النموذج الثنائي: (النظير، المرافق، المعاكس، المقابل)

من الظواهر المهمة المصاحبة لمسائل البرمجة الخطية نموذج الثنائية و التي تعرف بتحويل نموذج البرمجة الخطية الأولي إلى نموذج الثنائية، و يختص هذا الأخير بسهولة حله عند حصول أي تغير في معاملات و إتاحة المتغيرات في النموذج الأولي بعد صياغته وحله. ويقترن أي نموذج أصلي (*Primal*) عادة بنموذج آخر يطلق عليه النموذج المرافق (*Dual*) (المقابل/الثنائي....)، من أهم فوائده تسهيل إيجاد الحل الأمثل خصوصا عندما يصعب حل النموذج الأصلي.

1- تعريف النموذج الثنائي:

لكل نموذج من نماذج التعظيم نموذجا مقابلا (ثنائيا) يمثل نموذج تدنية التكاليف، و أن هناك صفة مشتركة ما بين النموذجين تتمثل في أن الحل الأمثل لأحدهما يعطي الحل الأمثل للنموذج الآخر.

2- خطوات تشكيل النموذج الثنائي:

يمكن تلخيص خطوات تحويل النموذج الأصلي إلى نموذج ثنائي بالشكل التالي:

- عندما يكون النموذج الأصلي يعبر عن مشكلة الوصول إلى أقصى قيمة *Max* فإنه يتحول إلى الوصول إلى أدنى قيمة *Min* عند إعداد النموذج الثنائي، و العكس صحيح؛
- الموارد المتاحة و المذكورة في الجانب الأيسر لقيود النموذج الأصلي تصبح معاملات دالة الهدف في النموذج الثنائي؛
- معاملات متغيرات دالة الهدف في النموذج الأصلي تصبح قيم الجانب الأيسر في النموذج الثنائي؛
- تُحول أعمدة النموذج الأصلي إلى صفوف في النموذج الثنائي؛
- كلا النموذجين متحرران من مبدأ السلبية لكافة المتغيرات (إضافة شرط عدم سلبية المتغيرات).

إضافة إلى ذلك نقوم بـ:

- تحويل اتجاه المتباينات من النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل ($\leq$ تصبح $\geq$ و العكس)؛
- تغيير ترميز المتغيرات من النموذج الأصلي إلى النموذج المرافق ($x_1 \ldots x_n$ تصبح $y_1 \ldots y_n$).

و بناء على ذلك يصبح عدد متغيرات النموذج الثنائي مساويا لعدد قيود البرنامج الأولي.

و عليه تكون الصيغ القانونية للنموذجين الأولي و الثنائي كما يلي:

$$\begin{array}{l} Max\ Z = C'x \\ s/c \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} Min\ W = b'y \\ s/c \begin{cases} A'y \geq C \\ y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

و للتوضيح أكثر سوف نأخذ المثال التالي:

مثال 01: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 100\,x_1+200\,x_2+300\,x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3 \le 1000 \\ 5x_1+5x_2+7x_3 \le 1500 \\ 8x_1+9x_2+4x_3 \le 2000 \\ 5x_1+2x_2+x_3 \le 2500 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن النموذج يحتوي على 3 متغيرات و التي تمثل 3 أنواع من المنتجات، تعتمد المؤسسة في إنتاج هذه المنتجات على 4 موارد متاحة، حيث أنها تسعى من خلال هذه العملية إلى تعظيم الأرباح المترتبة عن بيع هذه المنتجات، في المقابل سيسعى مشتري هذه المنتجات إلى تدنية تكاليف شرائها مع تحفيز صاحب المؤسسة على البيع، فتصبح دالة الهدف الخاصة بهذا المشتري من نوع تدنية:

$$Min\ W = 1000\,y_1+1500\,y_2+2000\,y_3+2500\,y_4$$

حيث تمثل (y_1, y_2, y_3, y_4) أسعار المواد الأولية.

في الوقت نفسه ستقوم المؤسسة ببيع المنتجات في حال ما إذا كان العائد المحقق من بيعها أكبر من العائد على الإنتاج، فتصاغ هذه العملية كما يلي:

$$\begin{cases} 2y_1+5y_2+8y_3+5y_4 \ge 100 \\ y_1+5y_2+9y_3+2y_4 \ge 200 \\ 4y_1+7y_2+4y_3+4y_4 \ge 300 \end{cases}$$

و عليه فإن النموذج المرافق للنموذج الأولي أعلاه يكون من الشكل:

$$Min\ W = 1000\,y_1+1500\,y_2+2000\,y_3+2500\,y_4$$
$$\begin{cases} 2y_1+5y_2+8y_3+5y_4 \ge 100 \\ y_1+5y_2+9y_3+2y_4 \ge 200 \\ 4y_1+7y_2+4y_3+4y_4 \ge 300 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

أما في حالة نماذج التدنية فيكون برنامج الثنائية كما يلي:

النموذج الثنائي	النموذج الأولي
$Min\ W = 100\,y_1+150\,y_2+220\,y_3$ $\begin{cases} 7y_1+2y_2+3y_3 \ge 5 \\ 6y_1+4y_2+9y_3 \ge 6 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$	$Max\ Z = 5\,x_1+6\,x_2$ $\begin{cases} 7x_1+6x_2 \le 100 \\ 2x_1+4x_2 \le 150 \\ 3x_1+9x_2 \le 220 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

مثال 02: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 5x_1 + 4x_2 + 9x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 100 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

النموذج الثنائي هو:

$$Min\ W = 100\ y_1 + 200\ y_2$$
$$\begin{cases} 2y_1 + 7y_2 \geq 5 \\ 3y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ 8y_1 + 3y_2 \geq 9 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة هامة جدا:

اكتفينا في هذا العنصر (استنتاج النموذج الثنائي) على الصيغة القانونية* للبرنامج الخطي فقط، دون التطرق إلى الحالات الأخرى، أين تكون فيها القيود مختلطة وأحيانا قيد المساواة، وعدم توفر شرط عدم السلبية....، والتي تحتاج إلى شيء من التفصيل أكثر.

* الصيغة القانونية للبرنامج الخطي :

- دالة الهدف من نوع تعظيم ***Max*** مع كل القيود من نوع أصغر أو يساوي $\leq$.

- دالة الهدف من نوع تخفيض ***Min*** مع كل القيود من نوع أكبر أو يساوي $\geq$.