتائجنا، فلن نهتم بمدى واقعية النموذج أو دقة العلاقات الاقتصادية المتضمنة.

النموذج

اعتبر النموذج الاقتصادي الكلي ذا المعادلات الثلاث :

$$C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 Y_t^2 + a_3 Y_t^3 + a_4 \left(\frac{1}{C_{t-1}}\right) + a_5 W_{t-1} + u_{1t}, \qquad (8.62a)$$

* نلاحظ نقطة مهمة وهي أنه إذا كان حجم العينة لانهائيًا، فإن $\infty = n = n - 5$.

$$I_t = b_0 + b_1 (Y_t Y_{t-1})^{1/2} + b_2 r_t + b_3 T_t + u_{2t}, \qquad (8.62b)$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t, \qquad t = 1, \cdots, n, \qquad (8.62c)$$

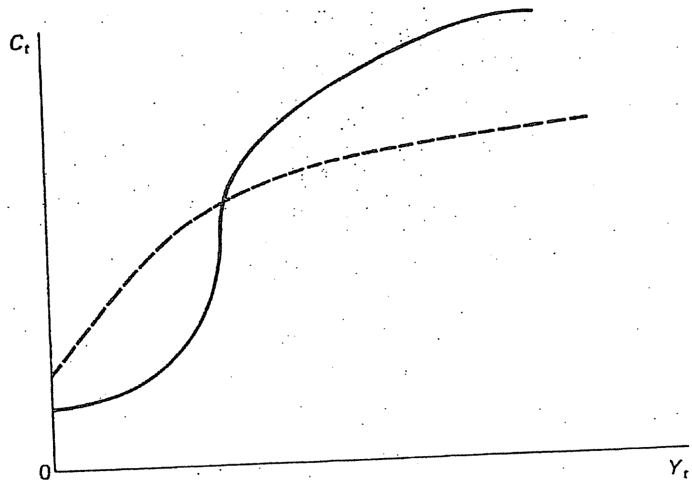
حيث C_t إجمالي الإنفاق الاستهلاكي في الفترة t، Y_t هو الدخل الإجمالي في الفترة t، W_{t-1} ثروة المستهلك في الفترة (t-1)، I_t الإنفاق الاستثماري في الفترة t، r_t معدل الفائدة في الفترة t، G_t الإنفاق الحكومي في الفترة t، T_t متغير اتجاه الزمن Time trend، حيث $T_1 = 1$ و $T_2 = 2$ وهلم جرا، u_{1t} و u_{2t} قيم الأخطاء العشوائية في الفترة t. وقبل أن نحدد افتراضاتنا الإحصائية تحديدًا اصطلاحيًا سنصف، باختصار طبيعة النموذج.

المعادلة (8.62a) هي دالة الاستهلاك التي تربط الإنفاق الاستهلاكي بالدخل والمستويات السابقة من الاستهلاك (لتعكس أثر العادة) وثروة المستهلك في الفترة الزمنية السابقة. وبالطبع، يتوقع أن يكون للدخل أثر موجب على الاستهلاك، ولكن الشكل الدقيق لهذه العلاقة الموجبة قد لايكون واضحًا. وبالتحديد، فقد لاتكون هذه العلاقة خطية كما تعرضها، عادة، المراجع الاقتصادية. نعرض في الشكل رقم (٨-٣) علاقتين محتملتين بين الإنفاق الاستهلاكي والدخل عند قيم مفترضة للمتغيرات الأخرى المتضمنة. يتضمن الشكل المكعب الموجود في (8.62a) مرونة كافية للأخذ في الحسبان كلا من الشكل الخطي $(a_2 = a_3 = 0)$ بالإضافة إلى العلاقات الموجودة في الشكل رقم (٨-٣) فإذا أردنا تحقيق مرونة إضافية فيمكننا إضافة حد من الدرجة الرابعة لمتغير الدخل في (8.62).

تفسر المعادلة (8.62b) مستوى الاستثمار بدلالة مستويات الدخل ومعدلات الفائدة ومتغير الاتجاه الزمني. ويمكن أن ننظر إلى المتغير الأخير هذا على أنه صافي مجموع قوى استثمار خارجية يفترض أنها تزيد (إذا كانت $b_3 > 0$) أو تخفض (إذا كانت $b_3 < 0$) بانتظام حجم الاستثمار فترة بعد أخرى. أما الحد $(Y_3\ Y_{t-1})^{1/2}$ فهو صياغة معدلة لمبدأ المعجل الذا أدخلناه في التحليل للتوضيح.

وأخيرًا تفسر المعادلة (8.62c) الدخل باعتباره مجموع الإنفاقات. وفي

وأخيرًا تفسر المعادلــة (8.62c) الدخل باعتباره مجموع الإنفاقات. وفــي الحقيقة، هذه المعادلة شرط توازني يبين أن الدخل (السلع والخدمات) المنــتــج المعروض يطلب من المتعاملين في السوق أي من المستهلكين والمستثمرين والحكومة.



شكل رقم (٨-٣)

نفترض أن u_{1t} و u_{2t} غير مرتبطتين ذاتــيًا، ولهما قيم متوسطة صفريــة، (أي $E(u_{1t}) = E(u_{2t}) = 0$) وتباينات ثابتة (أي $E(u_{1t}^2) = \sigma_1^2$, $E(u_{2t}^2) = \sigma_2^2$) وتغاير ثابت $E(u_{1t}\, u_{2t}) = \sigma_{12}$. نفترض، أيضًا، أن الإنفاق الحكومي وثروة المستهلك ومعدل الفائدة تتولد خارجيًا، ولذا، فالأخطاء العشوائية u_{1t} و u_{2t} مستقلة عن G_t و r_t وعن W_{t-1} ولأن متغير الاتجاه الزمني T_t هو متغير يقيني deterministic، كما أنه متغير خارجي، فإن كلا الخطأين العشوائيين مستقلان عنه. وهكذا، فإن نموذجنا في (8.62) نموذج من ثلاث معادلات تفسر كلا من C_t و I_t وأخيرًا Y_t بدلالة كل من C_{t-1}، W_{t-1} ، Y_{t-1}، r_t، T_t، G_t وأخيرًا الأخطاء العشوائية. وفي نموذج أعم، قد يحاول الباحث تفسير معدل الفائدة وربما الإنفاق الحكومي مــن بــين اشــيــاء أخرى.

تحليل النموذج

يشتمل النموذج (8.62) على المتغيرات الداخلية الأساسية C_t و I_t وأخيرًا Y_t. المتغيرات الداخلية الإضافيـة هـي Y_t^2 و Y_t^3 وأخيرًا (Y_tY_{t-1}). يوجـد، بالإضافة إلى هذه المتغيرات، حد ثابت وخمسة متغيرات محددة مسبقًا هي $(1/C_{t-1})$، W_{t-1}، r_t، T_t و G_t. ومن بين هذه المتغيرات الخمسة، نجد أن $(1/C_{t-1})$ هو المتغير الوحيد غير الخارجي حيث يكون النموذج قد حدد في الفترة الزمنية t-1 قيمة C_{t-1} ومن ثم، معكوسه، $(1/C_{t-1})$.

اعتبر الآن المعادلة (8.62a). هذه المعادلة تستوفي الشروط الضرورية للتمييز كما توضحها المعادلة (8.32) لاحتوائها على متغير داخلي أساسي واحد، فقط، في الجانب الأيمن وهو Y_t لكنها تستبعد اربعة متغيرات هي إما متغيرات داخلية إضافية أي $(Y_tY_{t-1})^{1/2}$ أو متغيرات محددة مسبقًا (في هذه الحالة متغيرات خارجية) هي r_t، T_t و G_t، كما أن الشرط الضروري لتمييز المعادلة قد تم استوفي لأن هـذه المعادلة لاتحتوي على أي متغير داخلي في جانبها الأيمن كما تستبعـد خـمـسـة متغيرات تكون إما متغيرات داخلية إضافيـة هـي Y_t^2 و Y_t^3 أو متغيرات محددة مسبقًا هـي $1/C_{t-1}$، W_{t-1} و G_t، كما أن قضية التمييز الخاصة بـــ (8.62c) لاتنشأ أصلا لأنها لاتحتوي على معلمات يجب تقديرها.

اعتبر الآن مشكلة تقدير (8.62a) : لتطبيق طريقة م ص م ينبغي أن نحصل أولا على القيم المحسوبة لـــ Y_t، $Q_{1t} = Y_t^2$ و $Q_{2t} = Y_t^3$. وللحصول على هـذه القيم المحسوبة، ينبغي علينا أن نحدد المتغيرات المستقلة لمرحلة الانحدار الأولى، فإذا كانت عينتنا، مثلا، بحجم n=50 فقد تختار المتغيرات المستقلة للمرحلة الأولى كالتالي :

$$(1/C_{t-1}), W_{t-1}, r_t, T_t, G_t, Y_{t-1}, \quad \text{والحد الثابت}$$

$$(1/C_{t-1})^2, W_{t-1}^2, R_t^2, T_t^2, G_t^2, Y_{t-1}^2. \tag{8.63}$$

في (8.63)، اخترنا، ببساطة، جميع المتغيرات المحددة مسبقًا في النموذج وقيمها المربعة. لم نضمن قيمها المكعبة أو القوى الأكبر منها أو حاصل ضرب الحـدود التقاطعية بينها لأننا نتوقع ارتباط هذه المتغيرات ارتباطًا كبيرًا مع المتغيرات الموجودة

في (8.63)، فإذا أدخلنا هذه الحدود الإضافيــة فــي (8.63) ، فلربما نتوقــع أن أي تحسن في المقدرات، بسبب أن الانحدارات متعددة الحدود تقارب بدقــة الـــدوال المتوسطة، سينخفض حجم الخسارة الناتجة عن قلة الفرق بين حجم العينة وعدد المتغيرات المستخدمة في المرحلة الأولى [انظر المبحث (٨-٣)]. ولكن، لا يوجد أي أساس علمي لذلك الاعتقاد! وقد تؤدي إضافة الحدود المكعبة وذات الدرجات الأعلى وحدود حواصل ضرب التقاطعات إلى تحسن في مقدرات مــعــلــمــات الانحدارات.* وعلى أي حال، فإن الاختيار الموجود في (8.63) يشتمل، فعــلا، على المتغيرات المحددة مسبقًا كافة في (8.62a) أي الحد الثابت، $1/C_{t-1}$، W_{t-1}، وفي الأقل، على عدد من المتغيرات المحددة مسبقًا يماثل تلك الموجودة فــي (8.62a) ، أي ، 10، كما يماثل عدد المتغيرات الداخلية الأساسية والإضافية في (8.62) أي 3. إضافة إلى ذلك، فإن الاختبار في (8.63) يستوفي شرطنا المقترح بأن يكون الفرق بين حجم العينة الذي سيكــون 49 بسبب فقد المشاهدة الأولى بسبب المتغــيــرات المبطأة، وعدد المتغيرات المستخدمة في المرحلة الأولــى (أي 13) في الأقل، 20.

والآن تتضح باقي الطريقة، حيث يمكننا حساب كل مــن $\hat{Y}_t$ ، $\hat{Q}_{1t}$ وأخيرًا $\hat{Q}_{2t}$ بدلالة انحدارات المربعات الصغرى لـ $\hat{Y}_t$ ، $\hat{Q}_{1t}$ و$\hat{Q}_{2t}$ على المتغيرات في (8.63) حيث $t=2,...,n=50$. لاحظ أننا نستخدم المجموعة نفسها من المتغيرات المستــقــلــة الأصلية لحســاب $\hat{Y}_t$ ، $\hat{Q}_{1t}$ و$\hat{Q}_{2t}$. حينئذ، يكون انحدار المرحلة الثانية المنــاظــر لتقدير (8.62a) كالتالي :

$$C_t = a_0 + a_1\hat{Y}_t + a_2\hat{Q}_{1t} + a_3\hat{Q}_{2t} + a_4(1/C_{t-1}) + a_5 W_{t-1} + k_t\,, \quad t=2,\cdots,n=50, \tag{8.64}$$

حيث إن k_t هو الخطأ العشوائي الناتج. وعندئذ، يحصل على مقدرات المعلمات

* إن خاصية الاتساق في مقدرات م ص م هي خاصية للعينة الكبيرة، بينما تكون هذه المقدرات في العينات المحددة متحيزة. لذلك، تعتمد جودة تقدير م ص م على تحيزه وتباينه، وعادة مايتم جمع هاتين الخاصيتين للمقدر للحصول على مايسمى متوسط مربع الخطأ mean square error. ولذلك، يمكننا القول، في العينات المحدودة، إن مقدر م ص م لمعلمة معينة «أفضل من» مقدر آخر (والذا قد يكون له مجموعة مختلفة مــن المتغيرات المستقلة في المرحلة الأولى) إذا كانت له قيمة متوسطة أقل لمربع الخطأ.

، a_0، a_1، a_2، a_3، a_4 وa_5 بدلالة انحدار المربعات الصغرى المناظرة (8.64) ، وبالتحديد، فإن المعادلات الطبيعية لهذا الانحدار معطاة من خلال الشروط التالية :

$$\begin{aligned} &\sum_{t=2}^{50} \hat{k}_t = 0, && \sum_{t=2}^{50} (\hat{k}_t \hat{Y}_t) = 0, && \sum_{t=2}^{50} (\hat{k}_t \hat{Q}_{1t}) = 0, \\ &\sum_{t=2}^{50} (\hat{k}_t \hat{Q}_{2t}) = 0, && \sum_{t=2}^{50} [\hat{k}_t (1/C_{t-1})] = 0, && \sum_{t=2}^{50} (\hat{k}_t W_{t-1}) = 0, \end{aligned} \tag{8.65}$$

حيث إن :

$$\hat{k}_t = C_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 \hat{Y}_t - \hat{a}_2 \hat{Q}_{1t} - \hat{a}_3 \hat{Q}_{2t} - \hat{a}_4 (1/C_{t-1}) - \hat{a}_5 W_{t-1}.$$

كما ترمز $\hat{a}_i$ ، حيث $i=0,...,5$ إلى مقدر a_i .

وسيتم تقدير تباين u_{1t} ، σ_1^2، بعد ذلك على النحو :

$$\hat{\sigma}_1^2 = \sum_{t=2}^{50} \frac{\hat{u}_{1t}^2}{(49-6)}, \tag{8.66}$$

حيث إن :

$$\hat{u}_{1t} = C_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 Y_t - \hat{a}_2 Y_t^2 - \hat{a}_3 Y_t^3 - \hat{a}_4 (1/C_{t-1}) - \hat{a}_5 W_{t-1}.$$

وأخيرًا، يمكن تقدير تباين العينة الكبيرة لـ $\hat{a}_2$ (مثلا) على النحو :

$$\widehat{\text{var}(\hat{a}_2)} = \hat{\sigma}_1^2 \left(\frac{1}{\sum_{t=2}^{50} \hat{Q}_{1t}^2} \right), \tag{8.67}$$

حيث إن $\hat{Q}_{1t}$ هو الباقي من انحدار المربعات الصغرى على الحد الثابت، $\hat{Y}_t$ و $\hat{Q}_{2t}$ ، $(1/C_{t-1})$ وأخيرًا W_{t-1} .

وتتماثل خطوات تقدير (8.62b) مع تلك المستخدمة في (8.62a) . والنقطة الوحيدة التي ينبغي ملاحظتها هي أن المتغيرات المستقلة في انحدار المرحلة الأولى في (8.62b) ليست بالضرورة متطابقة مع تلك المستخدمة في تقدير (8.62a) . أي أنها

ليست بالضرورة متطابقة مع المجموعة فـي (8.63). وبالمقابل، وبغض النظر عن طريقة اختيار المتغيرات المستقلة في المرحلة الأولى لتقدير معادلة معينة، فإن هذه المجموعة نفسها ينبغي أن تستخدم في تحديد القيم المحسوبة لجميع المتـغـيـرات الداخلية الاساسية والإضافية الموجودة في الجانب الأيمن لتلك المعادلة، وليس من الضروري أن نستخدم المجموعة نفسها لجميع المعادلات. ومن الناحية الأخرى قد يكون الدافع ضعيفًا لتغيير المتغيرات المستقلة في المرحلة الأولى نظرًا لتماثل حجم العينة في جميع المعادلات وتماثل المتغيرات.

ملحق: تقدير النماذج غير الخطية في كل من المتغيرات الداخلية والمعلمات

نوسع تحليلنا في هذا الملحق ليشمل تقدير نماذج المعادلات الآنية غير الخطية في كل من المتغيرات الداخلية والمعلمات. لانهتم هنا بقضية التمييز، لأنه لم توجد حتى الآن قواعد بسيطة نسبيًا تستخدم عند التطبيق.

وطريقة التقدير التي نعرضها هي واحدة من الطرق التي يمكن فهم مبرراتها النظرية. ومالم يكن الشخص ملمًا بالتحليل العددي والبرمجة فإن التطبيق يتطلب توافر برامج حاسوب على مثل هذه الطرق على سبيل الاختيار.*

إطار التحليل

اعتبر نموذجًا مكونًا من ثلاث معادلات يحتوي على المتغيرات الداخلية: Y_{1t}، Y_{2t} و Y_{3t} والمتغيرات الخارجية $X_{1t}, ..., X_{kt}$. افترض أن المعادلة الأولى من هذا النموذج هي:

$$Y_{1t} = a_0 + a_1 X_{1t} e^{a_2 Y_{2t}} + a_3 X_{2t} + a_4 Y_{3t}^2 + \varepsilon_{1t}, \qquad (8A.1)$$

حيث إن ε_t : الخطأ العشوائي. افترض أن قيمة a_2 غير معلومة، ولذا، ينبغي تقديرها بالإضافة إلى قيم a_0، a_1، a_3 و a_4. حينئذ، وعلى العكس من النماذج كافة التي اعتبرناها حتى الآن، نرى أن معادلة (8A.1) غير خطية في كل من المتغيرات الداخلية وفي المعلمات. لاحظ أنه لايمكننا أن نحول (8A.1) إلى نموذج خطي في المعلمات عن طريق التعبير عنه على النحو:

$$Y_{1t} = a_0 + a_1 Z_t + a_3 X_{2t} + a_4 Y_{3t}^2 + \varepsilon_{1t}, \qquad (8A.2)$$

* هي طريقة المربعات الصغرى غير الخطية ذات المرحلتين، وقد تم اقتراحه أولاً بوساطة
T. Amemiya. "The Nonlinear Two-stage Least - Squares Estimator". *Journal of Econometrice* 2(1974), pp. 105-110.
وستكون مناقشتنا هي تفسير نتائج Amemiya .

حيث إن Z_t هو المتغير الداخلي الإضافي $(Z_t = X_{1t}\, e^{a_2}\, Y_{2t})$. وسبب ذلك هو أن قيمة a_2 غير معلومة، ولذلك لايمكننا بناء المشاهدات عن Z_t من تلك المتاحة عن X_{1t} و Y_{2t}.

ومثال آخر لنموذج غير خطي في كل من المتغيرات الداخلية وفي المعلمات هو النموذج المقترح التالي المكون من المعادلتين :

$$\log(Y_{1t}) = a_0 + a_1\left(\frac{Y_{2t}}{1+b_2 X_{2t}}\right) + a_2\left(\frac{X_{1t}}{Y_{2t}}\right) + \varepsilon_{1t}, \qquad (8A.3a)$$

$$(Y_{2t}^{\alpha} X_{3t}) = b_0 + b_1 Y_{1t} + b_2 Y_{1t}^2 + b_3 X_{2t} + \varepsilon_{2t}, \qquad (8A.3b)$$

حيث إن Y_{1t} و Y_{2t} هي المتغيرات الداخلية، X_{1t}، X_{2t} و X_{3t} هي المتغيرات الخارجية، و ε_{1t} و ε_{2t} الأخطاء العشوائية. في هذه الحال، تحدث عدم الخطية في المعلمات بسبب المعلمات α و b_2.

نستخدم الآن النماذج في كل من (8A.1) و (8A.3) لتوضيح خاصتين للنماذج من النوع الذي نعتبره في هذا الملحق. الأولى هي أن الجانب الايسر من معادلة معينة قد يحتوي على معلمات غير معلومة (كما في (8A.3b)) ولكن هذا ليس ضروريًا كما في (8A.1) و (8A.3a) . الثاني يكون الخطأ العشوائي في كل معادلة من النوع الذا يضاف إلى بعضه بعضًا. وسوف نشير بعد ذلك إلى أن هذا الافتراض ليس مقيدًا جدًا. فإذا قبلنا هذا الفرض مؤقتًا نلاحظ أن ذلك يتضمن أن جميع الحدود، باستثناء الخطأ العشوائي، يمكن أن توضع في الجانب الأيسر من المعادلة. ولذا فإن الخطأ العشوائي يمكن عزله على الجانب الايمن. على سبيل المثال يمكن التعبير عن (8A.3a) على النحو :

$$\log(Y_{1t}) - a_0 - a_1\left(\frac{Y_{2t}}{1+b_2 X_{2t}}\right) - a_2\left(\frac{X_{1t}}{Y_{2t}}\right) = \varepsilon_{1t}, \qquad (8A.4)$$

وبعمومية أكثر دع Y_{1t}، ...، Y_{mt} المتغيرات الداخلية للنموذج، X_{1t}، ...، X_{pt}

---

* إذا كان ينبغي تقدير كل معادلة في النموذج، يتطلب تحليلنا حينئذ أن يعبر عن كل معادلة بالشكل (8A.5).

المتغيرات الخارجية و u_{1t}, ..., u_{mt} الأخطاء العشوائية. سنفترض، بعدئذ، أن المعادلة التي نرغب في تقديرها مثلا (رقم i) يمكن التعبير عنها في الشكل :*

$$F_i(Y_{1t},\cdots,Y_{mt},X_{1t},\cdots,X_{pt})=u_{it}, \tag{8A.5}$$

حيث إن الجانب الأيسر من (8A.5) دالة في واحد أو أكثر من المتغيرات Y_{1t}، ...، Y_{mt} و X_{1t}، ...، X_{pt} الذي يحتوي على معلمات غير معلومة. وعلى سبيل التوضيح، ففي المعادلة (8A.3a) مثلا، ستكون هذه الدالة الجانب الأيسر في (8A.4).

إن افتراض إمكانية التعبير عن المعادلة بدلالة الخطأ العشوائي القابل للإضافة، ومن ثم، تصبح في شكل مماثل لـ (8A.5) ليس افتراضًا مقيدًا جدًا، نظرًا لطبيعة النماذج التي يهتم بها الاقتصاديون عادة. على سبيل المثال، يتطلب هذا الافتراض إمكانية حل المعادلة المعينة من النموذج موضع الاهتمام للحصول على الخطأ العشوائي، وعلى سبيل المثال، إذا كانت المعادلة الأولى من النموذج تأخذ الشكل التالي :

$$Y_{1t}=a_0X_{1t}^{a_1}\,Y_{2t}^{a_2}\,e^{u_{1t}}, \tag{8A.6}$$

فإن الشكل المناظر لـ (8A.5) هو :

$$\log(Y_{1t})-\log(a_0)-a_1\log(X_{1t})-a_2\log(Y_{2t})=u_{1t}. \tag{8A.7}$$

وعلى سبيل توضيح آخر، اعتبر معادلة من الشكل :

$$Y_{1t}=a_0+a_1\left(\frac{e^{a_2Y_{2t}}}{1+u_{1t}}\right)+a_3X_{1t}, \tag{8A.8}$$

حيث إن مدى القيم الممكنة للخطأ العشوائي u_{1t} يكون على النحو $1+u_{1t}>0$، حينئذ، فإنه يمكن الحصول على الشكل المناظر لـ (8A.5) بملاحظة أولا أن:

$$\left(\frac{Y_{1t}-a_0-a_3X_{1t}}{a_1e^{a_2Y_{2t}}}\right)=\frac{1}{1+u_t}, \tag{8A.9}$$

ولذا، فإن :

$$\left(\frac{a_1e^{a_2Y_{2t}}}{Y_{1t}-a_0-a_3X_{1t}}\right)-1=u_{1t}. \tag{8A.10}$$

وقبل الدخول في قضية التقدير، ومن ثم اختبار الفروض، نعرض هنا نتيجة أولية.

نتيجة أولية

اعتبر نموذج الانحدار العادي المكون من معادلة واحدة :

$$Y_t = b_0 + b_1 X_{1t} + \cdots + b_k X_{kt} + u_t, \qquad t = 1, \cdots, N, \tag{8A.11}$$

حيث لاتعاني المتغيرات المستقلة الارتباط الخطي المتعدد، كما أن الخطأ العشوائي يحقق افتراضاتنا المعتادة كافة، وبالتحديد، نفترض أن u_t مستقل عن المتغيرات الداخلية المبطئة والحالية والقيم المستقبلية لها كافة. وله قيمة متوقعة صفرية $E(u_t) = 0$ وتباينٌ ثابت $E(u_t^2) = \sigma_u^2$، كما أنه ليس مرتبطًا ذاتيًا.

تذكر أن الافتراض الأساسي بشأن معاملات الانحدار $b_0, b_1, ..., b_k$ في نموذج مثل (8A.11) هو أن هذه المعاملات ثوابت، أي أن قيمها لاتعتمد على t. لذا فإن بعض هذه المعاملات أو كلها من الممكن أن يكون صفرًا. ومن الواضح أنه إذا كانت جميع هذه المعاملات تساوي الصفر، يكون المتغير التابع $Y_t = u_t$، لذلك تنخفض Y_t إلى متغير عشوائي مستقل عن المتغيرات المستقلة في النموذج.

دع $\hat{b}_i$ مقدر b_i حصل عليه بطريقة المتغير المساعد المعادلة لطريقة المربعات الصغرى. في هذه الحال، فإن $\hat{b}_i$ مقدر غير متحيز لـ b_i (كما اوضحنا في الفصل الرابع) أي $E(\hat{b}_i) = b_i$. وتظل هذه النتيجة صحيحة بغض النظر عما إذا كانت b_i تساوي الصفر أم لا. وقد أوضحنا، أيضًا، في ملحق الفصل الرابع أن تباين $\hat{b}_i$ يمكن التعبير عنه على النحو التالي :

$$\text{var}(\hat{b}_i) = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{t=1}^{N} \hat{v}_{it}^2} \tag{8A.12}$$

حيث إن $\hat{v}_{it}$ هو المتبقي من انحدار X_{it} على المتغيرات المستقلة الأخرى كافة (مشتملة على الحد الثابت في (8A.11)).

ومقام (8A.12) هو مجموع حدود عددها N، وكل من هذه الحدود، إما أكبر من الصفر أو يساويه. لذلك (ومن بين أشياء أخرى)، فإن قيمة تباين $\hat{b}_i$ تعتمد على حجم العينـــة N، ويمكن إثبات أنه (في ظل افتراضات فنية إضافية) إذا كـــانـــت N لانهائية فإن المقام في (8A.12) سيكون لانهائيًا ولذا، سيكون تباين $\hat{b}_i$ مساويًا الصفر.

اعتبر الآن الحالة التي تكون فيها معاملات الانحدار كافة في (8A.11) مساوية الصفر $(b_i = 0,\ i=0,\dots,k)$. تعني نتائجنا، في هذه الحـــال، أن $i = 0,\dots,k$، $E(\hat{b}_i) = 0$ وأنه إذا كان $N = \infty : var(\hat{b}_i) = 0$ و $i = 0,\dots,k$. فبديهيًا، إذا كانت معلمات الانحدار صفرًا وحجم العينة لا نهائيًا فإن القيمة المتوقعة لكل معلمة من معلمات الانحدار ستساوي الصفر، كما أن توقع مربع انحـــراف القيم عن الصفر (تباينها) سيكون، أيضًا، صفرًا. ولذا نتوقع أن قيمة كل مقدرات معلمات الانحدار تساوي الصفر في هذه الحالة. ولكن، يمكن التعبير عن ذلك تعبيـــرًا اصطلاحيًا بالقول إنه إذا كـــانـــت $i = 0,\dots,k$، $E(\hat{b}_i) = 0$ وأن $\lim_{N\to\infty} var(\hat{b}_i) = 0$، حينئذ، فإن $\lim_{N\to\infty} prob(|\hat{b}_i - 0| > \delta) = 0 = prob(|\hat{b}_i| > \delta)$ و حيث إن δ هي رقم ثابت موجب صغير*. ونعبر عن ذلك لفظيًا بالقول أنه، مع تحقيق هذه الشروط، فإن احتمال أن يكون $\hat{b}_i$ مختلفًا عن الصفر بأي مقدار موجب صغير هو الصفر (أي $\hat{b}_i$ تؤول في الاحتمال إلى الصفر).

والنتيجة المهمة من وراء كل ذلك هي أنه إذا انحدر أحد المتغيرات ذا القيمة المتوسطة الصفرية، والتباين الثابت وغير المرتبط ذاتيًا (مثل الخطأ العشوائي) بمجموعة من المتغيرات المستقلة فإن مقدرات معلمات الانحدار سوف تؤول في الاحتمـــال إلى الصفر، في حال تحقق افتراضات فنية (ومعقولة) إضافية، لذلك فإن القيمة المحسوبة للتعبير، على سبيل المثال، في الحال السابقة:

$$\hat{Y}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_{1t} + \cdots + \hat{b}_k X_{kt}, \qquad (8A.13)$$

---

* النص الإنجليزي لهذه العبارة هو:

if $E(\hat{b}_i) = 0,\ i = 0,\cdots k,$ and $\lim_{N\to\infty} var(\hat{b}_i) = 0$, Them

$\lim_{N\to\infty}, prob(|\hat{b}_i - 0| > \delta) = \lim_{N\to\infty}, prob(|\hat{b}_i| > \delta) = 0$, where δ is positive constant.

سوف يؤول، أيضًا، في الاحتمال إلى الصفر عندما تؤول N إلى ∞.

طريقة التقدير

سنوضح في هذا المبحث، بداية، طريقة تقدير معادلة غير خطية في كل من المتغيرات الداخلية والمعلمات بالمعادلة (8A.3b)، وبعدئذ، سنعمم نتائجنا.

افترض أنه يتوافر لدينا عدد N مشاهدات عن المتغيرات في النموذج المكون من معادلتين في (8A.3) وهي Y_{1t}، Y_{2t}، X_{1t}و X_{2t}، X_{3t}. افترض أن المتغيرات X_{1t}، X_{2t} و X_{3t} ليست مرتبطة خطيًا ببعضها بعضًا. افترض، أيضًا، أن الأخطاء العشوائية كافة لها قيم متوسطة صفرية وتباين ثابت، وتغاير ثابت، ولايعاني أي منها الارتباط الذاتي، وأن كلا منها مستقل عن القيم المبطئة والحالية والمستقبلية للمتغيرات الثلاثة الخارجية. وتعتمد خاصية الاتساق لطريقة التقدير التي سنضعها بوضعها على بعض الافتراضات الفنية الإضافية نفترض أنها سوف تتحقق في الواقع. ولأن عرض هذه الافتراضات الفنية وفهمها يتطلب أدوات رياضية وإحصائية أعلى من مستوى هذا الكتاب، سنفترض، ببساطة، تحقق هذه الشروط دون أن نحددها فعليًا.

يمكن التعبير عن المعادلة (8A.3b) في شكل المعادلة (8A.5) على النحو :

$$(Y_{2t}^{\alpha}\ X_{3t}) - b_0 - b_1 Y_{1t} - b_2 Y_{1t}^2 - b_3 X_{2t} = \varepsilon_{2t}. \qquad (8A.14)$$

ونرمز إلى الجانب الأيسر من (8A.14) بالرمز F_t. افترض أننا اخترنا قيمة افتراضية لكل معلمة تظهر في الجانب الأيسر من (8A.14)، وقمنا ببناء مشاهدات «تقديرات» لـ F_t (مثلا، F_t^a) طبقًا لهذه القيم. افترض، على سبيل المثال، أننا اخترنا 0.1 لـ α و 3.7 لـ b_0، ‎-1.5 لـ b_1، 20 لـ b_2، وأخيرًا ‎-10 لـ b_3 حينئذ، تحدد مشاهداتنا التقريبية على النحو :

$$F_t^{\alpha} = (Y_{2t}^{0.1}\ X_{3t}) - 3.7 + 1.5Y_{1t} - 2Y_{1t}^2 + 10X_{2t}. \qquad (8A.15)$$

لاحظ، من (8A.14)، أنه إذا كانت القيم الحقيقية للمعلمات تعادل قيمنا المختارة فإن $F_t^a = F_t = \varepsilon_{2t}$ لجميع قيم t. ومن ناحية أخرى، إذا كانت واحدة أو أكثر من القيم المختارة لاتساوي القيم الحقيقية المناظرة، فإن $F_t^a \neq \varepsilon_{2t}$ لجميع قيم t.

افترض، للحظة، أن قيم المعلمات التي اخترناها هي القيم الحقيقية. لذلك، فإن $\hat{F}_t^a = F_t = \varepsilon_{2t}$ افترض، أيضًا، أننا أجرينا، ماسنطلق عليه من الآن فصاعدًا، انحدار المرحلة الأولى للمتغير F_t المبني على المتغيرات الخارجية للنموذج ومربعاتها، أي X_{1t}، X_{2t}، X_{3t}، X_{1t}^2، X_{2t}^2 و X_{3t}^2، وعلى الحد الثابت وسنناقش أدناه، القضية المرتبطة باختيار المتغيرات المستقلة للمرحلة الأولى. وبالعودة إلى تحليلنا، دع $\hat{F}_t$ ترمز إلى القيمة المحسوبة لـ F_t من انحدار المرحلة الأولى، حينئذ، تتضمن النتائج الأولية المعطاة في المبحث السابق مباشرة أنه طالما أن $F_t = \varepsilon_{2t}$ هو خطأ عشوائي يحقق افتراضاتنا المعتادة كافة، وطالما أن F_t مستقل عن جميع المتغيرات الخارجية الثلاثة فإن $\hat{F}_t$ سوف تؤول في الاحتمال إلى الصفر عندما تتقارب N من ∞. اعتبر التجميع:

$$S = \sum_{t=1}^{N} \frac{\hat{F}_t^2}{N}. \qquad \text{(8A.16)}$$

حينئذ ينبغي أن يكون واضحًا أن S سوف تؤول، أيضًا، في الاحتمال إلى الصفر عندما تؤول N إلى ∞.

افترض الآن أن قيمنا المختارة للمعلمات ليست هي القيم الحقيقية، حينئذ، (وكما اشرنا) فإن متغيرنا المكون $F_t^a \neq \varepsilon_{2t},\ t=1,\ldots,N$. في هذه الحالة، تكون قيمة F_t^a دالة في متغيرات المعادلة أي في Y_{1t}، Y_{2t}، X_{2t} وX_{3t}. افترض الآن، كما في الحالة السابقة أنه تم انحدار F_t^a على المتغيرات المستقلة في المرحلة الأولى X_{1t}، X_{2t}، X_{3t}، X_{1t}^2، X_{2t}^2 وX_{3t}^2، والحد الثابت. دع القيم المحسوبة الناتجة لـ F_t^a هي $\hat{F}_t^a$. نتوقع، حينئذ، أن متوسط مجموع المربعات للقيم المحسوبة أي أن:

$$S^a = \sum_{t=1}^{N} \frac{(\hat{F}_t^a)^2}{N}, \qquad \text{(8A.17)}$$

لن تؤول في الاحتمال إلى الصفر. هذه هي الحالة بالضبط، مع وجود الافتراضات الفنية الإضافية. ولأن S^a هو مجموع مربعات، فإنه يمكن إثبات أن، مع توافر الفروض الفنية الإضافية، S^a سوف تؤول في الاحتمال إلى رقم موجب.

النقطة الأساسية في المناقشة السابقة هي أن متوسط الحدود $\left(\hat{F}_t^a\right)^2$ سوف يؤول إلى الصفر إذا كانت القيم المختارة للمعلمات هي القيم الحقيقية، وسوف يؤول إلى رقم موجب في الحالات الأخرى. وهكذا، فإن طريقة التقدير التالية واضحة. ابحث عن القيم الممكنة لمعلمات الانحدار حتى تجد المجموعة التي تصغر متوسط مربعات المتغيرات المحسوبة $\left(\hat{F}_t^a\right)^2$. نأخذ هذه المجموعة من القيم كتقديراتنا لمعلمات الانحدار. هذه المقدرات متسقة لأن حجم العينة لا نهائي، ويصل متوسط مربعات المتغيرات المحسوبة، $\left(\hat{F}_t^a\right)^2$ إلى حده الأدنى (عند الصفر) بوساطة القيم الحقيقية للمعلمات.

اختيار المتغيرات المستقلة للمرحلة الأولى

تشابه قضايا اختيار المتغيرات المستقلة للمرحلة الأولى، إلى حد كبير، تلك التي ناقشناها في المبحث (٨-٣). على سبيل المثال، إذا كان حجم العينة لانهائيًا، فإن تباينات مقدرات معلمات النموذج ستكون مرتبطة عكسيًا في انحدار المرحلة الأولى بقوى المتغيرات الخارجية، لذلك، فإن قوى أعلى وأعلى (مع القوى الأقل) لهذه المتغيرات ينبغي أن تؤخذ في الحسبان في انحدار المرحلة الأولى. ولكن، عند التطبيق، يكون حجم العينة محدودًا، ولذلك، فإن عدد الحدود المستخدمة في انحدار المرحلة الأولى ينبغي أن يكون محدودًا. وفي الحقيقة، يمكن إثبات أن استخدام عدد كبير من الحدود في انحدار المرحلة الأولى (مثلا P يساوي حجم العينة N) يؤدي إلى الحصول على مقدرات من نوع مقدرات المربعات الصغرى، وهذه المقدرات غير متسقة.* وكما في المبحث (٨-٣) تكون لدينا

---

* للقراء الأكثر دراية، إذا كانت P=N، حينئذ، $\hat{F}_t^a = F_t^a$. لذلك، سوف نختار قيم المعلمات لتقليل $\sum_{t=1}^{N}\left(\dot{F}_t^a\right)/N$ إلى حدها الأدنى، والتي تكون معادلة لتدنية مجموع مربعات الأخطاء العشوائية المقررة (أي طريقة المربعات الصغرى غير الخطية). ولكن طرق المربعات الصغرى لاتعطي مقدرات متسقة إذا كان نموذج الانحدار، من بين اشياء أخرى، له متغيرات داخلية في الجانب الايمن المعادلة.

معضلة، ومرة ثانية، نقترح اختيار P بحيث تكون $N\text{-}P \geq 20$. وبالطبع، تتطلب خاصية الاتساق أن تكون N-P لانهائية. نلاحظ، أيضًا، بدون إثبات أن خاصية الاتساق لطريقة التقدير تتطلب أن تكون P، في الأقل، مماثلة لعدد المعلمات التي ينبغي تقديرها.

استعراض عام وخطوط عريضة للطريقة

يمكننا الآن أن نعرض عرضًا عامًا الخطوط العريضة لطريقة تقدير المعادلة غير الخطية في كل من المتغيرات الداخلية والمعلمات في الخطوات التالية :

(١) أكتب المعادلة في شكل المعادلة (8A.5) وضع رمزًا للجانب الايسر منها F_t.

(٢) دع F_t^a القيمة التقريبية لـ F_t والتي تحدد عن طريق اختيار مجموعة من القيم للمعلمات التي تظهر في المعادلة.

(٣) حدد الأشكال متعددة الحدود للمتغيرات الخارجية التي تحدد المتغيرات المستقلة للمرحلة الأولى، تذكر أن عدد المتغيرات المستقلة في المرحلة الأولى، مثلا P، ينبغي أن يكون، في الأقل، كعدد المعلمات التي تظهر في المعادلة التي ينبغي تقديرها. وطالما أن حجم العينة في التطبيق العملي يكون محدودًا N. اختر P بحيث تكون (N-P) تعادل، في الأقل، 20.

(٤) دع $\hat{F}_t^a$ القيمة المحسوبة لـ F_t^a والتي يحصل عليها من انحدار F_t^a على المتغيرات المستقلة للمرحلة الأولى.

(٥) ابحث عن القيم الممكنة للمعلمات لإيجاد مجموعة من القيم التي تدني $\sum_{t=1}^{N} (\widehat{F}_t^a)^2 / N$ واعتبر هذه القيم تقديرات للمعلمات المناظرة.

من الواضح أن التنفيذ العملي لهذه الطريقة سيتطلب معلومات في التحليل العددي والبرمجة بالحاسوب، أو اتاحة برنامج حاسوب متخصص يحتوي على هذا المنهج باعتباره خيارًا.

اختبار الفرضيات، فترات الثقة وتباينات العينة الكبيرة: تعليق

لسوء الحظ، لايمكننا، من الآن فصاعدًا، أن نعطي قراءنا الأكثر دراية، صيغًا لتباينات العينة الكبيرة للمقدرات وذلك لأن عرضها يتطلب أدوات رياضية تجاوز مستوى هذا الكتاب.* ولكن، إذا كان برنامج الحاسوب المستخدم يحتوي على هذا المنهج بوصفه خيارًا، فسيطبع (من بين أشياء أخرى) تقديرات المعلمات وتقديرات التباينات للعينات الكبيرة المناظرة. ويمكن إثبات أنه، مع تحقيق فروض فنية إضافية، إذا كان حجم العينة لا نهائي، فإن مقدرات المعلمات سوف تكون موزعة توزيعًا طبيعيًا. لذلك، يمكن اختبار الفرضيات المرتبطة بقيمة إحدى المعلمات الفردية أو بناء فترات الثقة، بدلالة ناتج مثل هذا البرنامج، عن طريق استخدام التوزيع الطبيعي على سبيل التقريب. افترض، مثلا، أن a_2 هي واحدة من المعلمات، والناتج الذي يطبعه الحاسوب هو $\hat{a}=10$ و $\hat{\sigma}^2_{\hat{a}_2}=16$. حينئذ، فإن 95% فترة ثقة لـ a_2، المبنية على التوزيع الطبيعي للعينة الكبيرة ستكون $10 \pm 4(1.96)$ أو 10 ± 7.84.

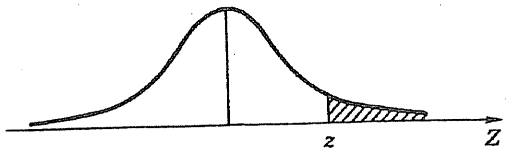
---

* بالنسبة للقراء الأكثر دراية، افترض أن المعادلة التي ينبغي تقديرها تأخذ شكل رقم (8A.5)، ونرمز للجانب الايسر للرمز F_t. افترض أن المعادلة تحتوي على معلمات a_0،...،a_k. دع $f_{it}=(\partial F_t/\partial a_i),\ i=0,...,k$ سوف تتضمن F_{it} عمومًا واحدًا أو أكثر من المعلمات a_0،...،a_k احصل على عدد N مشاهدات عن كل من f_{it} عن طريق التعويض عن المعلمات المتضمنة بمقدرات متسقة لـها. والآن، دع $\hat{f}_{it}$. ترمز إلى القيمة المحسوبة لـ f_{it}من انحدار f_{it} على المتغيرات المستقلة في المرحلة الأولى كافة. دع أخيراً $\hat{f}_{it}$ المتبقي رقم t من انحدار $\hat{f}_{it}$ على k متغيرات $\hat{f}_{jt}$، حيث إن $j\neq i$، حينئذ، يقدر تباين العينة الكبيرة لـ $\hat{a}_i$ تقديراً متسقاً على النحو $\hat{\sigma}^2/\sum_{t=1}^{N}\hat{f}^2_{it}$ حيث إن $\hat{\sigma}^2$ هي مقدر متسق لتباين الخطأ العشوائي للمعادلة.

الجداول الإحصائية

جدول (١). التوزيع الطبيعي المعياري

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

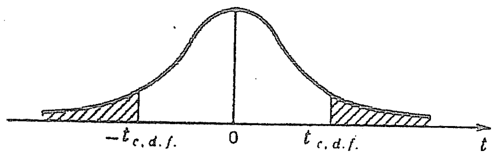


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010

The table plots the cumulative probability $Z \geq z$.

SOURCE: Reprinted from Edward J. Kane, *Economic Statistics and Econometrics: An Introduction to Quantitative Economics*, New York: Harper & Row, Publishers, 1968.

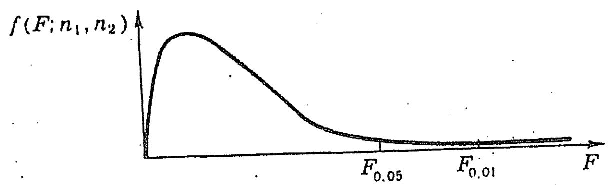
جدول (٢). التوزيع - t



Degrees of Freedom	Probability of a Value Greater in Absolute Value than the Table Entry					
	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.963
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	1.386
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	1.250
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	1.190
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	1.156
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	1.134
7	3.499	2.998	2.365	1.895	1.415	1.119
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	1.108
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	1.100
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	1.093
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	1.088
12	3.055	2.681	2.179	1.782	1.356	1.083
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	1.079
14	2.977	2.624	2.145	1.761	1.345	1.076
15	2.947	2.602	2.131	1.753	1.341	1.074
16	2.921	2.583	2.120	1.746	1.337	1.071
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	1.069
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	1.067
19	2.861	2.539	2.093	1.729	1.328	1.066
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	1.064
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	1.063
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	1.061
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.319	1.060
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	1.059
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	1.058
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	1.058
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	1.057
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	1.056
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	1.055
30	2.750	2.457	2.042	1.697	1.310	1.055
∞	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282	1.036

SOURCE: Reprinted from Table IV in Sir Ronald A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, 13th edition. Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh, 1963, with the permission of the publisher and the late Sir Ronald Fisher's Literary Executor.

جدول (٣). القيم الحرجة لتوزيع -F



n_2	n_1 degrees of freedom (for greater mean square): 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	n_2
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254	1
	4,052	**4,999**	**5,403**	**5,625**	**5,764**	**5,859**	**5,928**	**5,981**	**6,022**	**6,056**	**6,082**	**6,106**	**6,142**	**6,169**	**6,208**	**6,234**	**6,258**	**6,286**	**6,302**	**6,323**	**6,334**	**6,352**	**6,361**	**6,366**	
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.40	19.41	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.47	19.48	19.49	19.49	19.50	19.50	2
	98.49	**99.00**	**99.17**	**99.25**	**99.30**	**99.33**	**99.34**	**99.36**	**99.38**	**99.40**	**99.41**	**99.42**	**99.43**	**99.44**	**99.45**	**99.46**	**99.47**	**99.48**	**99.48**	**99.49**	**99.49**	**99.49**	**99.50**	**99.50**	
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76	8.74	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62	8.60	8.58	8.57	8.56	8.54	8.54	8.53	3
	34.12	**30.82**	**29.46**	**28.71**	**28.24**	**27.91**	**27.67**	**27.49**	**27.34**	**27.23**	**27.13**	**27.05**	**26.92**	**26.83**	**26.69**	**26.60**	**26.50**	**26.41**	**26.35**	**26.27**	**26.23**	**26.18**	**26.14**	**26.12**	
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93	5.91	5.87	5.84	5.80	5.77	5.74	5.71	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.63	4
	21.20	**18.00**	**16.69**	**15.98**	**15.52**	**15.21**	**14.98**	**14.80**	**14.66**	**14.54**	**14.45**	**14.37**	**14.24**	**14.15**	**14.02**	**13.93**	**13.83**	**13.74**	**13.69**	**13.61**	**13.57**	**13.52**	**13.48**	**13.46**	
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70	4.68	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.40	4.38	4.37	4.36	5
	16.26	**13.27**	**12.06**	**11.39**	**10.97**	**10.67**	**10.45**	**10.27**	**10.15**	**10.05**	**9.96**	**9.89**	**9.77**	**9.68**	**9.55**	**9.47**	**9.38**	**9.29**	**9.24**	**9.17**	**9.13**	**9.07**	**9.04**	**9.02**	
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.72	3.71	3.69	3.68	3.67	6
	13.74	**10.92**	**9.78**	**9.15**	**8.75**	**8.47**	**8.26**	**8.10**	**7.98**	**7.87**	**7.79**	**7.72**	**7.60**	**7.52**	**7.39**	**7.31**	**7.23**	**7.14**	**7.09**	**7.02**	**6.99**	**6.94**	**6.90**	**6.88**	
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60	3.57	3.52	3.49	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.29	3.28	3.25	3.24	3.23	7
	12.25	**9.55**	**8.45**	**7.85**	**7.46**	**7.19**	**7.00**	**6.84**	**6.71**	**6.62**	**6.54**	**6.47**	**6.35**	**6.27**	**6.15**	**6.07**	**5.98**	**5.90**	**5.85**	**5.78**	**5.75**	**5.70**	**5.67**	**5.65**	
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31	3.28	3.23	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.98	2.96	2.94	2.93	8
	11.26	**8.65**	**7.59**	**7.01**	**6.63**	**6.37**	**6.19**	**6.03**	**5.91**	**5.82**	**5.74**	**5.67**	**5.56**	**5.48**	**5.36**	**5.28**	**5.20**	**5.11**	**5.06**	**5.00**	**4.96**	**4.91**	**4.88**	**4.86**	
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10	3.07	3.02	2.98	2.93	2.90	2.86	2.82	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71	9
	10.56	**8.02**	**6.99**	**6.42**	**6.06**	**5.80**	**5.62**	**5.47**	**5.35**	**5.26**	**5.18**	**5.11**	**5.00**	**4.92**	**4.80**	**4.73**	**4.64**	**4.56**	**4.51**	**4.45**	**4.41**	**4.36**	**4.33**	**4.31**	
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94	2.91	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70	2.67	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.54	10
	10.04	**7.56**	**6.55**	**5.99**	**5.64**	**5.39**	**5.21**	**5.06**	**4.95**	**4.85**	**4.78**	**4.71**	**4.60**	**4.52**	**4.41**	**4.33**	**4.25**	**4.17**	**4.12**	**4.05**	**4.01**	**3.96**	**3.93**	**3.91**	
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82	2.79	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.50	2.47	2.45	2.42	2.41	2.40	11
	9.65	**7.20**	**6.22**	**5.67**	**5.32**	**5.07**	**4.88**	**4.74**	**4.63**	**4.54**	**4.46**	**4.40**	**4.29**	**4.21**	**4.10**	**4.02**	**3.94**	**3.86**	**3.80**	**3.74**	**3.70**	**3.66**	**3.62**	**3.60**	
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72	2.69	2.64	2.60	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30	12
	9.33	**6.93**	**5.95**	**5.41**	**5.06**	**4.82**	**4.65**	**4.50**	**4.39**	**4.30**	**4.22**	**4.16**	**4.05**	**3.98**	**3.86**	**3.78**	**3.70**	**3.61**	**3.56**	**3.49**	**3.46**	**3.41**	**3.38**	**3.36**	
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63	2.60	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.32	2.28	2.26	2.24	2.22	2.21	13
	9.07	**6.70**	**5.74**	**5.20**	**4.86**	**4.62**	**4.44**	**4.30**	**4.19**	**4.10**	**4.02**	**3.96**	**3.85**	**3.78**	**3.67**	**3.59**	**3.51**	**3.42**	**3.37**	**3.30**	**3.27**	**3.21**	**3.18**	**3.16**	

تابع جدول (٣).

n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	n_2
	n_1 degrees of freedom (for greater mean square)																								
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53	2.48	2.44	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.21	2.19	2.16	2.14	2.13	14
	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.70	3.62	3.51	3.43	3.34	3.26	3.21	3.14	3.11	3.06	3.02	3.00	
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.70	2.64	2.59	2.55	2.51	2.48	2.43	2.39	2.33	2.29	2.25	2.21	2.18	2.15	2.12	2.10	2.08	2.07	15
	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.56	3.48	3.36	3.29	3.20	3.12	3.07	3.00	2.97	2.92	2.89	2.87	
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42	2.37	2.33	2.28	2.24	2.20	2.16	2.13	2.09	2.07	2.04	2.02	2.01	16
	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.61	3.55	3.45	3.37	3.25	3.18	3.10	3.01	2.96	2.89	2.86	2.80	2.77	2.75	
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.41	2.38	2.33	2.29	2.23	2.19	2.15	2.11	2.08	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96	17
	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.45	3.35	3.27	3.16	3.08	3.00	2.92	2.86	2.79	2.76	2.70	2.67	2.65	
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.29	2.25	2.19	2.15	2.11	2.07	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93	1.92	18
	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.85	3.71	3.60	3.51	3.44	3.37	3.27	3.19	3.07	3.00	2.91	2.83	2.78	2.71	2.68	2.62	2.59	2.57	
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.55	2.48	2.43	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21	2.15	2.11	2.07	2.02	2.00	1.96	1.94	1.91	1.90	1.88	19
	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.19	3.12	3.00	2.92	2.84	2.76	2.70	2.63	2.60	2.54	2.51	2.49	
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.40	2.35	2.31	2.28	2.23	2.18	2.12	2.08	2.04	1.99	1.96	1.92	1.90	1.87	1.85	1.84	20
	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.71	3.56	3.45	3.37	3.30	3.23	3.13	3.05	2.94	2.86	2.77	2.69	2.63	2.56	2.53	2.47	2.44	2.42	
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.20	2.15	2.09	2.05	2.00	1.96	1.93	1.89	1.87	1.84	1.82	1.81	21
	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.65	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.07	2.99	2.88	2.80	2.72	2.63	2.58	2.51	2.47	2.42	2.38	2.36	
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.47	2.40	2.35	2.30	2.26	2.23	2.18	2.13	2.07	2.03	1.98	1.93	1.91	1.87	1.84	1.81	1.80	1.78	22
	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.02	2.94	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.46	2.42	2.37	2.33	2.31	
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.45	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20	2.14	2.10	2.04	2.00	1.96	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77	1.76	23
	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	2.97	2.89	2.78	2.70	2.62	2.53	2.48	2.41	2.37	2.32	2.28	2.26	
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.43	2.36	2.30	2.26	2.22	2.18	2.13	2.09	2.02	1.98	1.94	1.89	1.86	1.82	1.80	1.76	1.74	1.73	24
	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.25	3.17	3.09	3.03	2.93	2.85	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.36	2.33	2.27	2.23	2.21	
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.41	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.11	2.06	2.00	1.96	1.92	1.87	1.84	1.80	1.77	1.74	1.72	1.71	25
	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.21	3.13	3.05	2.99	2.89	2.81	2.70	2.62	2.54	2.45	2.40	2.32	2.29	2.23	2.19	2.17	
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.10	2.05	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.78	1.76	1.72	1.70	1.69	26
	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.17	3.09	3.02	2.96	2.86	2.77	2.66	2.58	2.50	2.41	2.36	2.28	2.25	2.19	2.15	2.13	

تابع جدول (٣).

n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	n_2
	n_1 degrees of freedom (for greater mean square)																								
27	4.21 7.68	3.35 5.49	2.96 4.60	2.73 4.11	2.57 3.79	2.46 3.56	2.37 3.39	2.30 3.26	2.25 3.14	2.20 3.06	2.16 2.98	2.13 2.93	2.08 2.83	2.03 2.74	1.97 2.63	1.93 2.55	1.88 2.47	1.84 2.38	1.80 2.33	1.76 2.25	1.74 2.21	1.71 2.16	1.68 2.12	1.67 2.10	27
28	4.20 7.64	3.34 5.45	2.95 4.57	2.71 4.07	2.56 3.76	2.44 3.53	2.36 3.36	2.29 3.23	2.24 3.11	2.19 3.03	2.15 2.95	2.12 2.90	2.06 2.80	2.02 2.71	1.96 2.60	1.91 2.52	1.87 2.44	1.81 2.35	1.78 2.30	1.75 2.22	1.72 2.18	1.69 2.13	1.67 2.09	1.65 2.06	28
29	4.18 7.60	3.33 5.42	2.93 4.54	2.70 4.04	2.54 3.73	2.43 3.50	2.35 3.33	2.28 3.20	2.22 3.08	2.18 3.00	2.14 2.92	2.10 2.87	2.05 2.77	2.00 2.68	1.94 2.57	1.90 2.49	1.85 2.41	1.80 2.32	1.77 2.27	1.73 2.19	1.71 2.15	1.68 2.10	1.65 2.06	1.64 2.03	29
30	4.17 7.56	3.32 5.39	2.92 4.51	2.69 4.02	2.53 3.70	2.42 3.47	2.34 3.30	2.27 3.17	2.21 3.06	2.16 2.98	2.12 2.90	2.09 2.84	2.04 2.74	1.99 2.66	1.93 2.55	1.89 2.47	1.84 2.38	1.79 2.29	1.76 2.24	1.72 2.16	1.69 2.13	1.66 2.07	1.64 2.03	1.62 2.01	30
32	4.15 7.50	3.30 5.34	2.90 4.46	2.67 3.97	2.51 3.66	2.40 3.42	2.32 3.25	2.25 3.12	2.19 3.01	2.14 2.94	2.10 2.86	2.07 2.80	2.02 2.70	1.97 2.62	1.91 2.51	1.86 2.42	1.82 2.34	1.76 2.25	1.74 2.20	1.69 2.12	1.67 2.08	1.64 2.02	1.61 1.98	1.59 1.96	32
34	4.13 7.44	3.28 5.29	2.88 4.42	2.65 3.93	2.49 3.61	2.38 3.38	2.30 3.21	2.23 3.08	2.17 2.97	2.12 2.89	2.08 2.82	2.05 2.76	2.00 2.66	1.95 2.58	1.89 2.47	1.84 2.38	1.80 2.30	1.74 2.21	1.71 2.15	1.67 2.08	1.64 2.04	1.61 1.98	1.59 1.94	1.57 1.91	34
36	4.11 7.39	3.26 5.25	2.86 4.38	2.63 3.89	2.48 3.58	2.36 3.35	2.28 3.18	2.21 3.04	2.15 2.94	2.10 2.86	2.06 2.78	2.03 2.72	1.98 2.62	1.93 2.54	1.87 2.43	1.82 2.35	1.78 2.26	1.72 2.17	1.69 2.12	1.65 2.04	1.62 2.00	1.59 1.94	1.56 1.90	1.55 1.87	36
38	4.10 7.35	3.25 5.21	2.85 4.34	2.62 3.86	2.46 3.54	2.35 3.32	2.26 3.15	2.19 3.02	2.14 2.91	2.09 2.82	2.05 2.75	2.02 2.69	1.96 2.59	1.92 2.51	1.85 2.40	1.80 2.32	1.76 2.22	1.71 2.14	1.67 2.08	1.63 2.00	1.60 1.97	1.57 1.90	1.54 1.86	1.53 1.84	38
40	4.08 7.31	3.23 5.18	2.84 4.31	2.61 3.83	2.45 3.51	2.34 3.29	2.25 3.12	2.18 2.99	2.12 2.88	2.07 2.80	2.04 2.73	2.00 2.66	1.95 2.56	1.90 2.49	1.84 2.37	1.79 2.29	1.74 2.20	1.69 2.11	1.66 2.05	1.61 1.97	1.59 1.94	1.55 1.88	1.53 1.84	1.51 1.81	40
42	4.07 7.27	3.22 5.15	2.83 4.29	2.59 3.80	2.44 3.49	2.32 3.26	2.24 3.10	2.17 2.96	2.11 2.86	2.06 2.77	2.02 2.70	1.99 2.64	1.94 2.54	1.89 2.46	1.82 2.35	1.78 2.26	1.73 2.17	1.68 2.08	1.64 2.02	1.60 1.94	1.57 1.91	1.54 1.85	1.51 1.80	1.49 1.78	42
44	4.06 7.24	3.21 5.12	2.82 4.26	2.58 3.78	2.43 3.46	2.31 3.24	2.23 3.07	2.16 2.94	2.10 2.84	2.05 2.75	2.01 2.68	1.98 2.62	1.92 2.52	1.88 2.44	1.81 2.32	1.76 2.24	1.72 2.15	1.66 2.06	1.63 2.00	1.58 1.92	1.56 1.88	1.52 1.82	1.50 1.78	1.48 1.75	44
46	4.05 7.21	3.20 5.10	2.81 4.24	2.57 3.76	2.42 3.44	2.30 3.22	2.22 3.05	2.14 2.92	2.09 2.82	2.04 2.73	2.00 2.66	1.97 2.60	1.91 2.50	1.87 2.42	1.80 2.30	1.75 2.22	1.71 2.13	1.65 2.04	1.62 1.98	1.57 1.90	1.54 1.86	1.51 1.80	1.48 1.76	1.46 1.72	46
48	4.04 7.19	3.19 5.08	2.80 4.22	2.56 3.74	2.41 3.42	2.30 3.20	2.21 3.04	2.14 2.90	2.08 2.80	2.03 2.71	1.99 2.64	1.96 2.58	1.90 2.48	1.86 2.40	1.79 2.28	1.74 2.20	1.70 2.11	1.64 2.02	1.61 1.96	1.56 1.88	1.53 1.84	1.50 1.78	1.47 1.73	1.45 1.70	48

تابع جدول (٣).

n_1 degrees of freedom (for greater mean square)

n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
50	4.03 7.17	3.18 5.06	2.79 4.20	2.56 3.72	2.40 3.41	2.29 3.18	2.20 3.02	2.13 2.88	2.07 2.78	2.02 2.70	1.98 2.62	1.95 2.56
55	4.02 7.12	3.17 5.01	2.78 4.16	2.54 3.68	2.38 3.37	2.27 3.15	2.18 2.98	2.11 2.85	2.05 2.75	2.00 2.66	1.97 2.59	1.93 2.53
60	4.00 7.08	3.15 4.98	2.76 4.13	2.52 3.65	2.37 3.34	2.25 3.12	2.17 2.95	2.10 2.82	2.04 2.72	1.99 2.63	1.95 2.56	1.92 2.50
65	3.99 7.04	3.14 4.95	2.75 4.10	2.51 3.62	2.36 3.31	2.24 3.09	2.15 2.93	2.08 2.79	2.02 2.70	1.98 2.61	1.94 2.54	1.90 2.47
70	3.98 7.01	3.13 4.92	2.74 4.08	2.50 3.60	2.35 3.29	2.23 3.07	2.14 2.91	2.07 2.77	2.01 2.67	1.97 2.59	1.93 2.51	1.89 2.45
80	3.96 6.96	3.11 4.88	2.72 4.04	2.48 3.56	2.33 3.25	2.21 3.04	2.12 2.87	2.05 2.74	1.99 2.64	1.95 2.55	1.91 2.48	1.88 2.41
100	3.94 6.90	3.09 4.82	2.70 3.98	2.46 3.51	2.30 3.20	2.19 2.99	2.10 2.82	2.03 2.69	1.97 2.59	1.92 2.51	1.88 2.43	1.85 2.36
125	3.92 6.84	3.07 4.78	2.68 3.94	2.44 3.47	2.29 3.17	2.17 2.95	2.08 2.79	2.01 2.65	1.95 2.56	1.90 2.47	1.86 2.40	1.83 2.33
150	3.91 6.81	3.06 4.75	2.67 3.91	2.43 3.44	2.27 3.14	2.16 2.92	2.07 2.76	2.00 2.62	1.94 2.53	1.89 2.44	1.85 2.37	1.82 2.30
200	3.89 6.76	3.04 4.71	2.65 3.88	2.41 3.41	2.26 3.11	2.14 2.90	2.05 2.73	1.98 2.60	1.92 2.50	1.87 2.41	1.83 2.34	1.80 2.28
400	3.86 6.70	3.02 4.66	2.62 3.83	2.39 3.36	2.23 3.06	2.12 2.85	2.03 2.69	1.96 2.55	1.90 2.46	1.85 2.37	1.81 2.29	1.78 2.23
1000	3.85 6.66	3.00 4.62	2.61 3.80	2.38 3.34	2.22 3.04	2.10 2.82	2.02 2.66	1.95 2.53	1.89 2.43	1.84 2.34	1.80 2.26	1.76 2.20
∞	3.84 6.64	2.99 4.60	2.60 3.78	2.37 3.32	2.21 3.02	2.09 2.80	2.01 2.64	1.94 2.51	1.88 2.41	1.83 2.32	1.79 2.24	1.75 2.18

n_2	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	n_2
50	1.90 2.46	1.85 2.39	1.78 2.26	1.74 2.18	1.69 2.10	1.63 2.00	1.60 1.94	1.55 1.86	1.52 1.82	1.48 1.76	1.46 1.71	1.44 1.68	50
55	1.88 2.43	1.83 2.35	1.76 2.23	1.72 2.15	1.67 2.06	1.61 1.96	1.58 1.90	1.52 1.82	1.50 1.78	1.46 1.71	1.43 1.66	1.41 1.64	55
60	1.86 2.40	1.81 2.32	1.75 2.20	1.70 2.12	1.65 2.03	1.59 1.93	1.56 1.87	1.50 1.79	1.48 1.74	1.44 1.68	1.41 1.63	1.39 1.60	60
65	1.85 2.37	1.80 2.30	1.73 2.18	1.68 2.09	1.63 2.00	1.57 1.90	1.54 1.84	1.49 1.76	1.46 1.71	1.42 1.64	1.39 1.60	1.37 1.56	65
70	1.84 2.35	1.79 2.28	1.72 2.15	1.67 2.07	1.62 1.98	1.56 1.88	1.53 1.82	1.47 1.74	1.45 1.69	1.40 1.62	1.37 1.56	1.35 1.53	70
80	1.82 2.32	1.77 2.24	1.70 2.11	1.65 2.03	1.60 1.94	1.54 1.84	1.51 1.78	1.45 1.70	1.42 1.65	1.38 1.57	1.35 1.52	1.32 1.49	80
100	1.79 2.26	1.75 2.19	1.68 2.06	1.63 1.98	1.57 1.89	1.51 1.79	1.48 1.73	1.42 1.64	1.39 1.59	1.34 1.51	1.30 1.46	1.28 1.43	100
125	1.77 2.23	1.72 2.15	1.65 2.03	1.60 1.94	1.55 1.85	1.49 1.75	1.45 1.68	1.39 1.59	1.36 1.54	1.31 1.46	1.27 1.40	1.25 1.37	125
150	1.76 2.20	1.71 2.12	1.64 2.00	1.59 1.91	1.54 1.83	1.47 1.72	1.44 1.66	1.37 1.56	1.34 1.51	1.29 1.43	1.25 1.37	1.22 1.33	150
200	1.74 2.17	1.69 2.09	1.62 1.97	1.57 1.88	1.52 1.79	1.45 1.69	1.42 1.62	1.35 1.53	1.32 1.48	1.26 1.39	1.22 1.33	1.19 1.28	200
400	1.72 2.12	1.67 2.04	1.60 1.92	1.54 1.84	1.49 1.74	1.42 1.64	1.38 1.57	1.32 1.47	1.28 1.42	1.22 1.32	1.16 1.24	1.13 1.19	400
1000	1.70 2.09	1.65 2.01	1.58 1.89	1.53 1.81	1.47 1.71	1.41 1.61	1.36 1.54	1.30 1.44	1.26 1.38	1.19 1.28	1.13 1.19	1.08 1.11	1000
∞	1.69 2.07	1.64 1.99	1.57 1.87	1.52 1.79	1.46 1.69	1.40 1.59	1.35 1.52	1.28 1.41	1.24 1.36	1.17 1.25	1.11 1.15	1.00 1.00	∞

SOURCE: George W. Snedecor, *Statistical Methods*, 5th edition, Ames, Iowa: The Iowa State University Press, 5th edition, 1956, pp. 246–249. Copyright © 1956 by the Iowa State University Press; reprinted by permission. The function $F = e$ with exponent $2z$, is computed in part from Fisher's table VI(7). Additional entries are by interpolation, mostly graphical.

جدول (٤). القيم الحرجة لاختبار دبريان - واتسون

n	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$	
	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u
15	0.95	1.23	0.83	1.40	0.71	1.61	0.59	1.84	0.48	2.09
16	0.98	1.24	0.86	1.40	0.75	1.59	0.64	1.80	0.53	2.03
17	1.01	1.25	0.90	1.40	0.79	1.58	0.68	1.77	0.57	1.98
18	1.03	1.26	0.93	1.40	0.82	1.56	0.72	1.74	0.62	1.93
19	1.06	1.28	0.96	1.41	0.86	1.55	0.76	1.72	0.66	1.90
20	1.08	1.28	0.99	1.41	0.89	1.55	0.79	1.70	0.70	1.87
21	1.10	1.30	1.01	1.41	0.92	1.54	0.83	1.69	0.73	1.84
22	1.12	1.31	1.04	1.42	0.95	1.54	0.86	1.68	0.77	1.82
23	1.14	1.32	1.06	1.42	0.97	1.54	0.89	1.67	0.80	1.80
24	1.16	1.33	1.08	1.43	1.00	1.54	0.91	1.66	0.83	1.79
25	1.18	1.34	1.10	1.43	1.02	1.54	0.94	1.65	0.86	1.77
26	1.19	1.35	1.12	1.44	1.04	1.54	0.96	1.65	0.88	1.76
27	1.21	1.36	1.13	1.44	1.06	1.54	0.99	1.64	0.91	1.75
28	1.22	1.37	1.15	1.45	1.08	1.54	1.01	1.64	0.93	1.74
29	1.24	1.38	1.17	1.45	1.10	1.54	1.03	1.63	0.96	1.73
30	1.25	1.38	1.18	1.46	1.12	1.54	1.05	1.63	0.98	1.73
31	1.26	1.39	1.20	1.47	1.13	1.55	1.07	1.63	1.00	1.72
32	1.27	1.40	1.21	1.47	1.15	1.55	1.08	1.63	1.02	1.71
33	1.28	1.41	1.22	1.48	1.16	1.55	1.10	1.63	1.04	1.71
34	1.29	1.41	1.24	1.48	1.17	1.55	1.12	1.63	1.06	1.70
35	1.30	1.42	1.25	1.48	1.19	1.55	1.13	1.63	1.07	1.70
36	1.31	1.43	1.26	1.49	1.20	1.56	1.15	1.63	1.09	1.70
37	1.32	1.43	1.27	1.49	1.21	1.56	1.16	1.62	1.10	1.70
38	1.33	1.44	1.28	1.50	1.23	1.56	1.17	1.62	1.12	1.70
39	1.34	1.44	1.29	1.50	1.24	1.56	1.19	1.63	1.13	1.69
40	1.35	1.45	1.30	1.51	1.25	1.57	1.20	1.63	1.15	1.69
45	1.39	1.48	1.34	1.53	1.30	1.58	1.25	1.63	1.21	1.69
50	1.42	1.50	1.38	1.54	1.34	1.59	1.30	1.64	1.26	1.69
55	1.45	1.52	1.41	1.56	1.37	1.60	1.33	1.64	1.30	1.69
60	1.47	1.54	1.44	1.57	1.40	1.61	1.37	1.65	1.33	1.69
65	1.49	1.55	1.46	1.59	1.43	1.62	1.40	1.66	1.36	1.69
70	1.51	1.57	1.48	1.60	1.45	1.63	1.42	1.66	1.39	1.70
75	1.53	1.58	1.50	1.61	1.47	1.64	1.45	1.67	1.42	1.70
80	1.54	1.59	1.52	1.62	1.49	1.65	1.47	1.67	1.44	1.70
85	1.56	1.60	1.53	1.63	1.51	1.65	1.49	1.68	1.46	1.71
90	1.57	1.61	1.55	1.64	1.53	1.66	1.50	1.69	1.48	1.71
95	1.58	1.62	1.56	1.65	1.54	1.67	1.52	1.69	1.50	1.71
100	1.59	1.63	1.57	1.65	1.55	1.67	1.53	1.70	1.51	1.72

SOURCE: J. Durbin and G. S. Watson, "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression," *Biometrika*, vol. 38 (1951), pp. 159–177. Reprinted with permission of the authors and the Trustees of Biometrika.

إجابة الأسئلة

الفصل الأول

١- $$\bar{X}=3,\ \sum_{t=1}^{n}(X_t-\bar{X})=-3+2+3-2=0.$$

٢- $$\sum_{t=1}^{2}(aX_t+bY_t+cZ_t)=(aX_1+bY_1+cZ_1)+\cdots+(aX_n+bY_n+cZ_n)$$
$$=(aX_1+\cdots+aX_n)+(bY_1+\cdots+bY_n)$$
$$+(cZ_1+\cdots+cZ_n)$$
$$=\sum_{t=1}^{n}aX_t+\sum_{t=1}^{n}bY_t+\sum_{t=1}^{n}cZ_t$$
$$=a\sum_{t=1}^{n}X_t+b\sum_{t=1}^{n}Y_t+c\sum_{t=1}^{n}Z_t$$

٣- $$\sum_{t=1}^{n}(X_t-\bar{X})(Y_t-\bar{Y})=\sum_{t=1}^{n}[X_t(Y_t-\bar{Y})-\bar{X}(Y_t-\bar{Y})]$$
$$=\sum_{=1}^{n}X_t(Y_t-\bar{Y})-\sum_{t=1}^{n}\bar{X}(Y_t-\bar{Y}).$$

ولكن، بما أن $\bar{X}$ ثابت، فإنه يمكننا كتابة الحد الأخير على النحو $\bar{X}\sum_{1}^{n}(Y_t-\bar{Y})=0$.

الفصل الثاني

١-

$$1.\ \hat{a}=\hat{Y}-\hat{b}\overline{X}=\sum_{t=1}^{n}\frac{Y_t}{n}-\overline{X}\sum_{t=1}^{n}\frac{(X_t-\overline{X})Y_t}{\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})^2}$$

$A=\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})^2$ ، حيثئذ:

$$d=\sum_{t=1}^{n}\frac{Y_t}{n}-\frac{\overline{X}}{A}\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})Y_t=\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{1}{n}-\frac{\overline{X}}{A}(X_t-\overline{X})\right]Y_t.$$

وبما أن $W_t=(X_t-\overline{X})/A$ عندئذ تتحقق الإجابة المطلوبة.

٢- (أ) المعادلات الطبيعية هي :

$$\sum Y_t=n\hat{a}_0+\hat{b}\sum X_t,$$

$$\sum X_tY_t=\hat{a}_0\sum X_t+\hat{b}\sum X_t^2.$$

وتعطينا حسابات القيم المشاهدة لـ X_t و Y_t النتائج.

$$\sum_{t=1}^{5}Y_t=30,\ \sum_{t=1}^{5}X_t=12,\ \sum_{t=1}^{5}X_t^2=34,\ \sum_{t=1}^{5}X_1Y_t=74,\ N=5$$

(ب) تعطينا المعادلات الطبيعية :

$$30=5\hat{a}+12\hat{b},$$

$$74=12\hat{a}+34\hat{b}.$$

وبحل هذه المجموعة من المعادلات، نحصل على :

$$\hat{a}=5.076,\qquad \hat{b}=0.385.$$

$$\hat{\sigma}_u^2=\frac{\sum(Y_t-\hat{Y}_t)^2}{n-2}=3.077.$$

٣- هذه العبارة خاطئة لأنها تهمل وجود الخطأ العشوائي، u_t، الذي يأخذ قيمًا موجبة وقيمًا سالبة. ولكن قيمته المتوقعة $E(u_t)$ هي الصفر. العلاقة $C_t = a + bY_t$ ليست علاقة مؤكدة، ولكنها، في الأصح، علاقة وسط.

٤- نشتق أولا μ_Y :

$$E(Y)=E(5-3X)=5-3E(X)=5-3\mu_X=\mu_Y.$$

ولذا، يكون التغاير :

$$\sigma_{X,Y}=E(Y-\mu_Y)(X-\mu_X)=E(5-3X-5+3\mu_X)(X-\mu_X)$$
$$=E[-3(X-\mu_X)^2]=-3\sigma_X^2.$$

ويكون تباين Y هو $E(Y-\mu_Y)^2=9\sigma_x^2$، وهكذا، فإن $\sigma_Y=3\sigma_x$. لذا، يكون معامل الارتباط هو :

$$\rho_{XY}=\frac{-3\sigma_X^2}{3\sigma_X\sigma_X}=-1$$

٥- نستخدم هنا العلاقة الأساسية لتباين مجموع المتغيرات العشوائية. توضح هذه العلاقة أنه إذا كان $Y = a_0X + a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$ وكانت $(X_1، \ldots، X_n)$ مستقلة، حينئذ :

$$\text{var}(Y)=a_1^2\sigma_{X_1}^2+a_2^2\sigma_{X_2}^2+\cdots+a_n^2\sigma_{X_n}^2$$

وبتطبيق هذه العلاقة للمسألة نحصل على :

$$\text{var}(Y)=4+27+500=531$$

٦- (أ) يمكن صياغة التحليل على النحو :

$$Y_i=a+b(T_{ci}-T_{si})+u_i,$$

حيث إن :

Y_i = متوسط دخل الاسرة في المدينة i

T_{ci} = معدل الضريبة في المدينة i

T_{si} = معدل الضريبة في ضواحي المدينة i، وأخيراً

u_i = الخطأ العشوائي.

(ب) تكوين مختلف للافتراض نفسه هو :

$$Y_i = a + b\frac{T_{ci}}{T_{si}} + u_i$$

في كلتا الحالتين، تكون $b<0$، أي أنه إذا كان T_c مرتفعا بالنسبة لـ T_s، نتوقع أن تقيم الاسرة متوسطة الدخل في الضواحي ومرتفعته، وهكذا فإن متوسط الدخل العائلي لتلك الاسرة التي تبقى في المدينة، Y_i، سيكون منخفضا.

٧- بالتعويض من (2) في (1)، نحصل على :

$$Y_t = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)X_t + \varepsilon_t.$$

وهكذا، فإن تأثير X_t على القيمة المتوسطة لـ Y_t سيكون $(b_1 + b_2)$. تبين هذه المشكلة أنه يمكننا اعتبار نموذجنا للانحدار الثنائي المعتاد مشتقاً من نموذج آخر يكون فيه الخطأ العشوائي مرتبطا خطيا بالمتغير المستقل كما في (2).

٨- نعم، ولبيان ذلك، عوض عن الخطأ العشوائي في المعادلة (1) من السؤال السابق للحصول على :

$$Y_t = (a_1 + a_2) + b_1X_t + (b_2X_t^2 + \varepsilon_t).$$

وهكذا، فإن النموذج الذي يربط Y_t و X_t سيحتوي على $w_t = b_2X_t^2 + \varepsilon_t$ باعتباره عشوائيا. ومن الواضح أن : w_t لن تكون لها قيمة متوسطة صفرية. أكثر من ذلك، فإنه طالما أن X_t و X_t^2 مرتبطان ارتباطا واضحا. فإن w_t ستكون مرتبطة مع المتغير المستقل X_t أيضا.

وإذا كانت قيم X_t مرتبطة عند نقاط زمنية مختلفة، لذلك، ستكون w_t كذلك، ولذلك فإن $\text{cov}(w_t, w_s) \neq 0$. أخيرا، طالما أن قيم w_t تعتمد جزئيا على قيم X_t، فإن تباين w_t لن يكون متساويا في كل فترة زمنية.

٩- دع A_t عمر الطفل في الزمن t وH_t طوله مقاسا بالبوصات. حينئذ، يمكننا أن نفترض:

$$H_t = a + bA_t + u_t,$$

حيث نتوقع $b > 0$. وأحد أوجه القصور لهذه العلاقة هو أنها تكون صحيحة، فقط، لعدد محدود من السنوات، أي أنه، على الرغم من أن الطفل سوف يتقدم في العمر سنة بعد أخرى، فإن ارتفاعه لن يتجاوز حدا معينا أعلى.

١٠- (أ) سيأخذ نموذج الانحدار الشكل :

$$Y_t = a + bX_t^m + (u_t - b\varepsilon_t).$$

(ب) نعم، سيكون الخطأ العشوائي مرتبطاً بالمتغير المستقل X_t^m. ولتوضيح ذلك، لاحظ أن:

$$E[X_t^m(u_t - b\varepsilon_t)] = E(X_t^m u_t) - bE(X_t^m \varepsilon_t)$$
$$= 0 - b\sigma_\varepsilon^2 \neq 0,$$

طالما أن $(X_t^m\, \varepsilon_t) = X_t\, \varepsilon_t + \varepsilon_t^2$ وأن X_t و ε_t مستقلان.

الفصل الثالث

١- دع S متوسط مقياس الذكاء I-Q لجميع الافراد في المجتمع، حينئذ، نختبر $H_0 : S = 100$ مقابل $H_1 : S > 100$. وطالما أننا مهتمون، فقط، بالحالة $S \geq 100$ فيمكننا استخدام اختبار الذيل الواحد لـ t مع درجات حرية قدرها (100-1=99). نجد أن القيمة الدنيا لـ S هي $\left[\hat{S} - \left(t_{n-1;\, 0.95}\right)\hat{\sigma}_s = 110 - 1.65(2)\right.$ وطالما أن الحد الأدنى لـ S أعلى من 100، فإننا نرفض $H_0 : S = 100$ ونقبل $H_1 : S > 100$.

٢- دع $\overline{X}_{20}$ و $\overline{X}_{30}$ متوسطات العينة والمبنية على حجم 20 و 30 على الترتيب. حينئذ، إذا كانت العينتان كلتاهما قد سحبتا من المجتمع نفسه، $E(\overline{X}_{20}) = E(\overline{X}_{30}) = \mu$ حيث μ هي القيمة المتوسطة للمجتمع. وهكذا يكون كلا المقدرين غير متحيزين. ولكننا سنفضل $\overline{X}_{30}$ لأن تباينها سيكون أصغر. لذلك فإن استخدامها سيؤدي إلى فترات ثقة اضيق واختبارات افضل للفرضيات.

٣- نعرف من النتائج أن $\hat{\alpha} = 0.125$. ولذا، قد نختبر الافتراض $H_0 : \alpha = 0$ مقابل $H_1 : \alpha \neq 0$، ويتم ذلك في معادلتنا عن طريق اختبار $H_0 : (1 - \alpha) = 1$ مقابل $H_1 : (1 - \alpha) \neq 1$ وتكون القيمة المطلقة لنسبة t هي :

$$\left|\frac{0.875 - 1.00}{0.15}\right| = \frac{0.125}{0.15} = 0.83,$$

التي تكون أقل كثيرا من 2. كذلك، نقبل الفرض العدمي ونستنتج أن التغير في الساعات لايتناسب مع الانحراف عن 40.

٤- دع h القيمة المتوقعة للارتفاع. نختبر بعد ذلك $H_0 : h = 70$ مقابل $H_1 : h < 70$ وطالما أننا مهتمون، فقط، بـ $h \leq 70$، فيمكننا أن نستخدم اختبار الذيل الواحد. وهنا نجد أن الحد الأعلى لقيمة h هي $\left(\hat{h} + 1.65\sigma_h = 68 + 1.65(2) = 71.3\right)$ وطالما أن $70 \leq 71.3$ فإننا نقبل $H_0 : h = 70$.

٥- يسهل لنا افتراض الطبيعية بناء فترات الثقة واختبار الفرضيات، وقد وضّح ذلك في الكتاب، غير ان افتراض الطبيعية ليس شرطا ضروريا لبناء فترات الثقة، أو اختبار الفرضيات، ولكن، بدون افتراض الطبيعية، ستصبح هذه المهام أكثر صعوبة.

٦- ستكون فرضية العدم : إن القيمة المتوسطة لأطول الناس في الغرب 67 بوصة، وتكون الفرضية البديلة أن القيمة المتوسطة لأطوالهم يزيد على 67 بوصة. ونقع في النوع الأول من الخطأ عندما ندفع للاعتقاد بأنهم طوال وهم، في الحقيقة، غير ذلك. وينتج عن ذلك أن إعادة تجهيز غير ضرورية للتجربة ستحدث. إضافة إلى ذلك، فإن معاطف من الحجم غير الصحيح ستنتج. ونقع في الخطأ من النوع الثاني عندما ندفع للاعتقاد بأنهم ليسوا طوالا وهم، في الحقيقة، كذلك. ويترتب على ذلك أنه سيتم إنتاج معاطف من الحجم غير المناسب. ويتضمن هذا أن النوع الأول من الخطأ قد يكون، في حالتنا هذه، أكثر تكلفة من النوع الثاني من الخطأ.

٧- ليس النموذج الخطي مقيدًا بتلك الدرجة كما يظهر لك، لأن الاستخدام الجيد للتحويلات المختلفة يمكننا من تحويل تشكيلة عريضة من العلاقات غير الخطية إلى أشكال خطية. وبجعل $Z_t = 1/(1 - X_t)$، تكون مصفوفة المشاهدات هي:

Y_t	X_t	Z_t
1	0	1
10	0.1	1.11
12	0.5	2

٨- (أ) نختبر الفرضية (عند مستوى معنوية 5%) عن طريق ملاحظة هل تزداد القيمة المطلقة لنسبة t عن 2 بصورة معنوية، وطالما أنها تحقق ذلك فإننا نرفض فرضية العدم.

(ب) الانحرافات المعيارية هي :

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}} = \frac{15}{3.1} \doteq 4.84, \qquad \hat{\sigma}_{\hat{b}} = \frac{0.81}{18.7} \doteq 0.043,$$

(ج) وتكون 95% فترة ثقة هي :

$$0.81 \pm (t_{n-2;\,0.975})\, 0.043 = 0.81 \pm 0.091.$$

٩- قد يمكن التعبير عن فرضية أن الطلب على الرعاية الاجتماعية، D_t، يرتبط بمعدل الإعانة B_t على النحو :

$$D_t = a_1 + a_2 B_t + u_{1t},$$

حيث نتوقع أن $a_2 > 0$. ويمكن التعبير عن فرضية أن معدل الاعانة يرتبط بالطلب على الرعاية الاجتماعية، من خلال الضغط السياسي، على النحو:

$$B_t = b_1 + b_2 D_{t-1} + u_{2t},$$

وذلك إذا افترضنا وجود فترة إبطاء بسبب العملية السياسية.

١٠- دع N_t عدد المنشآت التي تتوطن ولاية معينة. حينئذ، فإن نموذج التوطن قد يمكن التعبير عنه على النحو :

$$N_t = a_1 + b_1 \left(\frac{T_{1t}}{T_{2t}}\right) + u_{1t} ,$$

حيث T_{1t} هي الضريبة في ولاية معينة، T_{2t} هي معدل الضريبة المتوسطة في الولايات المجاورة ولذلك، نتوقع أن يكون $b_1 < 0$. وبالمثل إذا جعلنا P_t يرمز إلى احد مقاييس التلوث، حينئذ فإن علاقة التلوث قد يمكن التعبير عنها على النحو :

$$P_t = a_2 + b_2 N_t + u_{2t} ,$$

ونتوقع أن يكون $b_2 > 0$.

١١- إذا قمنا بالحل للحصول على X_t، يكون لدينا :

$$X_t = \frac{5 - Z_t}{3}.$$

وبالتعويض في نموذج الانحدار، يكون لدينا :

$$Y_t = a + b\left(\frac{5}{3} - \frac{Z_t}{3}\right) + u_t$$
$$= (a + \frac{5}{3} b) - \frac{b}{3} Z_t + u_t .$$

وهكذا يكون الحد الثابت هو $(a + 5/3\ b)$ والميل هو $(- b/3)$.

الفصل الرابع

١- افتراضات النموذج تكون على النحو التالي :

(أ) ١ - تكون القيمة المتوقعة للخطأ العشوائي مساوية الصفر $E(u_t) = 0$.

٢ - يكون تباين الخطأ العشوائي ثابتا $E(u_t - 0)^2 = E(u_t^2) = \sigma_u^2$.

٣ - تكون قيمة الخطأ العشوائي لإحدى المشاهدات مستقلة عن قيمتـه لأي مشاهدة أخرى، لذلك يكون التغاير بين أي خطأين عشوائيـين لأي مشاهدتين u_t و u_s مساويا الصفر $\mathrm{cov}(u_t, u_s) = 0$.

٤ – الخطأ العشوائي مستقل عن كل واحد من المتغيرات المستقلة، والقيم المبطئة لها كافة، لذلك فإن $\text{cov}(u_t, X_{it}) = 0$.

٥ – لا يكون أي من المتغيرات المستقلة مولفاً خطياً من الآخرين.

(ب) المعادلات الطبيعية هي :

$$1.\ \sum Y_t = n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum X_{1t} + \hat{a}_2 \sum X_{2t},$$
$$2.\ \sum X_{1t}Y_t = \hat{a}_0 \sum X_{1t} + \hat{a}_1 \sum X_{1t}^2 + \hat{a}_2 \sum X_{1t}X_{2t},$$
$$3.\ \sum X_{2t}Y_t = \hat{a}_0 \sum X_{2t} + \hat{a}_1 \sum X_{2t}X_{1t} + \hat{a}_2 \sum X_{2t}^2.$$

نشتق المعادلة الطبيعية الأولى عن طريق جعل $\Sigma\hat{u}_t = 0$ ويناظر هذا الافتراض $E(u_t) = 0$. بينما تشتق المعادلة الطبيعية الثانية عن طريق جعل $\Sigma(X_{1t}\hat{u}_t) = 0$، ويناظر هذا الافتراض $E(X_{1t}\ u_t) = \text{cov}(X_{1t}, u_t) = 0$. وتشتق المعادلة الطبيعية الثالثة عن طريق $\Sigma(X_{2t}\hat{u}_t) = 0$، ويناظر الافتراض $E(X_{2t}\ u_t) = \text{cov}(X_{2t}, u_t) = 0$.

(ج)

$$10 = 100\hat{a}_0$$
$$30 = 35\hat{a}_1$$
$$20 = 3\hat{a}_2$$
$$\hat{a}_0 = \frac{1}{10}$$
$$\hat{a}_1 = \frac{6}{7}$$
$$\hat{a}_2 = \frac{20}{3}$$

٢– المعلمات التي لايمكن تقديرها هي a_1، a_2 و a_3. ويرجع ذلك إلى أن المتغير المستقل الثالث $(X_{1t} - X_{2t})$ هو توليفة خطية من X_{1t} و X_{2t}. لذلك، يوجد لدينا

تعدد علاقات خطية تام. ويعني ذلك أن المعادلات الطبيعية المناظرة هي توليفة خطية من المعادلات الطبيعية المنـاظـرة لـــ X_{1t} و X_{2t}، وهكذا، لا يمكننـا، عموما، أن نحل هذه المعادلات للحصول على مقدرات المعلمات. لاحظ أن $X_{2t}X_{1t}$ توليفة غير خطية، ومن ثم، لا يمثل مشكلة لنا. وبإعادة كتابة المعادلة على النحو :

$$Y_t = a_0 + (a_1 + a_3)X_{1t} + (a_2 - a_3)X_{2t} + a_4 X_{1t} X_{2t} + \varepsilon_t ,$$

نجد أنه يمكننا الحل للحصول على $\hat{a}_0$، $(a_1 \hat{+} a_3)$، $(a_2 \hat{-} a_3)$ و $\hat{a}_4$.

٣- المعادلات الطبيعية هي :

$$\sum Y_t = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum X_{1t} + \hat{b}_2 \sum X_{2t},$$
$$\sum X_1 Y_t = \hat{b}_0 \sum X_{1t} + \hat{b}_1 \sum X_{1t}^2 + \hat{b}_2 \sum X_{1t} X_{2t},$$
$$\sum X_2 Y_t = \hat{b}_0 \sum X_{2t} + \hat{b}_1 \sum X_{2t} X_{1t} + \hat{b}_2 \sum X_{2t}^2.$$

وتعطينا الحسابات، باستخدام القيم المشاهدة لكل من X_t و Y_t مايلي :

$$\Sigma X_1 X_2 = 12,\ \Sigma Y_t = 30,\ \Sigma X_2 = 9,\ \Sigma X_1 = 8,\ n = 5$$
$$\Sigma X_{1t}^2 = 16,\ \Sigma X_{2t}^2 = 19,\ \Sigma X_{1t} Y_t = 50,\ \Sigma X_{2t} Y_t = 51$$

وبإدخال هذه القيم المحسوبة في معادلتنا الطبيعية نحصل على :

$$30 = 5\hat{b}_0 + 8\hat{b}_1 + 9\hat{b}_2,$$
$$50 = 8\hat{b}_0 + 18\hat{b}_1 + 12\hat{b}_2,$$
$$51 = 9\hat{b}_0 + 12\hat{b}_1 + 19\hat{b}_2.$$

٤- يمكن التعبير عن نموذج الانحدار على النحو :

$$Y_i = a + b_1(T_{ci} - T_{si}) + b_2(C_{ci} - C_{si}) + b_3(H_{ci} - H_{si}) + b_4 D_{ci} + u_i ,$$

Y_i = الدخل المتوسط في المدينة i،

T_{ci} = معدل الضريبة في المدينة i،

T_{si} = معدل الضريبة في الضاحية المناظرة i،

C_{ci} = معدل الجريمة في المدينة i،

C_{si} = معدل الجريمة في ضاحية المدينة i،

H_{ci} = تكاليف السكن في المدينة i،

H_{si} = تكاليف السكن في الضاحية المناظرة i،

D_{ci} = الكثافة السكانية في المدينة i (سكان/ ميل مربع)، وأخيراً

u_i = الخطأ العشوائي.

تعتمد أهمية البيانات المقطعية وبيانات السلاسل الزمنية على طبيعة المشكلة. وفي انحدارنا هذا، تكون البيانات المقطعية، على الأرجح، أكثر فائدة لأن معدلات الضرائب ومعدلات الجرائم، وتكاليف السكن والكثافة تميل للتغير تغيرًا كبيرًا عبر المدن أكثر منه عبر الزمن داخل مدينة معينة. وفي هذا النموذج، نتوقع أن تأخذ معلمات النموذج كافة قيماً سالبة.

٥- (أ) العلاقة الخطية التامة :

$$\overline{P}_t = \frac{\sum_{t=1}^{k} P_{it}}{k}$$

تتضمن أن المعادلة الطبيعية (k+1) تكون توليفة خطية من المعادلات الطبيعية الـ k الأولى. وبينما يكون لدينا معلمات عددها (k+3) لكي نقدرها، فإنه يتوافر لدينا، فقط، (k+2) من المعادلات الطبيعية المستقلة. وهكذا لا يمكننا، عموما، أن نحل هذا النموذج من اجل الحصول على قيم فريدة لمقدرات المعلمات.

(ب) بالتعويض عن $P_t = \sum_{i=1}^{k} (p_{it}) / k$ في معادلة الطلب وتجميع الحدود نحصل على :

$$D_{it} = a_0 + P_{1t}\left(a_1 + \frac{b}{k}\right) + P_{2t}\left(a_2 + \frac{b}{k}\right) + \cdots$$
$$+ P_{kt}\left(a_k + \frac{b}{k}\right) + cY_t + u_{1t}.$$

وهكذا سنكون قادرين على تقدير a_0 و $(a_1 + b/4)$ و c حيث إن $i=1,...,k$.

٦- (أ) لا تعاني هذه المعادلة من تعدد علاقات خطية تام طالما أن X_t و X_t^2 ليسا مرتبطين ارتباطا تاما، وتكون المعادلات الطبيعية:

$$\sum Y_t = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum X_t + \hat{b}_2 \sum X_t^2,$$
$$\sum Y_t X_t = \hat{b}_0 \sum X_t + \hat{b}_1 \sum X_t^2 + \hat{b}_2 \sum X_t^3,$$
$$\sum Y_t X_t^2 = \hat{b}_0 \sum X_t^2 + \hat{b}_1 \sum X_t^3 + \hat{b}_2 \sum X_t^4.$$

نلاحظ أن هذه المعادلات الثلاثة مستقلة خطيا، ولذا، يمكننا أن نحلها للحصول على $\hat{b}_0$، $\hat{b}_1$ و $\hat{b}_2$.

(ب)

$$4 = 4\hat{b}_0 + 8\hat{b}_1 + 30\hat{b}_2,$$
$$23 = 8\hat{b}_0 + 30\hat{b}_1 + 134\hat{b}_2,$$
$$107 = 30\hat{b}_0 + 134\hat{b}_1 + 642\hat{b}_2.$$

الفصل الخامس

١- باستخدام التحويل اللوغاريتمي للدالة، نحصل على :

$$Q_t' = B + aL_t' + bK_t' + u_t,$$

حيث :

Q_t' = لوغاريتم Q،

B = لوغاريتم (1/A)،

L_t' = لوغاريتم L، وأخيرا

K_t' = لوغاريتم K.

نقدر B، a و b ثم نأخذ $\hat{A} = e^{-\hat{B}}$. نلاحظ أن $\hat{A}$ سيكون متحيزا ولكن متسقا

٢- نموذج الانحدار هو :

$$I_t = a_0 + b_1 r_t + b_2 D_1 + u_t,$$

حيث :

$0 = D_t$ إذا كان الرئيس من الديمقراطيين في الزمن t ،

$1 = D_t$ إذا كان الرئيس من الجمهوريين ،

r_t = معدل الفائدة ،

u_t = الخطأ العشوائي .

٣- النموذج هو :

$$\begin{aligned}
C_t &= a_0 + a_1 Z_{1t} + a_2 Z_{2t} + a_3 Z_{3t} + u_t, \\
Z_{1t} &= F_t Y_t, \\
Z_{2t} &= Y_t^{1/2}, \\
Z_{3t} &= \frac{1}{A_t}.
\end{aligned}$$

٤- لنأخذ الانتقال المحتمل للدالة في الحسبان، ندخل متغيرا صوريا في النموذج، ومن ثم، يصبح نموذج الانحدار :

$$C_i = a + bY_i + cD_i + u_t,$$

حيث

$0 = D_t$ إذا كان المستهلك i يعيش في منطقة حضرية،

$1 = D_t$ إذا كان يعيش في منطقة أخرى.

وهكذا، إذا كان المستهلك i يقيم بمنطقة ريفية يكون الانحدار $C_t = (a+c) + bY_t + u_t$ بينما إذا كان يقيم في منطقة حضرية فإن الدالة تصبح $C_t = a + bY_t + u_t$.

٥- (أ) نموذج الانحدار هو :

$$I_t = b_0 + b_1 r_t + b_2 \Pi_t + b_3 \Delta S_t + u_t,$$

حيث

I_t = الإنفاقات الاستثمارية،

Π_t = معدل الربح،

ΔS_t = التغير في المبيعات،

r_t = معدل الفائدة.

u_t = الخطأ العشوائي

(ب) المشكلة في تقدير الانحدار الحالي هي وجود تعدد العلاقات الخطية. وبالتحديد إذا كان معدل الارباح هو ١٥٪ في كل فترة زمنية، فلن نكون قادرين على تقدير b_0 و b_2.

٦- (أ) يكون الشكل غير المقيد من النموذج هو :

$$I_t = a_0 + a_1 r_t + b_0 S_t + b_1 S_{t-1} + \cdots + b_7 S_{t-7} + u_t.$$

(ب) شكل آلمون للنموذج، باستخدام $b_i = \alpha_0 + \alpha_{1i} + \alpha_{2i^2}$ ، هو :

$$I_t = a_0 + a_1 r_t + \alpha_0 Z_{1t} + \alpha_1 Z_{2t} + \alpha_2 Z_{3t} + u_t.$$

حيث :

$$Z_{1t} = \Sigma_{t=0}^{7}\ s_{t-1},\ Z_{2t} = \Sigma_{t=1}^{7} i s_{t-i},\ Z_{3t} = \Sigma_{t=1}^{7} i^2 s_{t-1}$$

(ج) المعادلات الطبيعية هي:

$$\sum_{t=0}^{n} I_t = n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{t=0}^{n} r_t + \hat{\alpha}_0 \sum_{t=0}^{n} Z_{1t} + \hat{\alpha}_1 \sum_{t=0}^{n} Z_{2t} + \hat{\alpha}_2 \sum_{t=0}^{n} Z_{3t},$$

$$\sum_{t=0}^{n} r_t I_t = \hat{a}_0 \sum_{t=0}^{n} r_t + \hat{a}_1 \sum_{t=0}^{n} r_t^2 + \hat{\alpha}_0 \sum_{t=0}^{n} r_t Z_{1t} + \hat{\alpha}_1 \sum_{t=0}^{n} r_t Z_{2t} + \hat{\alpha}_2 \sum_{t=0}^{n} r_t Z_{3t},$$

$$\sum_{t=0}^{n} Z_{1t} I_t = \hat{a}_0 \sum_{t=0}^{n} Z_{1t} + \hat{a}_1 \sum_{t=0}^{n} Z_{1t} r_t + \hat{\alpha}_0 \sum_{t=0}^{n} Z_{1t}^2 + \hat{\alpha}_1 \sum_{t=0}^{n} Z_{1t} Z_{2t} + \hat{\alpha}_2 \sum_{t=0}^{n} Z_{1t} Z_{3t},$$

$$\sum_{t=0}^{n} Z_{2t} I_t = \hat{a}_0 \sum_{t=0}^{n} Z_{2t} + \hat{a}_1 \sum_{t=0}^{n} Z_{2t} r_t + \hat{\alpha}_0 \sum_{t=0}^{n} Z_{2t} Z_{1t} + \hat{\alpha}_1 \sum_{t=0}^{n} Z_{2t}^2 + \hat{\alpha}_2 \sum_{t=0}^{n} Z_{2t} Z_{3t},$$

$$\sum_{t=0}^{n} Z_{3t} I_t = \hat{a}_0 \sum_{t=0}^{n} Z_{3t} + \hat{a}_1 \sum_{t=0}^{n} Z_{3t} r_t + \hat{\alpha}_0 \sum_{t=0}^{n} Z_{3t} Z_{1t}$$
$$+ \hat{\alpha}_1 \sum_{t=0}^{n} Z_{3t} Z_{2t} + \hat{\alpha}_2 \sum_{t=0}^{n} Z_{3t}^2.$$

٧- (أ) سيكون تقدير b_2 على النحو :

$$\hat{b}_2 = \hat{\alpha}_0 + 2\hat{\alpha}_1 + 4\hat{\alpha}_2 + 8\hat{\alpha}_3 + 16\hat{\alpha}_4$$
$$= 1 + 6 + 20 + 32 - 160 = -101.$$

(ب) وبالتعويض عن الـ b's في النموذج الأصلي، نحصل على :

$$Y_t = a + \alpha_0 Z_{1t} + \alpha_1 Z_{2t} + \alpha_2 Z_{3t} + \alpha_3 Z_{4t} + \alpha_4 Z_{5t} + u_t,$$

حيث :

$$Z_{1t} = \sum_{i=0}^{6} X_{t-i}, \qquad Z_{2t} = \sum_{i=0}^{6} i X_{t-i},$$
$$Z_{3t} = \sum_{i=1}^{6} i^2 X_{t-i}, \qquad Z_{4t} = \sum_{i=0}^{6} i^3 X_{t-i},$$
$$Z_{5t} = \sum i^4 X_{t-1}.$$

وحيث إن:

$$\sum_{i=0}^{6} b_i = 7\alpha_0 + \sum_{i=0}^{6} i\alpha_1 + \sum_{i=0}^{6} i^2 \alpha_2 + \sum_{i=0}^{6} i^3 \alpha_3 + \sum_{i=0}^{6} i^4 \alpha_4 = 1,$$

فإنه يمكننا أن نوجد α_0 على النحو :

$$\alpha_0 = \frac{(1 - 21\alpha_1 - 91\alpha_2 - 441\alpha_3 - 2275\alpha_4)}{7}.$$

وبالتعويض عن α_0 في الانحدار السابق، نحصل على :

$$Y_t = a + \alpha_1 Q_{1t} + \alpha_2 Q_{2t} + \alpha_3 Q_{3t} + \alpha_4 Q_{4t} + u_t,$$

حيث :

$$Y_t^* = \left(Y_t - \frac{Z_{1t}}{7}\right),$$

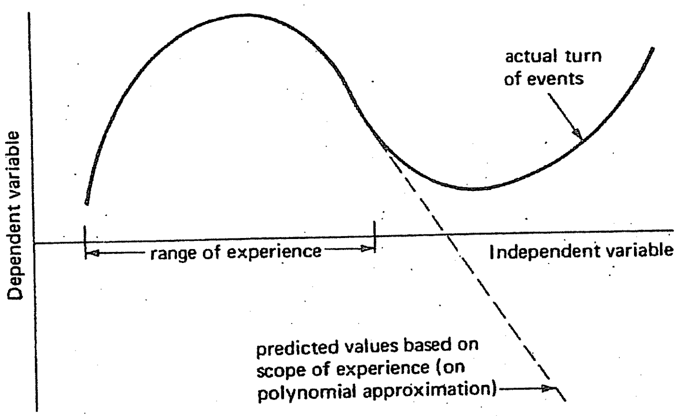
$$Q_{1t} = Z_{2t} - \frac{21Z_{1t}}{7},$$

$$Q_{2t} = Z_{3t} - \frac{91Z_{1t}}{7},$$

$$Q_{3t} = Z_{4t} - \frac{441Z_{1t}}{7}.$$

$$Q_{4t} = Z_{5t} - \frac{2275Z_{1t}}{7}$$

٨- معظم الدوال التي يعالجها الاقتصاديون يمكن تقريبها بمتعدد الحدود. وتحدد درجة متعدد الحدود بنطاق الخبرة أو بعدد المتغيرات المتضمنة في الدالة. بالنسبة للحالات الجديدة، خارج نطاق الخبرة، فإن استخدام متعدد الحدود بدرجة مختلفة قد يكون ملائما. لذلك، فقد لايكون من الملائم أن نستخدم معادلتنا المقدرة لأغراض التنبؤ هذه. يتضح هذا من الشكل التالي :



٩- بتحويل المعادلة إلى معادلة مبطئة والضرب في λ ثم طرحها من المعادلة الأصلية يكون لدينا :

$$Y_t = (a_0 - \lambda a_0) + a_1 X_t - a_1 \lambda X_{t-1} + \lambda Y_{t-1} + b_0 Z_t + u_t - \lambda u_{t-1}.$$

١٠- إذا كانت $b_5 = 3$، يكون لدينا $\alpha_0 + 5\alpha_1 + 25$. لذلك، قد يمكننا حل هذه المعادلة للحصول على $\alpha_0 = 3 - 5\alpha_1 - 25\alpha_2$. ويكون الشكل غير المقيد لنموذج آلمون هو:

$$Y_t = b + \alpha_0 Z_{0t} + \alpha_1 Z_{1t} + \alpha_2 Z_{2t} + u_t,$$

حيث

$$Z_{0t} = \sum_{i=0}^{10} X_{t-i}, \qquad Z_{1t} = \sum_{i=1}^{10} iX_{t-1}, \qquad Z_{2t} = \sum_{i=1}^{10} i^2 X_{t-i}.$$

وبالتعويض عن α_0، نحصل على الشكل المقيد:

$$Y_t^* = b + \alpha_1 Q_{1t} + \alpha_2 Q_{2t} + u_t,$$

حيث

$$Y_t^* = Y_t - 3Z_{0t}, \qquad Q_{1t} = (Z_{1t} - 5Z_{0t}),$$

وأيضا،

$$Q_{2t} = (Z_{2t} - 25Z_{0t}).$$

١١- دع

$$D_t = \begin{cases} 1 & if\ r_t > 0.05, \\ 0 & \text{في الحالات الأخرى} \end{cases}$$

حينئذ، يكون نموذجنا للانحدار هو:

$$C_t = a + b_1 Y_t + b_2 (D_t r_t) + u_t.$$

١٢- دع:

$$\log Y_t = Y_t^*,$$

$$e^{X_{1t}} = Z_{1t},$$

$$\frac{1}{1 + X_{1t} X_{2t}} = Z_{2t}.$$

حينئذ، يمكن كتابة نموذج الانحدار على النحو:

$$Y_t^* = a_0 + a_1 Z_{1t} + a_2 Z_{2t} + u_t.$$

وتكون المعادلة الطبيعية هي :

$$\sum Y_t^* = n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum Z_{1t} + \hat{a}_2 \sum Z_{2t},$$
$$\sum Z_{1t} Y_t^* = \hat{a}_0 \sum Z_{1t} + \hat{a}_1 \sum Z_{1t}^2 + \hat{a}_2 \sum Z_{1t} Z_{2t},$$
$$\sum Z_{2t} Y_t^* = \hat{a}_0 \sum Z_{2t} + \hat{a}_1 \sum Z_{1t} Z_{2t} + \hat{a}_2 \sum Z_{2t}^2.$$

االفصل السادس

١- الخطوة الأولى: احسب $\hat{b}$ و $\hat{a}$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^{15}(X_t - \overline{X})Y_t}{\sum_{t=1}^{15}(X_t - \overline{X})^2} = \frac{255}{280} \doteq 0.91.$$

ومن ثم فإن

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} = -0.28.$$

$$\hat{Y}_t = -0.28 + 0.91\,X_t, \qquad \hat{u}_t = Y_t - (-0.28 + 0.91X_1).$$

الخطوة الثانية: احسب $\hat{u}_t^2$ و $(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2$:

Y_t	$\hat{u}_t^2$	$(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2$
0.63	1.876	–
1.54	0.211	0.828
2.45	0.203	0.828
3.36	5.570	3.648
4.27	1.612	1.188
5.18	0.032	1.188
6.09	0.008	0.008
7.00	1.000	0.828
7.91	4.368	9.548
8.82	1.392	0.828
9.73	0.073	0.828
10.64	1.850	1.188
11.55	11.903	4.369
12.46	6.052	34.928
13.37	5.617	0.008
	41.767	60.213

$$\sum \hat{u}_t^2 = 41.767,$$
$$\sum (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2 = 60.213.$$

ولذلك، تكون $d = 60.213 / 41.767 \doteq 1.44$، وهي أكبر من الحد الأعلى 1.23 من الجدول الإحصائي رقم ٤. ولذا، نرفض وجود الارتباط الذاتي.

٢- (أ) من المنطقي أن نجادل بوجود اختلاف تباين، لأن من الصعب الاعتقاد أنه بينما ينمو الناتج على مدى الزمن، فإن تباين أحد مكوناته، الخطأ العشوائي، لاينمو.

(ب) يؤدي حذف K_t من الانحدار إلى ايجاد مقدرات متحيزة لكل من a و b لأن الخطأ العشوائي في المعادلة الناتجة سيكون : $u_t^* = cK_t + u_t$. وستكون القيمة المتوسطة لهذا الخطأ العشوائي، عموما، غير مساوية الصفر، وسيكون مرتبطاً بالمتغير المستقل L_t. نتوقع تحيزا موجبا في $\hat{b}$ لأن L_t ستضم اثرها إلى أثر رأس المال على الناتج معا.

٣- (أ) بتجميع المعادلة (I) والقسمة على N ، نحصل على :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{C_{it}}{N} = a + b_1 \sum_{i=1}^{N} \frac{Y_{it}}{N} + b_2 \sum_{i=1}^{N} \frac{Y_{it}^{\ 2}}{N} + \frac{\sum u_{it}}{N}.$$

وباستخدام تعريفاتنا، نحصل على :

$$C_t = a + b_1 Y_t + b_2 \sum_{t=1}^{N} \frac{Y_{it}^{\ 2}}{N} + u_t$$

والآن

$$\sum_{i=t}^{N} Y_{it}^{\ 2} = \sum_{i=1}^{N} (Y_{it} - Y_t + Y_t)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{N} (Y_{it} - Y_t)^2 + \sum_{i=1}^{N} Y_t^2 + 2\sum_{i=1}^{N} Y_t (Y_{it} - Y_t).$$

ويساوي الحد الأخير :

$$2\sum_{i=1}^{N} Y_t(Y_{it} - Y_t) = Y_t \sum_{i=1}^{N}(Y_{it} - Y_t) = 0$$

الصفر طالما أن Y_t هي القيمة المتوسطة لـ Y_{it} . لاحظ، أيضا، أن:

حيث

$$\sum_{i=1}^{N} Y_t^2 = NY_t^2.$$

وهكذا، فإن نموذجنا الكلي للاقتصاد ينبغي أن يصبح بعد القسمة على N:

$$C_t = a + b_1 Y_t + b_2 Y_t^2 + b_2 s_t^2 + u_t,$$

حيث

$$s_t^2 = \sum_{i=1}^{T} \frac{(Y_{it} - Y_t)^2}{N}.$$

هذا الحد (s_t^2) هو مقياس للتغير في الدخل عبر المجتمع، لـذلـك، فـإن النموذج الكلي، كما يظهر في المعادلة (3) يكون قد صيغ صياغة غير صحيحة.

(ب) مصفوفة المشاهدات ستكتب بالطريقتين الأساسيتين التاليتين :

t	C_{it}	Y_{it}
1	C_{11}	Y_{11}
2	C_{12}	Y_{12}
1	C_{21}	Y_{21}
2	C_{22}	Y_{22}
1	C_{31}	Y_{21}
2	C_{32}	Y_{32}

t	C_{it}	Y_{it}
1	C_{11}	Y_{11}
1	C_{21}	Y_{21}
1	C_{31}	Y_{31}
2	C_{12}	Y_{12}
2	C_{22}	Y_{22}
2	C_{32}	Y_{32}

(ج) سيكون لدينا، عموما، تحيز التجـمـيـع Aggregation bias لأن متوسط الشكل غير الخطي للمتغير لن يعادل الشكل غير الخطي لمتوسط ذلـك المتغير. على سبيل المثال، رأينا أن $\Sigma Y_{it}^2 / N \neq Y_t^2$ حيث Y_t هو متوسط Y_{it} . وبصورة أعم سيكون لدينا : $\Sigma_{i=t}^{N} f(X_{it}) / N \neq f(X_t)$ حيث X_t هي القيمة المتوسطة لـ X_{it} عبر المجتمع.

٤- (أ) المعادلات الطبيعية هي :

$$(1)\ \sum M_{dt} = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum i_t + \hat{b}_2 \sum i_{(t-1)} + \hat{b}_3 \sum \Delta i_t,$$
$$(2) \sum i_t M_{dt} = \hat{b}_0 \sum i_t + \hat{b}_1 \sum i_t^2 + \hat{b}_2 \sum i_t i_{(t-1)} + \hat{b}_3 \sum i_t\ \Delta i_t,$$
$$(3) \sum i_{(t-1)} M_{dt} = \hat{b}_0 \sum i_{t-1} + \hat{b}_1 \sum i_t i_{(t-1)} + \hat{b}_2 \sum i_{(t-1)}^2 + \hat{b}_3 \sum i_{t-1}\ \Delta i_t,$$
$$(4) \sum \Delta i_t M_{dt} = b_0 \sum \Delta i_t + \hat{b}_1 \sum \Delta i_t i_t + \hat{b}_2 \sum \Delta i_t i_{t-1} + \hat{b}_3 \sum \Delta i_t^2$$

وبتذكر أن $\Delta = i_t - i_{t-1}$، يمكننا إعادة كتابة المعادلة (4) على النحو :

$$(5) \sum (i_t - i_{t-1}) M_{dt} = \hat{b}_0 \sum i_t - \hat{b}_0 \sum i_{t-1} + \hat{b}_1 \sum i_t^2 - \hat{b}_1 \sum i_t i_{t-1}$$
$$+ \hat{b}_2 \sum i_t i_{t-1} - \hat{b}_2 \sum i_{t-1}^2 + \hat{b}_3 \sum i_t^2$$
$$+ \hat{b}_3 \sum i_{t-1}^2 - 2\hat{b}_3 \sum i_t i_{t-1}.$$

يتضح لنا من فحص بسيط أن المعادلـة (5) تساوي المعادلة (2) مطروحاً منها المعادلة (3). ويعني هذا أن المعادلة الطبيعية الرابعة ليست مستقلة. بينما لدينا أربعة مقدرات للمعلمات ينبغي أن نجد لها حلاً $\hat{b}_0$، $\hat{b}_1$، $\hat{b}_2$ و $\hat{b}_3$ فإنه يتوافر لنا ثلاث معادلات مستقلة، فقط، وهكذا، فمن المستحيـل تقدير هذه المعلمات.

(ب) بالتعويض عن Δi في معادلة الطلب وإعادة ترتيب الحدود، نحصل على:

$$M_{dt} = b_0 + b_1^* i_t + b_2^* i_{t-1} + u_t, \qquad b_1^* = (b_1 + b_3) \text{ and } b_2^* = (b_2 - b_3).$$

٥- بأخذ التحويل اللوغاريتمي لدالة الإنتاج، نحصل على:

$$\log Q_t = \log A + \alpha_1 \log L_{1t} + \alpha_2 \log(10{,}000 - L_{1t}) + \alpha_3 \log K_t.$$

والآن، يمكننا استخدام الطريقة العادية لتقدير هذه المعادلة، طالما أن $\log L_t$ و $\log(10{,}000 - L_t)$ ليسا مرتبطين ارتباطا خطيا تاما.

٦- نعلم من المتن أن :

$$\hat{b} = b + \frac{W_1 u_1}{A} + \cdots + \frac{W_n u_n}{A}, \qquad (1)$$

حيث إن : $W_t = X_t - \overline{X}$ و $A = \Sigma(X_t - \overline{X})^2$ من (١) نحصل على:

$$(\hat{b}-b)^2 = \frac{W_1^2 u_1^2}{A^2} + \cdots + \frac{W_n^2 u_n^2}{A^2} + \frac{W_1 W_2 u_1 u_2}{A^2} + \cdots + W_t W_j u_t u_j + \cdots$$

وهكذا

$$\sigma_{\hat{b}}^2 = E(\hat{b}-b)^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sum (X-\overline{X})^2} + E(\text{all cross product terms})$$

وبسبب الارتباط الذاتي، لم تعد القيمة المتوسطة لهذه الحدود الناتجة عن حاصل ضرب المتجهات صفرية، ومن ثم، لم تعد صيغة للتباين صحيحة.

٧- للتخلص من اختلاف التباين الموجود بالمعادلة، نقسم المعادلة على Y_t :

$$\frac{C_t}{Y_t} = b_0 \frac{1}{Y_t} + b_1 + b_2 \frac{A_t}{Y_t} + u_t^*,$$

حيث إن $u_t^* = u_t/Y_t$، وتكون المعادلات الطبيعية :

$$\sum \frac{C_t}{Y_t^2} = \hat{b}_0 \sum \frac{1}{Y_t^2} + \hat{b}_1 \sum \frac{1}{Y_t} + b_2 \sum \frac{A_t}{Y_t^2},$$

$$\sum \frac{C_t}{Y_t} = \hat{b}_0 \sum \frac{1}{Y_t} + n\hat{b}_1 + \hat{b}_2 \sum \frac{A_t}{Y_t},$$

$$\sum \frac{C_t A_t}{Y_t^2} = \hat{b}_0 \sum \frac{A_t}{Y_t^2} + \hat{b}_1 \sum \frac{A_t}{Y_t} + \hat{b}_2 \sum \frac{A_t^2}{Y_t^2}.$$

لاحظ أن هذه المعادلة لها حد ثابت ولذا نستخدم الشرط $\Sigma \hat{u}_t^2 = 0$.

٨- **الخطوة الأولى**: a_0، a_1 و a_2 بالطريقة العادية.

الخطوة الثانية: استخدم المعاملات المقدرة في الحصول على مجموعة من القيم المقدرة للخطأ العشوائي، حيث :

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 \Delta Y_t - \hat{a}_2 r_t.$$

الخطوة الثالثة: ادخل قيم $\hat{\varepsilon}_t$ في العلاقة :

$$\hat{\varepsilon}_t = \rho_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \rho_2 \hat{\varepsilon}_{t-2} + u_t.$$

قدر P_2, P_1 عن طريق وضع :

$$\Sigma(\hat{u}_t\hat{\varepsilon}_{t-1})=0 \quad \text{و} \quad \Sigma(\hat{u}_t\hat{t}_{t-2})=0$$

الخطوة الرابعة: حول النموذج الأصلي إلى :

$$I_t^* = a_0^* + a_1\,\Delta Y_t^* + a_2 r_t^* + u_t\,,$$

حيث :

$$I_t^* = I_t - \hat{\rho}_1 I_{t-1} - \hat{\rho}_2 I_{t-2}\,,$$
$$a_0^* = a_0 - \hat{\rho}_1 a_0 - \hat{\rho}_2 a_0\,,$$
$$\Delta Y_t^* = \Delta Y_t - \hat{\rho}_1\,\Delta Y_{t-1} - \hat{\rho}_2\,\Delta Y_{t-2}\,,$$
$$r_t^* = r_t - \hat{\rho}_1 r_{t-1} - \hat{\rho}_2 r_{t-2}\,.$$

الخطوة الخامسة: قدر a_0^*، a_1 و a_2 بالطريقة المعتادة، ثم اجعل :

$$\hat{a}_0 = \hat{a}_0^* / (1 - \hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2).$$

الفصل السابع

١- (أ) المتغيرات الداخلية هي C_t، Y_t و I_t، أما المتغيرات المحددة مسبقا فهي C_{t-1}، Y_{t-1} و r_t.

(ب) المشكلة الموجودة في المعادلة (1) هي أن Y_t مرتبطة بـ ε_{it} ولذلك، تكون الطريقة هو إحلال $\hat{Y}_t$ محل Y_t، ونحصل على $\hat{Y}_t$ عن طريق إجراء انحدار لـ Y_t على جميع المتغيرات المحددة مسبقا وهي C_{t-1}، Y_{t-1} و r_t. وهكذا سيكون $\hat{Y}_t$:

$$\hat{Y}_t = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 C_{t-1} + \hat{\gamma}_2 Y_{t-1} + \hat{\gamma}_3 r_t\,.$$

ثم نقدر المعادلة (1)، حينئذ، بالطريقة المعتادة بعد أن نحل $\hat{Y}_t$ محل Y_t، أي أن المعادلات الطبيعية حصل عليها عن طريق وضع المجاميع التالية مساوية للصفر : $\Sigma\hat{\varepsilon}_t^* = 0$، $\Sigma(\hat{\varepsilon}_t^* C_{t-1}) = 0$ وأيضا $\Sigma(\hat{\varepsilon}_t^* Y_t) = 0$.

(جـ) لتقدير المعادلة (3)، نستخدم الطريقة نفسها التي اتبعناها في تقدير (1). وسنحصل على المعادلات الطبيعية عن طريق وضع المجاميع التالية مساوية الصفر.

و : $\Sigma(\hat{\varepsilon}_2^*\hat{Y}_t)=0$ و $\Sigma(\hat{\varepsilon}_2^* r_t)=0$ و $\Sigma(\hat{\varepsilon}_2^* Y_{t-1})=0$ و $\Sigma\hat{\varepsilon}_2^*=0$

٢- (أ) المعادلة الأولى مميزة حيث إن عدد المتغيرات المحددة مسبقا في النموذج التي لا تظهر في المعادلة الأولى، $\dot{M}_t$ ، أكبر من عدد المتغيرات الداخلية $(\dot{P}_t)$ التي تظهر في بالمعادلة الأولى أو تساويه. ولكن ذلك ليس صحيحاً بالنسبة للمعادلة الثانية، ولذا تكون غير مميزة.

(ب) تكون طريقة التقدير للمعادلة الأولى على النحو التالي :

الخطوة الأولى: نحصل على $(\hat{\dot{P}}_t)$ عن طريق انحدار لـ $(\dot{P}_t)$ على المتغيرات المحددة مسبقا كافة وهي $\dot{M}_t$ و UN_t وهكذا يكون $(\hat{\dot{P}}_t)$ هو :

$$\hat{\dot{P}}_t=\hat{\gamma}_0+\hat{\gamma}_1\dot{M}_t+\gamma_2 UN_t$$

الخطوة الثانية: نجعل $(\hat{\dot{P}}_t)$ محل $(\dot{P}_t)$ في المعادلة الأولى ثم نكمل كالعادة للحصول على معادلات المرحلة الثانية الطبيعية عن طريق وضع المجاميع التالية مساوية الصفر :

$$\sum \hat{\varepsilon}_{1t}^*=0,\sum(\hat{\varepsilon}_{1t}^* UN_t)=0,\sum(\hat{\varepsilon}_{1t}^*\hat{P}_t)=0.$$

٣- (أ) للحصول على معادلات الشكل المختزل، نحل المعادلات (1) و (2) للحصول على L_t و W_t ويكون الشكل المختزل :

$$L_t=a_0^*+a_1^*P_t+a_2^*S_t+v_t,$$
$$W_t=b_0^*+b^*S_t+b_2^*P_t+\varepsilon_t,$$

$$a_0^*=\frac{a_0+a_1b_0}{1-a_1b_1},\qquad a_1^*=\frac{a_1b_2}{1-a_1b_1},\qquad a_2^*=\frac{a_0}{1-a_1b_1},$$
$$v_t=\frac{a_1u_{2t}+u_{1t}}{1-a_1b_1},\qquad b_0^*=\frac{b_0+b_1a_0}{1-a_1b_1},\qquad b_1^*=\frac{b_1a_2}{1-a_1b_1},$$
$$b_2^*=\frac{b_2}{1-a_1b_1},\qquad \varepsilon_t=\frac{u_2+b_1u_{1t}}{1-a_1b_1}.$$

(ب) المشكلة الموجودة في المعادلة (1) هي أن W_t مرتبط بالخطأ العشوائي u_t. ولذلك نحل $\hat{W}_t$ محل W_t، ونحصل على $\hat{W}_t$ عن طريق اجراء انحدار W_t على المتغيرات المحددة مسبقاً وهي S_t و P_t. لذلك فإن $\hat{W}_t$ ستأخذ الشكل :

$$\hat{W}_t = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 S_t + \hat{\gamma}_2 P_t.$$

بعدئذ، تقدر المعادلة (1) بالطريقة العادية بعد إحلال $\hat{W}_t$ محل W_t أي أن المعادلات الطبيعية قد حصل عليها عن طريق مساواة المجاميع التالية بالصفر :

$$\sum \hat{u}_{1_t}^* = 0, \sum (\hat{u}_{1_t}^* \hat{W}_t) = 0, \sum (\hat{u}_{1_t}^* S_t) = 0.$$

٤- (أ) إن إحدى الطرق البديهية لإدراك أن $D_{i(t-1)}$ يكون مرتبطاً مع u_{it} هي على النحو التالي: من المعادلة (1)، نجد أن $D_{i(t-1)}$ يعتمد على $u_{i(t-1)}$. ولكن، طالما أن $u_{it} = \rho u_{i(t-1)} + \varepsilon_{it}$، فإن u_{it} يعتمد، أيضا على $u_{i(t-1)}$. وهكذا فإن $D_{i(t-1)}$ و u_{it} مرتبطان لأنهما يحتويان عنصرا مشتركا.

(ب) إذا حلت المعادلة الأساسية حلا متكررا، فإنه يتبين لنا D_{it} تعتمد على ρ_t وعلى جميع قيمها المبطأة وبصراحة يكون لدينا :

$$D_{it} = a_0 + a_0 a_2 + a_0 a_2^2 + \cdots + a_1 P_t + a_1 a_2 P_{t-1} + a_1 a_2^2 P_{t-2} + \cdots + u_{it} + a_2 u_{i(t-1)} + a_2^2 u_{i(t-2)} + \cdots.$$

إضافة إلى ذلك، نجد أن D_{it} سوف تعتمد على u_{it} وعلى قيمها المبطئة. وهكذا فإن وسط D_{it} سيعتمد، فقط، على ρ_t وعلى جميع قيمها المبطأة. فإذا اخذنا في الحسبان المعادلة السابقة التي تربط D_{it} بقيم كل من ρ_t و u_t بوصفها معادلة ذات شكل مختزل فسيمكننا أن ننفذ طريقة م ص م الموصوفة في الكتاب لنموذج تكون به جميع المتغيرات المحددة مسبقا إما غير معلومة أو لا تتوافر لدينا مشاهدات عنها. وبمعنى آخر، يمكننا تنفيذ طريقة م ص م عن طريق إجراء انحدار D_{it} على P_t و $\hat{D}_{i(t-1)}$، حيث أن $\hat{D}_{i(t-1)}$ تحسب عن طريق

انحدار $D_{i(t-1)}$ على P_t وبعض قيمه المبطأة، ثلاثة منها، مثلا.

٥- بالتعويض من (1) و (2) نحصل على

$$X_{2t}=b_0^*+b_1^*X_{1t}+v_t^*, \qquad (1')$$

حيث

$$b_0^*=\frac{c_0+c_1b_0}{1-c_1b_2},\quad b_1^*=\frac{c_1b_1}{1-c_1b_2},\quad v_t^*=\frac{c_1u_{1t}+u_{2t}}{1-c_1b_2}.$$

وبضرب (1') في u_{it} وأخذ القيم المتوقعة نحصل على :

$$E(X_{2t}u_{1t})=b_0^*E(u_{1t})+b_1^*E(u_{1t}X_{1t})+\frac{c_1E(u_{1t}^2)}{1-c_1b_2}+\frac{E(u_{1t}u_{2t})}{1-c_1b_2}$$

وبتذكر أن :

$$E(u_{1t})=0 \text{ و } E(u_1X_{1t})=0 \text{ ، } E(u_{1t}u_{2t})=\text{cov}(u_1,u_2),$$

يكون لدينا :

$$E(X_{2t}u_{1t})=\frac{c_1\sigma_1^2}{1-c_1b_1}+\frac{\text{cov}(u_1,u_2)}{1-c_1b_2}\neq 0$$

إلا إذا كان :

$$\frac{c_1\sigma_1^2}{1-c_1b_2}=-\frac{\text{cov}(u_1,u_2)}{1-c_1b_2}$$

٦- (أ) لإثبات أن طريقة م‌ص‌م تفشل في تقدير المعادلة الأولى، نتبع الخطوات التالية: نجري أولا انحـدار $\dot{P}_t$ على جميع المتغيرات المحددة مسبقـاً في النموذج ويعطينا هذا :

$$\hat{P}_t=\hat{c}_0+\hat{c}_1(UN_t).$$

وبإحلال $\hat{P}_t$ محل $\dot{P}_t$ في المعادلة الأولى، نحصل على :

$$\dot{W}_t=a_0+a_1\hat{P}_t+a_2(UN_t)+\varepsilon_{1t}^*.$$

نلاحظ أنه طالما أن $\hat{P}_t$ و UN_t مرتبطين ارتباطا تاما، فإنه سيكـون مـن المستحيل تقدير a_1 و a_2 وهكذا تفشل طريقـة م‌ص‌م إذا حاولنا تقدير

المعادلة الأولى.

(ب) لا تفشل طريقة م ص م في تقدير المعادلة الثانية، لأننا هنا لانواجه هنا بمشكلة الارتباط الخطي المتعدد. نحصل أولاً على $\hat{W}_t$ عن طريق عمل انحدار لها على UN_t وبعدئذ، نحل $\hat{W}_t$ محل $\dot{W}_t$ في المعادلة الثانية ونكمل بالطريقة المعتادة لاشتقاق المعادلات الطبيعية عن طريق مساواة المجاميع التالية بالصفر:

$$\sum \hat{\varepsilon}^*_{2t} = 0, \ \sum\left(\hat{\varepsilon}^*_{2t}\hat{W}_t\right) = 0$$

وتكون المعادلات الطبيعية هي:

$$\sum \dot{P}_t = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum \hat{W}_t$$
$$\sum (\dot{P}\hat{W}_t) = \hat{b}_0 \sum \hat{W}_t + \hat{b}_1 \sum \hat{W}_t^2 .$$

هذه المعادلات مستقلة خطيا ولذا يمكننا حلها للحصول على $\hat{b}_0$ و$\hat{b}_1$.

٧- (أ) المعادلة مميزة حيث إن عدد المتغيرات المحددة مسبقاً في نظام المعادلات التي لا تظهر في المعادلة موضع الاهتمام أكبر من عدد المتغيرات المستقلة الداخلية.

(ب) لا يمكننا تقدير المعادلة باستخدام م ص م لأننا نحتاج لمتغيرين محددين مسبقا في الأقل من تلك التي لاتظهر في المعادلة، ولكن طالما أنه تتوافر لدينا مشاهدات عن واحد، فقط، من هذه المتغيرات (X_{2t}) فإنه يمكن إثبات أنه في ظل البيانات القاصرة لا توجد طريقة تمكننا من تقدير معادلة الانحدار في هذه المسألة.

٨- (أ) كلا المعادلتين مميزتان، طالما أن كلاً منهما يحتوي على عدد من المتغيرات المحددة مسبقاً والمستبعدة من المعادلة مساويا لعدد المتغيرات المستقلة الداخلية. لاحظ أن X_t و X_t^2 ليسا مرتبطين خطيا ارتباطا تاما. ولذلك، يمكن اعتبار X_t^2 متغيرا محددا مسبقا وغير مشتمل عليه في المعادلة الثانية.

(ب) للحصول على الشكل المختزل، نعوض عن Y_{2t} في المعادلة الأولى وعن Y_{1t} في المعادلة الثانية وبعد إعادة ترتيب الحدود يكون لدينا :

$$Y_{1t} = a_1^* + b_1^* X_t^2 + c_t^* X_t + v_{1t}^* ,$$
$$Y_{2t} = a_2^* + b_2^* X_t^2 + c_2^* X_t + v_{2t}^* ,$$

حيث :

$$a_1^* = \frac{a_1 + c_1 a_2}{1 - c_1 c_2},$$
$$b_1^* = \frac{b_1}{1 - c_1 c_2},$$
$$c_1^* = \frac{c_1 b_2}{1 - c_1 c_2},$$
$$v_{1t}^* = \frac{c_1 \varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}}{1 - c_1 c_2},$$
$$a_2^* = \frac{a_2 + c_2 a_1}{1 - c_1 c_2},$$
$$b_2^* = \frac{c_2 b_1}{1 - c_1 c_2},$$
$$c_2^* = \frac{b_2}{1 - c_1 c_2},$$
$$v_2^* = \frac{c_2 \varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1 - c_1 c_2}.$$

(جـ) نستخدم طريقة م‌ص‌م في تقدير المعادلة الأولى، وهكذا نكون انحدارا لـ Y_{2t} على المتغيرات المحددة مسبقا كافة للحصول على :

$$\hat{Y}_{2t} = \hat{a}_2^* + \hat{b}_2^* X_t^2 + \hat{c}_2^* X_t .$$

بعد ذلك، نحل $\hat{Y}_{2t}$ محل Y_{2t} في المعادلة الأولى ونكمل المنهج لتقدير المعادلة بالطريقة المعتادة، أي نشتق المعادلة الطبيعية بوساطة المجـامـيـع

التالية بالصفر:

$$\sum \hat{\varepsilon}^*_{1t} = 0,\ \sum\left(\hat{\varepsilon}^*_t X_t^2\right) = 0,\ \sum\left(\hat{\varepsilon}^*_{1t}\hat{Y}_{2t}\right) = 0$$

٩- (أ) المعادلة الأولى غير مميزة، بسبب أن t سيكون ثابتا في التحليل المقطعي. وطالما أنه يوجد لدينا ثابت في المعادلة الأولى، فإننا لا يمكن أن نستفيد منه بوصفه متغيرا محددا مسبقا مستبعدا للحصول على r_{it}. المعادلة الثانية مميزة بسبب استبعاد متغير المبيعات. افترض الآن أنه يتوافر لدينا بيانات سلسلة زمنية لعدد T من الفترات لمتغيرات نموذجنا. افترض، أيضا، أن هذه المنشآت التي عددها N تمثل قسما صغيرا من الاقتصاد القومي. ولذا، يمكن اعتبار r_t متغيرا خارجيا، حينئذ، فإن المعادلة الأولى ستكون مميزة، لأن r_t في هذه الحالة يمكن اعتباره متغيرا محددا مسبقا مستبعدا. في هذه الحال، ستقدر معادلة الاستثمار على النحو التالي: أولا: باستخدام مشاهدات سلسلة زمنية عددها T، نكون انحدارا لكل من r_{it} على r_t وعلى متغير المبيعات المناظر للحصول على:

$$\hat{r}_{it} = \hat{\gamma}_{0i} + \hat{\gamma}_{1i}S_{i(t-1)} + \hat{\gamma}_{2i}r_t, \qquad i = 1, \cdots, N.$$

والآن أحل $\hat{r}_{it}$ محل r_{it} وأكمل لتقدير المعادلة الأولى بالمنهج المعتاد. وعند عملنا ذلك لاحظ أنه ينبغي أن يتوافر لدينا NT مشاهدات في المرحلة الثانية.

(ب) نحصل على الشكل المختزل لـ I_{it} عن طريق التعويض عن r_{it} في المعادلة الأولى، وبعد إعادة ترتيب الحدود، نحصل على:

$$I_{it} = a^* + b_1^* r_t + b_2^* S_{it-1} + v_{it}^*,$$

حيث:

$$a^* = \frac{a}{1 - b_1 b_3}, \qquad b_1^* = \frac{b_1}{1 - b_1 b_3},$$

$$b_2^* = \frac{b_2}{1 - b_1 b_3}, \qquad v_{it}^* = \frac{b_1\varepsilon_{it} + u_{it}}{1 - b_1 b_3}$$

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي – إنجليزي

أ

إبطاء	Lag
آلمون	Almon lag
كويك	Koyck lag
اتجاه زمني	Time trend
اتساق	Consistency
احتمال	Probability
مشترك	Joint probability
إحصائيـــة	Statistic
اختبار جولدفيلد كوندات (ج - ك)	Goldfeld-Quandt test (G-Q)
الذيل الواحد	One tailed test
الذيلين	Two tailed test
الفرضيات	Hypoheses testing
اختلاف التباين	Heteroscedasticity
ارتباط	Correlation
ذاتي	Autocorrelation
استقلال	Independence

Assumption	افتراض
Econometrics	اقتصاد قياسي
Regression	انحدار
Standard deviation	إنحراف معياري

ب

Residual	باقي

ت

Formalization	تأطير
Trade off	تبادل
Variance	تباين
Specification of Model	تحديد النموذج
Semilog transformation	تحويل شبه لوغارتمي
Reciprocal transformation	عكسي
Bias	تحيز
Multicollinearity	تعدد العلاقات الخطية
Covariance	تغاير
Estimate	تقدير
Point estimate	النقطة
Proxy	تقريبي
Identification	تمييز
Forecast	تنبؤ
Normal distribution	توزيع طبيعي
Sampling distribution	المعاينة
Fit	توفيق

توقعات	Expectation
توليفة	Combination

ث

ثابت تجميعي	Additive constant
ثبات التباين	Homoscedasticity

ج

جودة التوفيق	Goodness of fit

ح

حال المتغير الواحد	Univariate case
حد أدنى	Lower bound
الخطأ	Error term

خ

خارجي	Exogenous
خدعة التجميع	Fallacy of composition
خطأ عشوائي (حد الخطأ)	Disturbance term
معياري	Standard error
من النوع الأول	Type I error
من النوع الثاني	Type II error
خطي	Linear

د

داخلي	Endogenous
دالـة	Function
دليل سفلي	Subscript

ر

رياضيا، اصطلاحيا — Formally

ز

زائف — Spurious

س

سلسلة زمنية — Time series

ش

شكل انتشار — Scatter diagrom

مختزل — Reduced form

ص

صريح — Explicit

ط

طرفي — Endpoint

ع

عدم استقلال ، اعتماد — Dependence

عزل ، فصل — Sorting

عشوائي — Random

عوامل ترجيح — Scale factors

غ

غير متحيز — Unbiased

ف

فترة إبطاء — Distributed lag

Alternative hypothesis	فرضية بديلة
Null hypothesis	العدم
Discrepancy	فرق

ك

Density	كثافة

م

Continuous	متصل
Polynomial	متعدد الحدود
Variables	متغيرات
Dummy variable	متغير صوري
Explantory variable	مفسر
Overall mean	متوسط حسابي شامل
Mean square error	مربع الخطأ
Population	مجتمع
Subset	مجموعة جزئية
Error sum of squares (ESS)	مجموع مربعات الأخطاء
Regression sum of squares (RSS)	الانحدار
Predetermined	محدد مسبقا
Bounded	محدود
Two stage least squares (TSLS)	مربعات صغرى ذات مرحلتين (م ص ع)
Ordinary least squares (OLS)	عادية (م ص ع)
Instrumental	مساعد
Significance level	مستوى المعنوية

Monotonic	مضطرد
First difference equations	معادلات الفروق من الدرجة الأولى
Structural equations	هيكلية
Under- identified equation	معادلة ناقصة التمييز
Operator	معامل
Coefficients	معاملات
Coefficient of Determination (R^2)	معامل التحديد
Adjusted R^2	المعدل
Reasonable	معقولـــة
Parmeter	معلمـــة
Limited-information	معلومات محدودة
Offsetting	معوضـــة
Estimators	مقدرات
Cross - sectional	مقطعي
Deflated	مكمش
Degenerated	منحل
Phillips curve	منحنى فليبس
Critical region	منطقة حرجة
Rejection region	الرفض
Acceptance region	القبول
Circluar reasoning	منطق دائري
Discrete	منقطع
Exact	مؤكد، يقيني
Marginal propensity to consume (MPC)	ميل حدي للاستهلاك

ن

نتائج تابعة	Corollaries
نزعة مركزية	Central tendency
نظام زائد التحديد	Over determined
نقاط انقلاب	Inflection points
نمطي	Typical
نموذج للإنحدار الذاتي	Autoregressive Model
نهائية	Finite
نهاية مفتوحة	Open ended

و

وسط حسابي	Mean
وقائع	Events

ثانياً : (انجليزي – عربي)

A

Acceptance region	منطقة القبول
Additive constant	ثابت تجميعي
Adjusted R^2	معامل التحديد المعدل
Almon lag	ابطاء المون
Alternative hypothesis	فرضية بديلة
Assumption	افتراض
Autocorrelation	الارتباط الذاتي
Autoregressive Model	نموذج للإنحدار الذاتي
Average out	توزيع

B

Bias	تحيز
Bounded	محدودة

C

Central tendency	نزعة مركزية
Circluar reasoning	منطق دائري
Coefficient of Determination	معامل التحديد
Coefficients	معاملات
Combination	توليفة
Consistency	اتساق
Continuous	متصل
Corollaries	نتائج تابعة

Correlation	ارتباط
Covariance	تغاير
Critical region	منطقة حرجة
Cross - sectional	مقطعي

D

Deflated	مكمش
Degenerated	منحل
Density	كثافة
Dependence	عدم استقلال (اعتماد)
Determination coefficient	معامل التحديد
Discrepancy	فرق
Discrete	منقطع
Distributed lag	فترة ابطاء
Disturbance term	خطأ عشوائي (حد الخطأ)
Dummy variable	متغير صوري

E

Econometrics	اقتصاد قياسي
Endogenous	داخلي
Endpoint	طرفي
Error sum of squares (ESS)	مجموع مربعات الاخطاء
term	حد الخطأ (خطأ عشوائي)
Estimate	تقدير
Estimators	مقدرات
Events	وقائع
Exact	مؤكد يقيني

Exogenous	خارجي
Expectation	توقعات
Explanatory variable	متغير مفسر
Explicit	صريح

F

Fallacy of Composition	خدعة التجميع
Finite	محدودة
First difference equations	معادلات الفروق من الدرجة الأولى
Fit	توفيق
Forecast	تنبؤ
Formalization	تأطير
Formally	رياضيا، اصطلاحيا
Function	دالـــة

G

Goldfeld-Quandt test (G-Q)	اختبار جولدفيلد كوندات (ج - ك)
Goodness of fit	جودة التوفيق

H

Heteroscedasticity	اختلاف التباين
Homoscedasticity	ثبات التباين
Hypoheses testing	اختبار الفرضيات

I

Identification	تمييز
Independence	استقلال
Inflection points	نقاط انقلاب
Instrumental	مساعد

J

Joint probability	احتمال مشترك

K

Koyck lag	ابطاء كويك

L

Lag	ابطاء
Limited-information	معلومات محدودة
Linear	خطي
Lower bound	حد أدنى

M

Marginal propensity to consume (MPC)	الميل الحدي للاستهلاك (م ح س)
Mean	وسط حسابي
square error	متوسط مربع الخطأ
Monotonic	مضطرد
Multicollinearity	تعدد العلاقات الخطية

N

Normal distribution	توزيع طبيعي
Null hypothesis	فرضية العدم

O

Offsetting	معوضة
One tailed test	اختبار الذيل الواحد
Open ended	ذو نهاية مفتوحة
Operator	معامل
Ordinary least squares (OLS)	طريقة المربعات الصغرى العادية (م ص ع)

Overall mean	متوسط شامل
Over determined system	نظام زائد التحديد

P

Parmeter	معلمـــة
Perdicition	تنبؤ
Phillips curve	منحنى فليبس
Point estimate	تقدير النقطة
Polynomial	متعدد الحدود
Population	مجتمع
Predetermined	محدد مسبقا
Probability	احتمال
Proxy	تقريبي

R

Random	عشوائـــي
Reasonable	معقولـــة
Reciprocal transformation	تحويل عكسي
Reduced form	شكل مختزل
Regression	انحـــدار
sum of squares (RSS)	مجموع مربعات الانحدار
Rejection region	منطقة الرفض
Relabeling	إعادة صياغة
Residual	باقي

S

Sampling distribution	توزيع المعاينة
Scale factors	عوامل ترجيح

Scatter diagrom	شكل الانتشار
Semilog transformation	تحويل شبه لوغارتمية
Significance level	مستوى المعنوية
Sorting	عزل (فصل)
Specification of Model	تحديد النموذج
Spurious	زائف
Standard deviation	انحراف معياري
error	خطأ معياري
Statistic	إحصائيـــة
Structural equations	معادلات هيكلية
Subscipt	دليل سفلي
Subset	مجموعة جزئية

T

Time series	سلسلة زمنية
trend	اتجاه زمني
Total sum of squares (TSS)	المجموع الكلي للمربعات
Trade-off	تبادل
Two stage least squares (2STS)	المربعات الصغرى ذات المرحلتين (م ص م)
tailed test	اختبار الذيلين
Type I error	الخطأ من النوع الأول
II error	الخطأ من النوع الثاني
Typical	نمطي

U

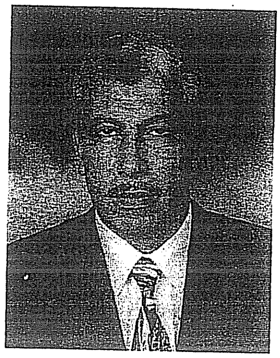
Unbiased	غير متحيز
Under- identified equation	معادلة ناقصة التميز

Univariate case	حال المتغير الواحد

U

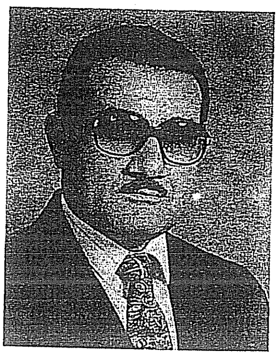
Variables	متغيرات
Variance	تباين

كشاف الموضوعات



د. المرسي السيد أحمد حجازي

- حصل على درجة الدكتوراه في الاقتصاد من جامعة كونتكت بالولايات المتحدة الأمريكية عام ١٩٨٥م.
- يشغل الآن وظيفة أستاذ الاقتصاد العام ورئيس قسم المالية العامة بكلية التجارة، جامعة الإسكندرية.
- أعير إلى جامعة الملك سعود، فرع القصيم، لمدة ست سنوات خلال الفترة ١٤١١-١٤١٧هـ.
- صدر له عدة كتب: اقتصاديات الخدمات العامة،مبادىء الاقتصاد العام، ضرائب الدخل والثروة والإنفاق في لبنان، النظم الضريبية بين النظرية والتطبيق كما صدر له بالإنجليزية Tax Systems in Practice.
- نشر العديد من البحوث في مجالات: تقويم النظم الضريبية والسياسات المالية، الإنفاق العام والزكاة، الرفاهة الاقتصادية، المشروعات العامة، اقتصاديات الموارد البيئية وتسعير المياه، والتكاليف الاقتصادية لتلوث البيئة.



د. عبدالقادر محمد عبدالقادر عطية

- حصل على درجة الدكتوراه في الاقتصاد من جامعة نوتردام بالولايات المتحدة الأمريكية عام ١٩٨٧م.
- يشغل الآن وظيفة أستاذ الاقتصاد بكلية التجارة، جامعة الإسكندرية.
- أعير إلى جامعة الملك سعود، فرع القصيم لمدة خمس سنوات خلال الفترة ١٤١٠-١٤١٥هـ.
- صدر له عدة كتب منها: طرق قياس العلاقات الاقتصادية مع تطبيقات على الحاسب الإلكتروني، دراسات الجدوى التجارية والاقتصادية والاجتماعية مع تطبيقات على الحاسب الإلكتروني، الاقتصاد الصناعي بين النظرية والتطبيق، اقتصاد المملكة العربية السعودية ونظرة تحليلية (مشترك).
- نشر العديد من البحوث في مجالات: البطالة، توظيف الأموال، سوق الأسهم، اقتصاديات المخدرات، واقتصاديات الغش والتطفيف، اقتصاديات السلع الاستراتيجية والحرب الاقتصادية وسياسة التسعير في الواقع.