المحور الرابع :

مســـألة النقـــل

1- مفهوم نموذج النقل .

2- متطلبات الحل في مسألة النقل.

3- طرق حل مسألة النقل .

4- تحسين الحل والوصول للحل الأمثل.

5- حالات خاصة لمسألة النقل .

I- مفهوم نموذج النقل

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة، حيث أنها تهتم بتوزيع المنتجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ ...) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت. *(سعد نور الشمرتي، و الزبيدي،، 2007،، صفحة 281)*

ويعد نموذج النقل من النماذج الرياضية المشقة أصلا من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية، وبما أن نماذج النقل تتعلق بتخصيص طريقة مثلى للإنتقال المادي لكميات من السلع تتواجد في نقاط معينة يطلق عليها نقاط الإمداد ،إلى مواقع أو نقاط اخرى يطلق عليها نقاط الطلب /الإستهلاك بهدف تحديد أقل تكلفة لهذه العملية (النقل)، وعليه فإن دالة الهدف تكون غالبا من الشكل: "***Min*** **(*C*)**"،

وقد تم تطوير مسألة النقل لأول مرة عام **1941م** من طرف "***F.L.Hichcok***" حيث قدم دراسة بعنوان: "توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى عدة مناطق محلية"، وتم تناولها بتوسع أكبر من قبل الباحث T.CKoopmans، بينما يعتبرالباحث الأمريكي "***Dantzig***" أول من قام بحله بأسلوب البرمجة الخطية، حيث تم وضع خوارزمية النقل التي تقدم حلولا عديدة للمشاكل الاقتصادية والإدارية في قطاعات نقل الموارد من مصادر الإنتاج إلى أماكن الاستخدام وذلك بأقل تكلفة ممكنة، ولهذا فإن خوارزمية النقل تعد تطويرا لاحقا لأسلوب البرمجة الخطية، حيث كان الهدف هو تقليل دالة الهدف إلى أقل ما يمكن في ظل ظروف محددة، وبفرض أن كل المتغيرات التي تشكل نموذج النقل (مصفوفة النقل) هي قيم موجبة أو معدومة، في حين قدما كل من "***Chrnes***" و"***Cooper***" طريقة الجحر المتنقل والتي أجريا عليها بعض التحسينات لتصبح طريقة التوزيع المعدل. *(السوافيري، 2004، صفحة 168)* .

II- متطلبات الحل في مسألة النقل :

كغيرها من النماذج في البرمجة يتطلب تطبيق الحل وفقا لنموذج النقل توافر مجموعة من الشروط هي:

1)- **مستوى العرض** (*Les Sources*): وهي الكميات المتاحة من المنتجات والمطلوب نقلها من كل مصدر "m" (مستودع، مخزن، مصنع...) حيث: يكون عددها "m" أكبر أو يساوي **(2)** أي أن: $(m \geq 2)$.

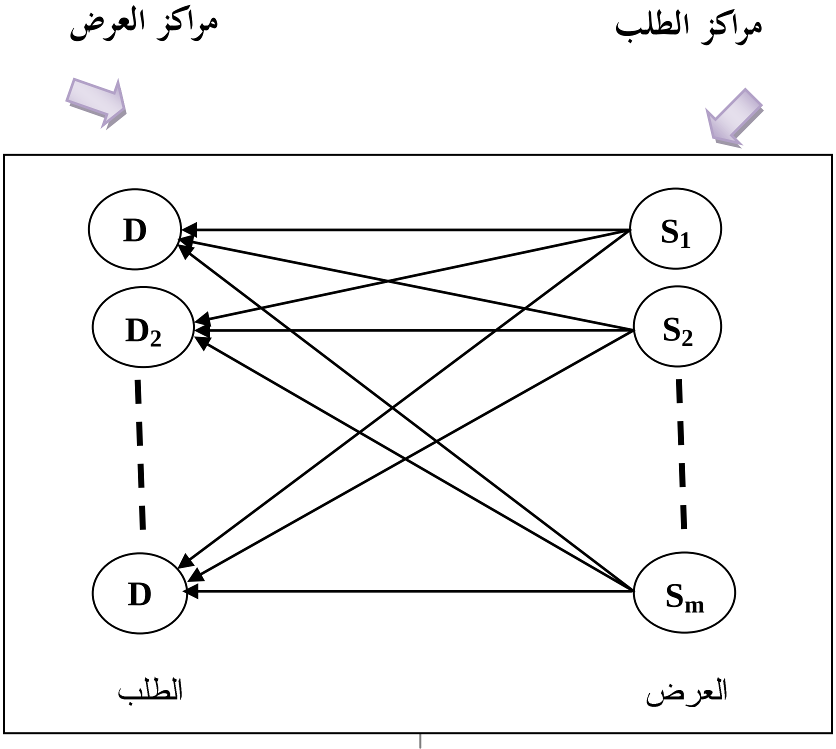
2)- **مستوى الطلب** (*Les Destinations*): الكميات المطلوبة أو الاحتياطات حسب جهات الطلب "n" (مصانع، وكلاء بيع، تجار...) حيث: يكون عددها "n" أكبر أو يساوي **(2)** أي أن: $(n \geq 2)$.

3)- **تكلفة النقل**: وهي مجمل الأعباء المتعلقة بنقل وحدة واحدة من البضائع أو غيرها من كل مصدر عرض إلى كل مركز طلب، حيث تكون محددة "C".

4)- **القيود والفرضيات**: يجب احترام القيود المتعلقة بتشكيل البرنامج، وهذه تتمثل في:

- في النموذج الأولي لابد من توفر الشرط اللازم بأن يكون **مجموع العرض=مجموع الطلب.**
- كل مصدر لا يمكن أن يوزع أكثر مما لديه، أي أن يجب تتساوى كمية المنتجات المنقولة من كل مصدر إنتاجي لمختلف مراكز الطلب مع الطاقة الإنتاجية المتاحة لذلك المصدر.
- كل مركز استقبال لا يمكن أن يأخذ أكثر مما يحتاج، أي أنه يجب أن يحصل كل مركز طلب على كمية من المنتجات تساوي حجم طلبه لهذه المنتجات.
- شرط الإيجابية أو عدم السلبية، بأن تكون الكميات المنقولة: "x_{ij}" أكبر من أو تساوي الصفر، أي أن: $(x_{ij} \geq 0)$ ويظهر التمثيل البياني لمشكلة النقل كما يلي :

الشكل رقم 05: التمثيل البياني لمشكلة النقل



ويتم الحل في مسألة النقل بعد ترجمة المعطيات السابقة الذكر في جدول ،يمكن عرضه على النحو التالي :

المصادر		مراكز الطلب					العرض
المراكز		D_1	D_2	D_3	....	D_m	
مراكز العرض	S_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	....	c_{1m} x_{1m}	a_1
	S_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	....	c_{2m} x_{2m}	a_2
	S_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	....	c_{3m} x_{3m}	a_3
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	S_n	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	c_{n3} x_{n3}	....	c_{nm} x_{nm}	a_n
الطلب		b_1	b_2	b_3	....	b_m	Σ العرض Σ الطلب

III- طرق حل مسألة النقل :

يتطلب حل مسائل النقل المرور بالخطوات التالية:

- ❖ دراسة وفهم المسألة.
- ❖ كتابة وتشكيل النموذج .
- ❖ الوصول للحل القاعدي .
- ❖ مراقبة أمثلية الحل .
- ❖ تحسين الحل.

وهناك مجموعة من الطرق يمكن اتباعها للحصول على الحل القاعدي منها :

- ❖ طريقة أدنى تكلفة في الجدول.
- ❖ طريقة الجزاء والعقاب .

وسنحاول فيما يلي عرض كل طريقة على حدى معتمدين في ذلك على المثال التالي:

مثال تطبيقي :

لنفرض أنه لدينا مؤسسة اقتصادية لها 3 وحدات إنتاجية S_1، S_2، S_3 متواجدة في ثلاث مناطق مختلفة، كما أنها تتوفر على 3 مراكز توزيع D_1، D_2، D_3، حيث أن هذه المؤسسة تنتج المنتج P على مستوى مراكز الإنتاج، ثم تقوم بتوزيعه على مراكز التوزيع الثلاث.

تعرض مراكز الإنتاج (المنبع)كميات معينة من الإنتاج: a_1، a_2، a_3، أما مراكز التوزيع (المصب) فتقوم بطلب كميات معينة من الإنتاج: b_1، b_2، b_3، كما هو موضح في الجدولين أدناه.

مركز الإنتاج	S_1	S_2	S_3
الطاقة الإنتاجية (العرض d_i)	$a_1=100$	$a_2=200$	$a_3=300$

مركز التوزيع	D_1	D_2	D_3
الطلب (b_j)	$b_1=500$	$b_2=30$	$b_3=70$

عملية نقل المنتج P من مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مراكز التوزيع الثلاث يترتب عليها تحمل تكلفة النقل C_{ij}.

C_{ij} تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج P من مراكز الإنتاج i إلى مركز التوزيع j .

تكلفة النقل الوحدوية يقدمها الجدول أدناه:

C_{ij}	D_1	D_2	D_3
S_1	$C_{11}=1$	$C_{12}=2$	$C_{13}=1$
S_2	$C_{21}=3$	$C_{22}=2$	$C_{23}=3$
S_3	$C_{31}=4$	$C_{32}=1$	$C_{33}=5$

مشكل المؤسسة هو تحديد الكميات x_{ij} الواجب نقلها من مراكز الإنتاج إلى مراكز التوزيع.

1- طريقة أقل تكلفة في الجدول:

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو

الموالية و هكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي $(m+n-1)$.والجدول الموالي يوضح ذلك:

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$C_{11}=1$ **100**	$C_{12}=2$	$C_{13}=1$	~~100~~ ~~0~~
S_2	$C_{21}=3$ **200**	$C_{22}=2$	$C_{23}=3$	~~200~~ ~~0~~
S_3	$C_{31}=4$ **200**	$C_{32}=1$ **30**	$C_{33}=5$ **70**	~~300~~ ~~270~~ ~~0~~
b_i	~~500~~ ~~400~~ ~~200~~ 0	30	70	600

يجب التأكد من قبولية الحل أولا وذلك بتحقق القانون التالي:

عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) – 1

نحسب قيمة التكلفة:

$$Z=(100\times1)+(200\times3)+(200\times4)+(30\times1)+(70\times5)=1880$$

2-طريقة الجزاء والعقاب (طريقة فوجل) *(Méthode de Vogel)*:

تعتبر طريقة فوجل التقريبية (طرقة الفروقات العظمى) من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة على الوصول للحل الأمثل أو الحل القريب من

الأمثل، و نادرا ما تكون طريقة التكلفة الدنيا وطريقة الزاوية الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل، وتتلخص خطوات إيجاد الحل الابتدائي لهذه الطريقة كما يلي:

- ❖ نقوم بحساب "الغرامات" وهي الفرق بين أقل تكلفتين نقل في كل سطر وكل عمود.
- ❖ نبدأ التوزيع أو بالأحرى نختار السطر أو العمود الذي يحتوي على أعلى غرامة أو أكبر فرق، ونقوم بالتوزيع بالنسبة للسطر أو العمود المختار، عند الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة.
- ❖ بعد التوزيع في السطر أو العمود المختار بأقل تكلفة سيتم إلغاء (تشطيب) سطر أو عمود نكرر حساب الغرامات ونقوم بالتوزيع بنفس الطريقة.
- ❖ نواصل الحل بإتباع نفس الخطوات: حساب الغرامات، تحديد أكبر غرامة (سطر أو عمود)، اختيار الخانة ذات أقل تكلفة، القيام بالتوزيع، إلغاء سطر أو عمود...

ملاحظات:

- ❖ في حالة تساوي الغرامتين : نبحث عن أقل تكلفة في السطر أو العمود .
- ❖ في حالة تساوي التكلفتين : نختار أكبر توزيع.
- ❖ في حالة تساوي الكميات الموزعة نختار عشوائيا.

لنأخذ **المثال التطبيقي** السابق للتوضيح أكثر:

بالعودة إلى مثالنا السابق، سنقوم بتطبيق مراحل هذه الطريقة، وفق المراحل التالية:

- ❖ نقوم بحساب **الغرامات** (الفرق بين أدنى تكلفتين) على مستوى جميع الأسطر و الأعمدة فنحصل على القيم:
  - ❖ بالنسبة للأسطر:

$1-1=0$

$3-2=1$

$4-1=3$

  - ❖ بالنسبة للأعمدة:

$3-1=2$

$2-1=1$

$3-1=2$

❖ نقوم باختيار أكبر غرامة بين القيم المحسوبة،

نلاحظ في هذا المثال أن 3 هي أكبر غرامة والموجودة في السطر الثالث المقابل لـــ S_3 ونقم بالتوزيع في هذا السطر باختيار الخانة التي تضم أدنى تكلفة والمقدرة هنا بـــ 1 والتي توافق الخانة x_{32} و نقم بعملية التوزيع بالطريقة المعتادة حيث سيتم هنا شطب العمود D_2 الذي يطلب الكمية 30 وحدة، والتي يتم تخفيضها من قيمة S_3 لتنتج القيمة 300−30=270.

❖ في مرحلة موالية نعيد حساب الغرامات من جديد بنفس الطريقة السابقة فنتحصل على النتائج التالية:

❖ بالنسبة للأسطر:

1−1=0

3−3=0

5−4=1

❖ بالنسبة للأعمدة:

3−1=2

العمود الثاني تم إلغاؤه.

3−1=2

❖ نقوم باختيار أكبر غرامة بين القيم المحسوبة،

وهي هنا 2 التي نلاحظ أنها موجودة مرتين في العمود S_3 و العمود S_1 ، نلاحظ هنا بعد تساوي الغرامتين تساوي التكلفتين كذلك وهما $C_{13}=1$ و $C_{11}=1$ وعليه نختار التكلفة التي تقابل الخانة ذات أكبر توزيع وهي $C_{11}=1$ التي تضم القيمتين 500 و 100.ثم نتمم عملية التوزيع أين سيتم توزيع القيمة الكلية ل S_1 والمقدرة بـــ 100 وحدة ، والتي يتم تخفيضها من قيمة D_1 ***والمقدرة بـــ 500 لتصبح القيمة الجديدة لهذا العمود هي 400. وعليه يتم تشطيب السطر الأول*** S_1 لأنه تم توزيع جميع كمياته.

- نكمل عملية التوزيع بحساب الغرامات الجدية التي ستظهر كما يلي:

❖ بالنسبة للأسطر:

السطر الأول تم إلغاؤه

3−3=0

5−4=1

❖ بالنسبة للأعمدة:

4−3=1

العمود الثاني تم إلغاؤه.

5−3=2

❖ نقوم باختيار أكبر غرامة بين القيم المحسوبة،

وهي هنا 2 التي نلاحظ أنها موجودة في العمود S_3 ، نختار الخانة التي تحتوي على أقل تكلفة وهي $C_{23}=3$ التي تضم القيمتين 200 و 70.ثم نتمم عملية التوزيع أين سيتم توزيع القيمة الكلية ل D_3 والمقدرة بـــ 70 وحدة ، والتي يتم تخفيضها من قيمة **S2** والمقدرة بــ 200 لتصبح القيمة الجديدة لهذا السطر هي 130. وعليه يتم تشطيب العمود الثالث D_3 لأنه تم توزيع جميع كمياته.

– نكمل الحل بنفس المنوال ،ليظهر لنا الجدول النهائي كما يلي:

	D_1	D_2	D_3	a_i	*الغرامات*				
S_1	$C_{11}=1$ 100	$C_{12}=2$	$C_{13}=1$	~~100~~ 0	0	0	/	/	/
S_2	$C_{21}=3$ 130	$C_{22}=2$	$C_{23}=3$ 70	~~200~~ ~~130~~ 0	1	0	0	3	3
S_3	$C_{31}=4$ 270	$C_{32}=1$ 30	$C_{33}=5$	~~300~~ ~~270~~ 0	3	1	1	4	/
b_i	~~500~~ ~~400~~ ~~270~~ 0	~~30~~ 0	~~70~~ ~~0~~	600					
	2	1	2						
	2	/	2						

الغرامات	1	/	2
	1	/	/
	3	/	/

يجب التأكد من قبولية الحل أولا وذلك بتحقق القانون التالي:

عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (**m**)+عدد الأعمدة (**n**) – **1**

$$Z=(100\times1)+(130\times3)+(270\times4)+(70\times3)+(30\times1)=1810$$

نلاحظ أنها أدنى تكلفة محققة من بين كل الطرق المعروضة، وهو ما يؤكد أن طريقة الجزاء والعقاب هي أفضل طريقة تعطي توزيع يقارب الأمثلية، حيث أن من مزاياها الوصول إلى حل أولي قد يكون أحيانا هو الحل الأمثل أو يكون قريب من الحل الأمثل، لذلك غالبا ما يعتمد عليها كثيرا في إيجاد الحل الأولي.

تتيح هذه الطرق فقط حلا أوليا ممهدا للحل النهائي للمسألة، يراعي في هذه الخطوة فقط شرط العملية، والمتمثل في توازن نموذج النقل أي يجب تساوي الكمية المطلوبة مع الكمية المتاحة، وحتى يكون الحل الإبتدائي عملي يجب أن يحقق الشروط التالية:

- يجب توزيع كل الوحدات المعروضة من طرف المصدر العرض.
- يجب أن تلبى طلبات كل المراكز.
- يجب أن يساوي عدد الخلايا المشغلة الأساسية (**$m + n - 1$**).

IV- تحسين الحل والوصول للحل الأمثل:

تقدم الطرق الخمسة السابقة الحل الأولي للمسألة، وإيجاد التوزيع المبدئي للنموذج، وقد يحتاج هذا الحل الأولي أحيانا لعملية التحسين للوصول إلى الحل الأمثل، والذي يؤدي إلى أقل تكلفة ممكنة.

وتتمثل خطوات تحسين الحل فيما يلي :

1- التأكد من قبولية الحل وذلك بتحقق القانون :

عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (**m**)+عدد الأعمدة (**n**) – **1**

2- مراقبة الحل :

لمراقبة الحل القاعدي يجب المرور بالخطوات التالية:

- ✓ يجب أن نسبق كل تكلفة موجودة في المصفوفة بالإشارة (−).
- ✓ نظيف سطر يدعى I وعمود يسمى J .
- ✓ نقوم بحساب قيم I و J بواسطة القانون $I + J = C$، بعد أن نختار العمود أو السطر الذي يحوي أكبر خانات مملوءة ونعطي **القيمة 0** لـــــــــ I أو J حسب الحالة.
- ✓ نقوم بتقييم الخانات غير الأساسية لاختيار أمثلية الحل الأولي، وذلك من خلال حساب ما يسمى بــ: "الاقتصاد في التكلفة" الخاص بكل خانة والذي يرمز له بالرمز: "Eij" حيث يحسب بالعلاقة:

$Eij = I + J - C$ (كل الخانات يحسب لها الاقتصاد).

فإذا كانت كل قيم "Eij" موجبة أو معدومة فإن الحل أمثل ($0 \le$ "Eij")، أما إذا كانت هناك قيم أو حتى قيمة واحدة سالبة فإن الحل ليس أمثليا ويتطلب عملية تحسين.

مثال تطبيقي:

سنحاول فيما يلي تطبيق ما سبق ذكره على المثال السابق .

لنا العمود الأول D_1 يضم أكبر عدد من الخانات المملوءة وعليه نضع $J_1 = 0$.

- نحسب باقي قيم I و J بتطبيق العلاقة $I + J = C$،نجد:

$I_1 + J_1 = -1 \Rightarrow I_1 = -1$

$I_2 + J_1 = -3 \Rightarrow I_2 = -3$

$I_3 + J_1 = -4 \Rightarrow I_1 = -4$

$I_2 + J_3 = -3 \Rightarrow J_3 = 0$ لأن $(I_2 = -3)$

$I_3 + J_2 = -1 \Rightarrow J_2 = 3$ لأن $(I_3 = -4)$

ملاحظة : يتم حساب قيم I و J انطلاقا من الخانات المملوءة فقط

وعليه نتحصل على الجدول التالي الخاص بمثالنا :

		D_1	D_2	D_3	a_i
		$J_1=0$	$J_2=3$	$J_3=0$	
S_1	$I_1 = -1$	-1 100	-2	-1	100

S_2	$I_2=-3$	-3 130	-2	-3 70	200
S_3	$I_3=-4$	-4 270	-1 30	-5	300
b_i		500	30	70	600

- نحسب قيم Eij بتطبيق القانون السابق نجد القيم التالية:

$E_{11} = -1+0+1=0$

$E_{12} = -1+3+2=4$

$E_{13} = 0-1+1=0$

$E_{21} = -3+0+3=0$

$E_{22} = -3+0+2=2$

$E_{23} = -3+0+3=0$

$E_{31} = -1+0+1=0$

$E_{32} = -3+0+3=0$

$E_{33} = -4+0+5=1$

وعليه نتحصل على الجدول التالي :

		D_1	D_2	D_3	a_i
		$J_1=0$	$J_2=3$	$J_3=0$	
S_1	$I_1=-1$	(-1 100 0)	(-2 4)	(-1 0)	100
S_2	$I_2=-3$	(-3 130 0)	(-2 2)	(-3 70 0)	200
S_3	$I_3=-4$	(-4 270	(-1 30	(-5	300

		1)	0)	0)	
600	70	30	500	b_i	

- نقوم بتقييم الخانات غير الأساسية لاختيار أمثلية الحل الأولي **فإذا كانت كل قيم "Eij" موجبة أو معدومة فإن الحل أمثل ($0 \geq$ "Eij")**، أما إذا كانت هناك قيم أو حتى قيمة واحدة سالبة فإن الحل ليس أمثليا ويتطلب عملية تحسين.

ومن خلال قيم "**Eij** المعروضة في الجدول نلاحظ أنها كلها معدومة أو موجبة.

بينما إذا كانت هناك قيمة سالبة فإنه يتوجب إجراء عملية التحسين.

ملاحظة: الخانات المملوءة يكون "Eij الخاص بها معدوم

- **قيمة التكلفة الدنيا هنا هي 1810.**

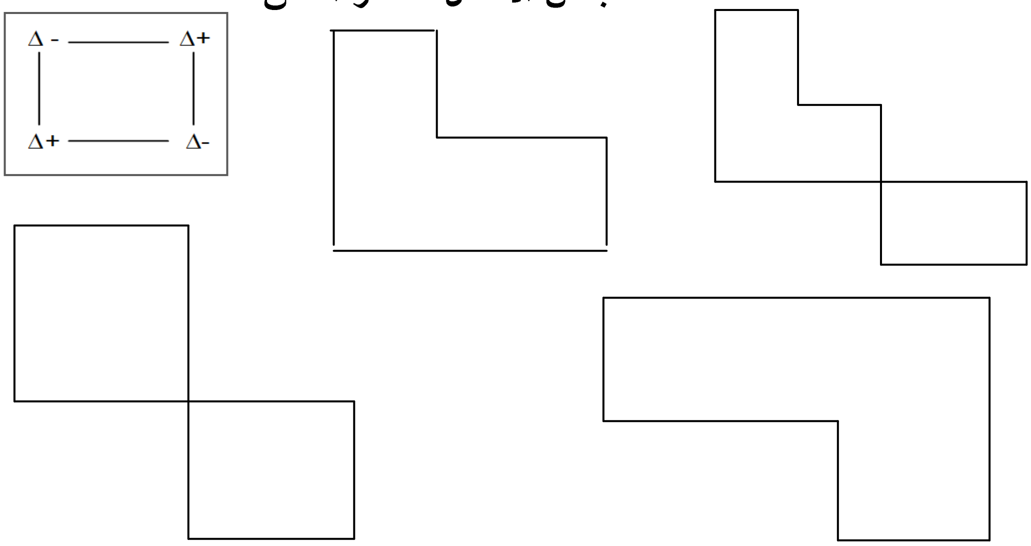
3- تحسين الحل :

إذا كانت هناك قيم أو حتى قيمة واحدة سالبة فإن الحل ليس أمثليا ويتطلب **عملية تحسين** تتم وفقا للخطوات التالية:

- نبحث في الجدول عن الخانة التي تحتوي أصغر: "E_{ij}" سالب أي أكبر قيمة مطلقة لـــ "E_{ij}" ضمن القيم السالبة، وهذا يعني أننا نبحث عن الخانة التي تسمح بتحقيق أكبر تخفيض أو اقتصاد في التكلفة، في حالة تساوي أقل "E_{ij}" نختار عشوائيا (حسب الشروط الموالية).
- نضيف الكمية: "$+ \Delta$" في الخانة المناسبة ذات أصغر: "E_{ij}" سالب.
- نعين ما يسمى بالـــ: "**مسار المغلق**" للحفاظ على توازن المصفوفة، بحيث تكون في هذا المسار خانة واحدة فقط شاغرة (فارغة) وهي خانة أصغر "E_{ij}" سالب المختارة، والتي تمثل نقطة البداية التي ننطلق منها لتكوين المسار المغلق، إذ نضع عندها القيمة المجهولة: "$\Delta+$" (المتغير الداخل).
- إن إضافة "$+ \Delta$" يعني جعل إحدى الخانات الغير أساسية خانة أساسية أي (متغير داخل) وذلك يتطلب إيجاد متغيرة خارجة للمحافظة على توازن المصفوفة، أي جعل خانة مملوءة فارغة.

إن رسم **المسار المغلق يتحدد من خلال** التنقل على مستوى الخانات المملوءة فقط دون الاعتماد على الخانات الفارغة، لذلك نقوم بتبادل كميات بين الخلايا المملوءة فقط مع إحداث "**المسار المغلق**"، الذي يجب أن ينطلق وينتهي عند الخلية الفارغة أو الشاغرة المراد تقييمها والتي تسمح بتحقيق أكبر تخفيض أو اقتصاد في التكلفة، **والمسار المغلق** هو عبارة عن مستقيمات عمودية وأفقية بحيث تقع الخلايا المملوءة وخلية وحدة شاغرة عند الزوايا القائمة له، ونوضح بعض المسارات المغلقة في الأشكال التالية:

- **بعض الأشكال للمسار المغلق**



عموما فإن أساس المسار المغلق هو شكل مربع وأربع زوايا قائمة كل زاويتين متقابلتين يحملان إشارتان متماثلتان تكون معاكسة للزاويتين المتقابلتين الأخريين أي على الشكل.

- انطلاقا من قيم الخانات المملوءة والتي تحمل إشارة سالبة "$-\Delta$" يتم تحديد المتغير الخارج وفي نفس الوقت تحدد قيمة "$+\Delta$" المجهولة للخانة الفارغة، وذلك بإختيار أصغر قيمة بين "$-\Delta$" للخانتين المملوءتين، حيث تطرح هذه القيمة من الخانة ذات: "$-\Delta$" وتضاف لقيم الخانات ذات: "$+\Delta$".
- ينتج بعد ذلك جدول جديد متوازن بنفس الكيفية (كيفية التوزيع) انطلاقا من معطياته نقوم بحساب المعاملات **(I)** و**(J)**، ثم "E_{ij}" مع حساب مجموع التكاليف.
- في حالة إيجاد "E_{ij}" مرة أخرى سالبة نعيد نفس الخطوات السابقة حتى نصل إلى الحل الأمثل الذي تكون فيه جميع قيم: "E_{ij}" موجبة أو معدومة.

مثال تطبيقي :

نأخذ نفس المثال السابق وجدول الحل بطريقة الشمال الغربي وبعد حساب **(I)** و**(J)**، ثم "E_{ij}" نحصل على الجدول الموالي:

		D_1	D_2	D_3	a_i
		$J_1=0$	$J_2=3$	$J_3=-1$	
S_1	$I_1=-1$	(-1 100 0) -Δ	(-2 4)	(-1 Δ + -1)	100
S_2	$I_2=-3$	(-3 200 0)	(-2 2)	(-3 -1)	200
S_3	$I_3=-4$	(-4 200 +Δ 0)	(-1 30 0)	(-5 70 -Δ 0)	300
b_i		500	30	70	600

لقد تم تشكيل المسار انطلاقا من وجود قيمتين سالبتين لـــ "E_{ij}" سالب في الخانة (S_1/D_3) والخانة (S_2/D_3) حيث قيمته -1 .

وهنا تم الإختيار عشوائيا ، وعليه تم تشكيل مسار مغلق ينطلق من هاته الخانة ويمر فقط بالخانات المملوءة ليعود إليها مشكلا رباعي يضم قيمتين موجبتين لـــ Δ وقيمتين سالبتين .

لتحديد القيمة التي يأخذها Δ نختار من بين الخانات ذات الإشارة السالبة لــــ Δ ونختار أقل قيمة وهنا القيمتين الممثلتين لـــ $-\Delta$ هما ، 70 و 100 وعليه نختار القيمة الأقل وهي 70 ونعوضها في خانات المسار المغلق حسب الإشارة التي يأخذها Δ فنحصل على الجدول الموالي بعد إعادة حساب قيم "E_{ij}" التي نحكم من خلالها على أمثلية الحل من عدمها :

		D_1	D_2	D_3	a_i
		$J_1=0$	$J_2=3$	$J_3=-1$	
S_1	$I_1= -1$	(-1 30 0)	(-2 4)	(-1 70 0)	100
S_2	$I_2= -3$	(-3 200 0)	(-2 2)	(-3 0)	200
S_3	$I_3= -4$	(-4 270 0)	(-1 30 0)	(-5 0 0)	300
b_i		500	30	70	600

من خلال إعادة حساب قيم "Eij" نجد كل القيم موجبة أو معدومة وعليه فهو حل أمثل

نحسب قيمة التكلفة :

$$Z=(30\times1)+(200\times3)+(270\times4)+(30\times1)+(70\times1)=1810$$

ونلاحظ هنا انخفاض في قيمة التكلفة من 1880 إلى 1810.

V- حالات خاصة لمسألة النقل :

1- حالة الإختلاف بين العرض والطلب:

غالبا ما نقع في حالات عدم التوازن بين الطلب والعرض ، هنا لا يمكننا الحل باستخدام مسألة النقل إلا بعد تحقيق شرط التوازن بين الكميات المطلوبة والكميات المعروضة ويتم ذلك بإضافة عمود أو سطر وهميين حسب الحالة التي تصادفنا في المسألة. وسنحاول فيما يلي عرض كلتا الحالتين.

1-1- حالة العرض أكبر من الطلب :

في هذه الحالة فإنه ليس من الضروري إحداث تغيير في نموذج النقل، وإنما الزيادة في العرض سيظهر كفائض غير مستغل أو لم يتم نقله من المصدر، وهذا عن طريق إضافة مستهلكا (طلب) وهميا (مركز وهمي)، تكون قيمة حاجته (الطلبية) مساوية للفرق المسجل بين العرض والطلب وعليه يتم إضافة عمود وهمي بتكاليف صفرية ، واتباع نفس الخطوات السابقة في الحل.

مثال تطبيقي :

إليك الجدول التالي الذي يمثل مشكلة نقل معينة:

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$C_{11}=1$ x_{11}	$C_{12}=2$ x_{12}	$C_{13}=3$ x_{13}	100
S_2	$C_{21}=3$ x_{21}	$C_{22}=4$ x_{22}	$C_{23}=5$ x_{23}	130
S_3	$C_{31}=1$ x_{31}	$C_{32}=2$ x_{32}	$C_{33}=5$ x_{33}	150
b_j	90	80	110	؟

المطلوب :أوجد التوزيع الأمثل الذي يحقق أدنى تكلفة.

الحل :

قبل حل المسألة لا بد من التحقق من شرط التوازن مجموع الطلب = مجموع العرض .

في مثالنا لدينا :

مجموع الطلب = 90+80+110= 270.

مجموع العرض = 100+130+150 = 380

نلاحظ عدم تساوي الطلب والعرض ،العرض > الطلب .

نظيف عمود وهمي بتكاليف صفرية وبقيمة الفارق المقدر بـــ 380− 270= 110.

ونقم بالتوزيع وفقا لطريقة الجزاء والعقاب، فنتحصل على الجدول الموالي :

	D_1	D_2	D_3	X	a_i
S_1	$C_{11}=1$	$C_{12}=2$	$C_{13}=3$ 100	$C_{13}=0$	100
S_2	$C_{21}=3$	$C_{22}=4$ 20	$C_{23}=5$	$C_{13}=0$ 110	130
S_3	$C_{31}=1$ 90	$C_{32}=2$ 60	$C_{33}=5$	$C_{13}=0$	150
b_i	90	80	100	110	380

قبولية الحل :

من خلال تطبيق شرط القبولية نلاحظ أن عدد الخانات المملوءة = 5 و $m + n - 1 = 6$ القيمتين غير متساويتين وعليه فالحل الأولي غير مقبول يتطلب عملية تحسين وهو ما سيتم التطرق له لاحقا. وعليه نقدم **المثال التطبيقي الثاني** التالي:

إليك الجدول الذي يمثل مسألة النقل:

	D1	D1	D1	العرض
S1	6،	2،	1،	400
S2	4،	6،	2،	650
S3	1،	3،	5،	300
الطلب	200	600	300	

المطلوب:

تأكد من توازن نموذج النقل. ثم أوجد الحل الإبتدائي باستخدام طريقة أصغر تكلفة في السطر.

الحــــل:

التأكد من توازن النموذج : نلاحظ أن:

$$300 + 600 + 200 \neq 300 + 650 + 400$$

$$1100 \neq 1350$$

مجمـــوع الطلب = 1100

مجموع العرض = 1350

أي أن العرض > الطلب

إذن سنضيف عموديا وهميا بتكاليف صفرية بمقدار الفرق: 1350 − 1100 = 250 .

ثم نواصل الحل الإبتدائي بطريقة عادية باستخدام طريقة أصغر تكلفة في السطر.نجد:

	S1	S2	S3	S4	العرض
D1	(6	(2	(1 150	(0 250	~~400~~ ~~150~~ 0
D2	(4 200	(6 300	(2 150	(0	~~650~~ ~~500~~ ~~300~~ 0
D3	(1	(3 300	(5	(0	~~300~~ 0
الطلب	~~200~~ 0	~~600~~ ~~300~~	~~300~~ ~~150~~ 0	~~250~~ 0	1350

نلاحظ أن: عدد الخانات المملوءة = 6 = $m + n - 1$ = 6   الحل الأولي مقبول.

أما مجموع التكاليف:

$$C = [(150) \times (1) + (250) \times (0) + (200) \times (4) + (300) \times (6) + (150) \times (2) + (300) \times (3)] \qquad C = 3950$$

1-2- حالة الطلب أكبر من العرض :

وبالتالي يجب إحداث مستهلك وهمي بتكاليف صفرية بقيمة الفرق بين العرض والطلب، أي أنه يتم إضافة سطر وهمي، الوحدات التي تظهر فيه تمثل وحدات الاحتياج الفعلية.

<u>مثال تطبيقي:</u> يعطى لك الجدول التالي الذي يمثل مسألة نقل لمؤسسة معينة:

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$C_{11}=1$	$C_{12}=3$ x_{12}	$C_{13}=4$ x_{13}	70
S_2	$C_{21}=2$ x_{21}	$C_{22}=5$ x_{22}	$C_{23}=1$ x_{23}	80
S_3	$C_{31}=3$ x_{31}	$C_{32}=4$ x_{32}	$C_{33}=2$ x_{33}	130
b_i	100	130	150	؟

الحل :

قبل حل المسألة لا بد من التحقق من شرط التوازن مجموع الطلب = مجموع العرض .

في مثالنا لدينا :

مجموع الطلب = 100+130+150= 380.

مجموع العرض = 70+80+130 = 280.

نلاحظ عدم تساوي الطلب والعرض ،العرض < الطلب .

نظيف عمود وهمي بتكاليف صفرية وبقيمة الفارق المقدر بـــ 380− 280= 100.

ونقم بالتوزيع وفقا لطريقة الجزاء والعقاب،فنتحصل على الجدول الموالي :

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$C_{11}=1$ 70	$C_{12}=3$	$C_{13}=4$	70
S_2	$C_{21}=2$	$C_{22}=5$	$C_{23}=1$ 80	80
S_3	$C_{31}=3$ 30	$C_{32}=4$ 30	$C_{33}=2$ 70	130
X	$C_{31}=0$	$C_{31}=0$ 100	$C_{31}=0$	100
b_i	100	130	150	380

قبولية الحل :

من خلال تطبيق شرط القبولية نلاحظ أن عدد الخانات المملوءة = 6 و $m + n - 1 = 6$

أما مجموع التكاليف:

$$C = [(70)\times(1) + (80)\times(1) + (30)\times(3) + (30)\times(4) + (70)\times(2) + (100)\times(0)]\ C = 500.$$

شرح الجدول :

من خلال الجدول نميز مايلي :

الطلب D_1 يقدر بـــ 100 وحدة تم تلبيته من طرف الموردين S_1 وS_3 بـــ 70 و 30 وحدة على التوالي ونلاحظ بقاء 100 وحدة لم تلبى من الطرف المورد الثاني .

2− حالة الحل البديل :

يقصد بالحل البديل وجود توزيع آخر بكيفية مختلفة يسمح بالحصول على نفس قيمة دالة الهدف (مجموع التكاليف) مما يعطي مرونة أكثر لمتخذي القرار في اختيار ما يراه مناسبا، ويكون هناك حل بديل عندما تكون نتائج تقييم الخلايا الفارغة (مؤشرات التحسين) فيها قيمة صفرية، أي أن الاقتصاد في التكلفة "E_{ij}" لأي خانة شاغرة معدومة (= **0**) في جدول الحل الأمثل (الحل النهائي).

ويتم الوصول أو الحصول على الحلول البديلة بنفس طريقة عملية التحسين، حيث يتم تكوين مسار مغلق انطلاقا من الخانة الفارغة التي تحتوي على: **0** = "E_{ij}".

<u>مثال تطبيقي :</u>

ليكن لدينا الحل النهائي لإحدى مسائل النقل:

		D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
	J / I	$J_1= -2$	$J_2= 1$	$J_3= 0$	$J_4= -1$	
S_1	$I_1= -1$	(-10) 1000	(-79)	(-34)	(-55)	1000
S_2	$I_2= 0$	(-20) 500	(-34)	(-44)	(-10) 300	800
S_3	$I_3= -3$	(-72)	(-20) 1200	(-52)	(-40) 800	2000
S_4	$I_4= -2$	(-62)	(-10) 800	(-20) 750	(-30)	1550
الطلب		1500	2000	750	1100	**5350**

مجموع التكاليف: **C = 10200 D**

نلاحظ أن الخانة الأخيرة في الجدول ذات التكلفة "**3**" وهي (S_4, D_4) خانة فارغة (شاغرة) وفي نفس الوقت: **0** ="E_{ij}"، إذن نضع عندها القيمة: "+Δ" ونشكل المسار المغلق:

لنحصل على الجدول الموالي:

		D_1	D_1	D_1	D_1	العرض
	J I	$J_1= -2$	$J_2= 1$	$J_3= 0$	$J_4= -1$	
S_1	$I_1= -1$	(-1 1000 0)	(-7 9)	(-3 4)	(-5 5)	1000
S_2	$I_2= 0$	(-2 500 0)	(-3 4)	(-4 4)	(-1 300 0)	800
S_3	$I_3= -3$	(-7 2)	(-2 1200 +Δ 0)	(-5 2)	(-4 800 -Δ 0)	2000
S_4	$I_4= -2$	(-6 2)	(-1 800 -Δ 0)	(-2 750 0)	(-3 +Δ 0)	1550
الطلب		1500	2000	750	1100	**5350**

فيتغير جدول الحل النهائي إلى:

		D_1	D_1	D_1	D_1	العرض
	J I	$J_1= -2$	$J_2= 1$	$J_3= 0$	$J_4= -1$	
S_1	$I_1= -1$	(-1 1000 0)	(-7 9)	(-3 4)	(-5 5)	1000
S_2	$I_2= 0$	(-2 500 0)	(-3 4)	(-4 4)	(-1 300 0)	800
S_3	$I_3= -3$	(-7 2)	(-2 2000 0)	(-5 2)	(-4 0)	2000
S_4	$I_4= -2$	(-6 2)	(-1 0)	(-2 750 0)	(-3 800 0)	1550
الطلب		1500	2000	750	1100	**5350**

مجموع التكاليف: **C=10200 D**

يظهر لنا التوزيع، في هذه الحالة يختلف عن التوزيع السابق لكن التكاليف نفسها. وهذه هي حالة الحل البديل.

3- حالة عدم الإنتظام :

تظهر حالة عدم الانتظام عندما يكون الحل غير مقبول وذلك في حالة عدم قبولية الحل في الحل القاعدي ، بمعنى لما يكون عدد الخانات المملوءة لا يساوي (≠) **1-(n+m)**، سواء كان في جدول الحل الأولي أو أثناء مراحل التحسين، حيث

<u>**عدد الخانات الشاغلة أقل من $(m + n - 1)$:**</u>

ويمكن أن تحدث هذه الحالة إما في حالة الحل الأولي أو عند عملية التحسين.

- في حالة الحل الأولي تحدث عندما يتم إلغاء سطر وعمود مرة واحدة ، فيكون الحل غير مقبول.
- في عملية التحسين عندما يأخذ المتغير Δ قيما متساوية في الخانات التي تكون إشارة Δ سالبة فنصبح أما حالة عدم انتظام.

كما يلي:

	D_1	D_1	D_1
S_3	10 -Δ		20 +Δ
S_3	10		
S_3	+Δ		10 -Δ
		50	

عند التحسين يصبح الجدول كمايلي:

	D_1	D_1	D_1
S_3	0		30
S_3	10		
S_3	10		0
		50	

نلاحظ لدينا 4 خانات شاغلة بينما عدد الأسطر + عدد الأعمدة -1 = 3+4-1= 6

وهي حالة عدم انتظام . لحل هذه النقطة (حالة عدم الإنتظام)، نقوم بإضافة قيمة صغيرة جدا: "Ɛ"، بحيث تحقق الشروط التالية:

- يجب أن توضع هذه القيمة في الخانة ذات أقل تكلفة.
- يجب أن لا تسمح بتكوين مسار مغلق مع بقية القيم، وإذا شكلت مسارا نحاول أن تكون من المتغيرات الأساسية المؤشر عليهم بـــ "+Δ"
- يجب أن تسمح بحساب ما تبقى من معاملات **(I)**، **(J)**.

<u>مثال تطبيقي:</u>

	D_1	D_1	D_1
S_3	(1 10	(2 20	(3
S_3	(6	(5	(6 30
S_3	(7 10	(8	(9

نلاحظ أن: $(m+n-1)$ = **5** عدد الخانات **المملوءة** = **4** فالحل غير مقبول وغير قاعدي.

ونلاحظ أن هذه الحالة لا تسمح بحساب معاملات **(I)**، **(J)** في الخلية (D_2 , S_3)

إذن نحاول اختيار الخلية المناسبة لإضافة "Ɛ":

- يظهر لنا أن الخانات ذات التكاليف: "9، 8، 3، 6" لا تسمح بتشكيل مسار مغلق.
- نختار أقل تكلفة: "3" إذن يتم إضافة "Ɛ" عند هذه الخلية، ليصبح الجدول من الشكل:

		D_1	D_1	D_1
	J I	$J_1 = -1$	$J_2 = -2$	$J_3 = -3$
S_3	$I_1 = 0$	(-1 10	(-2 20	(-3 Ɛ
S_3	$I_2 = -3$	(-6	(-5	(-6 30
S_3	$I_3 = -6$	(-7 10	(-8	(-9

ونواصل الحل بطريقة عادية من خلال إتباع نفس خطوات، بحيث نحسب المعاملات: **(I)**، **(J)**، ثم نحسب "E_{ij}".

4- حالة مسألة النقل بمراحل المتعددة:

في بعض الحالات لا تكون مسألة النقل مسألة بسيطة وإنما مكونة من مجموعة من المراحل، بحيث يتم النقل في مرحلة أولى مثلا من وحدات الإنتاج إلى المخازن، وعلى أساس نتائجها يتم تكوين المسألة الثانية أي المرحلة الثانية مثلا من المخازن إلى مراكز الاستقبال – زبائن.

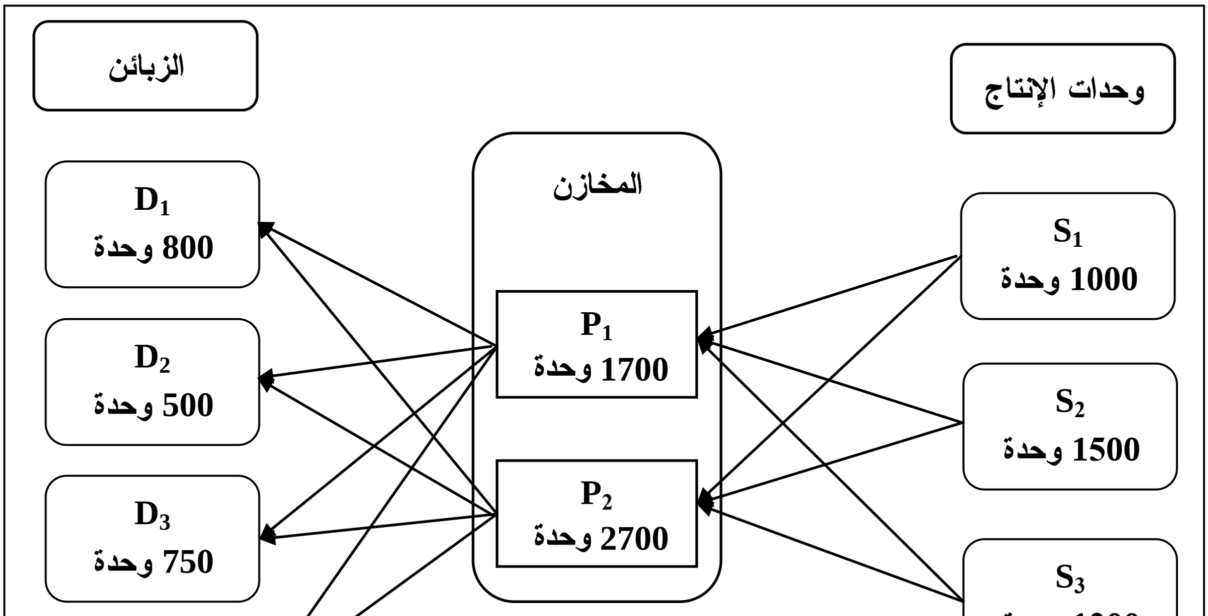
<u>فإذا افترضنا</u> لدى مؤسسة إنتاجية ثلاث وحدات إنتاجية، وجملة من المخازن في أماكن متعددة تستعملها لتخزين منتجاتها، ويتم إرسال هذه المنتجات إلى الزبائن انطلاقا من المخازن، فعملية التوزيع لا تكون مباشرة، حيث نجد أن المخازن تارة تمثل مراكز استقبال (المرحلة (1)) وتارة تمثل مصادر توزيع (المرحلة (2))، ولهذا تسمى مسألة النقل في مثل هذه الحالات: **المراحل المتعددة**، وحلها يكون وفقا لخطوتين:

1)- إيجاد الحل الأمثل للتوزيع من الوحدات الإنتاجية إلى المخازن.

2)- إيجاد الحل الأمثل من المخازن إلى الزبائن.

مثال تطبيقي :

تقوم مؤسسة النور لصناعة الزرابي بتلبية طلبات أربع زبائن (D_1, D_2, D_3, D_4) بعد أن يتم نقل البضاعة من الوحدات الإنتاجية (S_1, S_2, S_3) إلى مخزنين (P_1, P_2)، حيث يمكن تلخيص معلوماتها بيانيا كما يلي:



وتظهر تكاليف النقل من الوحدات للمخازن كما يلي :

	P_1	P_2
S_1	(8	(15
S_2	(10	(12
S_3	(7	(10

ومن المخازن إلى الزبائن كما يلي:

	D_1	D_2	D_3	D_4
P_1	(10	(8	(6	(6
P_2	(10	(7	(7	(8

المطلوب: إيجاد التوزيع الأمثل الذي يحقق أنى تكلفة نقل البضائع من الوحدات إلى الزبائن

الحل:

نلاحظ أن هذه المسألة ذات مرحلتين لأن الوحدات الإنتاجية لا يمكنها تزويد الزبائن مباشرة وإنما حتى يتم تخزينها. لذا، فإن حل المرحلة الأولى يمثل أساس الحل للمرحلة الثانية، وبتطبيق خطوات حل مسائل النقل .

- **المرحلة الأولى : نقل المنتجات من الوحدات الإنتاجية للمخازن.**

– أولا يجب التأكد من توازن الكميات المعروضة والمطلوبة ، وفي مثالنا هذا الشرط غير محقق وعليه نضيف سطرا وهميا بقيمة هذا الفرق .

700=3700−4400

- باستخدام طريقة الغرامات نتحصل على ما يلي:

	P_1	P_2	
S_1	(8 1000	(15	1000
S_2	(10	(12 1500	1500
S_3	(7 700	(10 500	1200
وحدة انتاجية وهمية	(0	(0 700	700
	1700	2700	4400 4400

من خلال النتيجة المتحصل عليها في الجدول أعلاه نقول أن التوزيع من الوحدات إلى المخازن يتم كما يلي :

- يتم تزويد المخزن الأول بـــ 1000 وحدة من الوحدة الإنتاجية الأولى بتكلفة إجمالية تقدر بـــ 8000و.ن، و500 وحدة من الوحدة الإنتاجية الثالثة بتكلفة تقدر بـــ 5000. ون.
- يتم تزويد المخزن الثاني بـــ 1500 وحدة من الوحدة الإنتاجية الثانية بتكلفة إجمالية تقدر بـــ 18000و.ن، و700 وحدة من الوحدة الإنتاجية الثالثة بتكلفة تقدر بـــ 4900، كما أن المخزن الثاني لن يستفيد من توزيع الوحدة الإنتاجية الوهمية بقيمة 700وحدة

ليكون مجموع تكلفة النقل 35900و.ن.

- **المرحلة الثانية : نقل المنتجات من المخازن للزبائن:**

- أولا يجب التأكد من توازن الكميات المعروضة والمطلوبة ، وفي مثالنا هذا الشرط غير محقق وعليه نضيف سطرا وهميا بقيمة هذا الفرق .

3650=1600+750+500+800

3700=2000+1700

وعليه نضيف عمودا وهميا بقيمة هذا الفرق .

باستخدام طريقة الجزاء والعقاب نتحصل على الجدول الموالي:

	زبون وهمي	D_4	D_3	D_2	D_1	
1700	(0	(6 1600	(6 100	(8	(10	P_1
2700	(0 50	(8	(7 650	(7 500	(9 800	P_2
3700	50	1600	750	500	800	

من خلال نتائج الجدول يمكن تفسير النتائج كما يلي :

- يتم تلبية طلب الزبون الأول من مخزون المخزن الثاني بتكلفة تقدر بـــ 7200و.ن.
- يتم تلبية طلب الزبون الثاني من مخزون المخزن الثاني بتكلفة تقدر بـــ 3500و.ن.
- يتم تلبية طلب الزبون الثالث من مخزون المخزن الأول بقيمة 100 وحدة بتكلفة تقدر بـــ 600و.ن، وكذا منمخزون المخزن الثاني بقيمة 650 بتكلفة تقدر بـــ 4550.
- يتم تلبية طلب الزبون الثالث من مخزون المخزن الأول بتكلفة تقدر بـــ 9600 و.ن.
- يبقى في المخزن الثاني 50 وحدة لم يتم توزيعها.

VI- مسألة النقل في حالة التعظيم:

VII- 1- مفهومها:

قد يقع المسيرون أحيانا في إشكالية نقل لتحقيق أكبر عائد ، وهذه الحالة وإن كانت قليلة الحدوث إلا أنها واردة، إذ لا تقتصر استخدامات مسائل النقل على حالة التدنية، وإنما يتعدى ذلك إلى حالة التعظيم أيضا وهي الحالة التي يتم فيها البحث عن أعظم ربح أو عائد في وجود نفس الشروط، فيتم استبدال تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالربح المحصل عليه من نقل الوحدة الواحدة.

و تختلف هذه الحالة عن سابقتها في النقاط التالية:

- عند استخدام طريقة التكلفة كان يتم اختيار أقل تكلفة بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة الأرباح فيتم اختيار أكبر خلية في الجدول لنبدأ الحل بها، و تسمى هذه الطريقة بتعظيم الأرباح؛
- عند استخدام طريقة فوجل التقريبية كان يتم حساب الفرق بين أصغر تكلفتين لكل سطر وعمود ذلك بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة التعظيم فيتم حساب الفرق بين أكبر رقمين لكل سطر وعمود و يلي ذلك اختيار أكبر فرق، ليتم بعدها تحديد الخلية الكبرى؛
- عند استخدام طرق تحسين الحل يتم تقييم و اختيار الخلية التي تحمل أكبر قيمة موجبة؛
- الحل الأمثل يكون عند الحصول على قيم جبرية سالبة أو معدومة للخلايا الفارغة.

وسنحاول فيما يلي عرض نقاط التشابه والإختلاف بين المسألتين.

مسألة النقل في حالة التخفيض	مسألة النقل في حالة التعظيم
يمكن إيجاد الحل الأولي من خلال الـ 5 (خمس) طرق المعروفة.	يمكن إيجاد الحل الأولي للمسألة من خلال الـ5 (خمس) طرق المعروفة مع عكس **أقل تكلفة بأكبر ربح**
التأكد من قبولية الحل من خلال العلاقة: **عدد الخانات المملوءة** = $m + n - 1$.	التأكد من قبولية الحل الأولي من خلال العلاقة: **عدد الخانات المملوءة** = $m + n - 1$.
تسبق جميع التكاليف في الجدول بإشارة سالبة، ثم نقوم بحساب: **(I)** و**(J)** وذلك من خلال العلاقة: $I_m + J_n = C_{mn}$	تترك جميع الأرباح في الجدول بإشارة موجبة، ثم نقوم بحساب: **(I)** و**(J)** وذلك من خلال العلاقة: $I_m + J_n = P_{mn}$
حساب مقدار الاقتصاد في التكلفة لكل خلية: $E_{ij} = I_m + J_n - C_{mn}$.	حساب مقدار الزيادة في الربح (عائد عددي) لكل خلية: $E_{ij} = P_{mn} - (I_m + J_n)$.
نصل إلى أمثلية الحل عندما تكون جميع قيم: "E_{ij}" موجبة أو معدومة.	نصل إلى أمثلية الحل عندما تكون جميع قيم: "E_{ij}" سالبة أو معدومة.
يتم التحسين برسم المسار المغلق عند أكبر قيمة لـ "E_{ij}" ضمن القيم السالبة.	يتم التحسين برسم المسار المغلق عند أكبر قيمة لـ " E_{ij} " ضمن القيم الموجبة.

يحسب مجموع التكاليف في كل مرة، حيث يلاحظ انخفاضها مع كل عملية تحسين.	يحسب مقدار الربح في كل مرة حيث يلاحظ ارتفاعه مع كل عملية تحسين.

VII – 02 خطوات حل مسألة النقل في حالة التعظيم :

إن الحل في مسألة النقل في حالة التعظيم يتم من خلال اتباع الخطوات التالية:

1. التأكد من توازن كميات العرض والطلب.
2. التوزيع وفقا لأحد الطرق الخمس المعروضة سابقا.
3. التأكد من قبولية الحل من خلال شرط القبولية **عدد الخانات المملوءة** = $m + n - 1$.
4. التأكد من أمثلية الحل من خلال قيم Eij التي يجب أن تكون سالبة أو معدومة عكس مسألة النقل في حالة التقليل.

- في حالة وجود Eij سالب نباشر عملية التحسين باتباع نفس الخطوات السابقة الخاصة بعملية التحسين والتي تم عرضها في مسألة النقل في حالة التقليل.

<u>ملاحظة:</u>

يتم الحصول على E_{ij} من خلال القانون: $E_{ij} = P_{mn} - (I_m + J_n)$، حيث:

P_{mn}: هو ربح خانة معينة، ويبقى كما هو دون أن يسبق بالإشارة –.

مثال تطبيقي :

نفرض أن مؤسسة لها ثلاث وحدات إنتاجية (S_1, S_2, S_3) وتقدر الطاقة الإنتاجية لها بـــ: 50، 40، 30 وحدة إنتاجية على التوالي، هذه الوحدات تنتج ثلاث منتجات: **(A, B, C)** وقد كان الطلب على هذه المنتجات(D_1, D_2, D_3) مقدر بـــ: 60، 50، 10 وحدة على الترتيب.

المطلوب :اوجد التوزيع الأمثل الذي يحقق أعظم الأرباح بالستخدام طريقة الجزاء والعقاب.

الحل : – قبل الشروع في الحل الأولي نتأكد أولا من توازن العرض والطلب. وفي مثالنا الشرط محقق لأن مجموع الطلب = 120 و مجموع العرض = 120.

– يتم بعدها إيجاد الحل الأولي بنفس الطريقة مسألة النقل في حالة التخفيض ولكن مع وجود اختلاف بسيط، حيث نبحث عن**أكبر** ربح في كل سطر ونحسب الغرامات بدلا من **أقل** تكلفة. لنحصل على التوزيع التالي :

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$P_{11}=7$ 10	$P_{12}=4$ 20	$P_{13}=5$	30
S_2	$P_{21}=3$	$P_{22}=2$ 30	$P_{23}=5$ 10	40
S_3	$P_{31}=1$	$P_{32}=3$	$P_{33}=4$ 50	50
b_i	10	50	60	120

وبعد حساب I و J و E_{ij} نتحصل على الجدول الموالي :

		D_1	D_2	D_3	a_i
		$J_1=4$	$J_2=1$	$J_3=4$	
S_1	$I_1= 3$	(7 10 0)	(4 20 0)	(5 -2)	30
S_2	$I_2= 1$	(3 -2)	(2 30 0)	(5 10 0)	40
S_3	$I_3= 0$	(1 -3)	(3 2)	(4 50 0)	50

b_i	10	50	60	120

مراقبة أمثلية الحل:

من خلال قيم E_{ij} نميز وجود قيمة موجبة هي (2) في الخانة(I_3/ D_2) وعليه فالحل ليس أمثلا ويحتاج لعملية تحسين بتشكيل المسار المغلق الذي يظهر في الجدول التالي:

		D_1	D_2	D_3	a_i
		$J_1=4$	$J_2=1$	$J_3=4$	
S_1	$I_1= 3$	(7 10 0)	(4 20 0)	(5 -2)	30
S_2	$I_2= 1$	(3 -2)	(2 30 -Δ 0)	(5 10 +Δ 0)	40
S_3	$I_3= 0$	(1 -3)	(3 +Δ 2)	(4 50 -Δ 0)	50
b_i		10	50	60	120

نختار أقل بالقيمة المطلقة لـــ Δ من بين القيمتين السالبتين وهما −30 و −50 ، ثم نعوضها في الجدول ، ونعيد حساب I و J و **E_{ij} فنتحصل على الجدول الموالي:**

	D_1	D_2	D_3	a_i
	$J_1=0$	$J_2= -3$	$J_3= -2$	

S_1	$I_1 = 7$	(7 **10** 0)	(4 **20** 0)	(5 0)	30
S_2	$I_2 = 7$	(3 -4)	(2 -2)	(5 **40** 0)	40
S_3	$I_3 = 6$	(1 -3)	(3 **30** 0)	(4 **20** 0)	50
b_i		10	50	60	120

من خلال الجدول وبما أن جميع قيم E_{ij} **سالبة** أو معدومة فهو حل أمثل ، يمكن تفسير الحل كما يلي:

- يتم تلبية طلب الوحدة D_1 المقدر بـــ 10 وحدات من طرف المورد S_1 بعائد قدره: **70**و.ن.
- يتم تلبية طلب الوحدة D_2 المقدر بـــ 50 وحدة من طرف الموردين S_1 بكمية 20 وحدة وبعائد **80** و.ن.، و المورد S_3بعائد قدره: **90**و.ن.
- يتم تلبية طلب الوحدة D_3 المقدر بـــ 50 وحدة من طرف الموردين S_2 بكمية 20 وحدة وبعائد قدره **200** و.ن.، والمورد S_3 بعائد قدره: **80** و.ن.