**2-3: تقدير معالم نموذج الانحدار الخطي البسيط**

من أجل تقدير قيمتي الثابتين **B1 وB0** في المعادلة رقم (01) نسحب من المجتمعين عينة عشوائية من قيم (XI) وعينة مقابلة لها من قيم (YI)، ونرسم النقاط (YI،XI) على مستوى المحورين المتعامدين فنحصل على الشكل التالي:

**الشكل(05)** نموذج الانحدار المفترض بين المتغيرين **X** و **y**

y

خط الانحدار المقدر

b0

X

وعلى العموم، نفترض انه لدينا لوحة الانتشار التالية التي توضح العلاقة بين المتغيرين (Xi) (Yi).

**الشكل (6) خط انحدار مرسوم في مستوى (Yi،Xi)**

yi

**e3. .**10 **2e**

5 . **e1**

xi

2 1

من خلال النظر إلى هذه النقاط يمكننا أن نعتبر أنها تتموقع بالقرب من خط مستقيم واحد، نسمي هذا المستقيم مستقيم الانحدار أو خط الانحدار، وتكتب معادلته كما يلي:

**b0+b1xi= Ŷ**

حيث :

**b0**: تمثل نقطة تقاطع المستقيم مع المحور الرأسي، وهي تمثل قيمة **Ŷ** لما يكون **X** مساو للصفر ، انظر الشكل الخامس .و**b0** في هذه الحالة تمثل تقدير للثابت **B0** في المعادلة رقم (1).

**b1**: تمثل ميل المستقيم، حيث اذا ازدادت قيمة **x** بمقدار وحدة واحدة تزداد قيمة **Ŷ** بمقدار **b1** وحدة، و**b1** في هذه الحالة تمثل تقدير للثابت **B1** في المعادلة رقم (1). وما يجب الإشارة إليه هو انه إذا كانت **b1** لديها قيمة سالبة سيكون ميل الخط لأسفل، واذا كانت صفرا يكون **b0 =** **Ŷ** وهو خط أفقي يفسر بان قيمة **x** لا تؤثر على قيمة **Y**.

**Ŷ**: تمثل القيمة المتنبأ بها للمتغير **y**، كذلك تسمى بالقيمة المتوقعة أو الوسيطية للمتغير **Y**.لأنه مقابل كل قيمة **X**i نجد العديد من القيم الحقيقية **Yi** التي تعبر عنها بقيمة وسيطية واحدة وهي **iŶ** المستخدمة في المعادلة السابقة رقم (2). وعليه فكل القيم **iŶ** الواقعة على الخط المستقيم هي في حقيقة الأمر قيم تقريبية لقيم i Y.

لكن السؤال المطروح هو كيف نحسب قيمتي b0، b1 ؟ للاجابة على هذا السؤال نلجأ الى طريقة نسميها طريقة المربعات الصغرى.

* **طريقة المربعات الصغر**ى

إن المبدأ الأساسي لهذه الطريقة هو جعل مجموع مربعات الأخطاء اقل ما يمكن، وهذا بغية الحصول على أفضل خط مستقيم يمثل العلاقة بين المتغيرين **x** و **y**، والذي يسمى بخط انحدار **y** على **x**.

فاذا رجعنا قليلا الى الشكل السادس نلاحظ بان هناك نقاط لا تقع على الخط وبالتالي فان هناك مسافة رأسية بين هذه النقاط وخط الانحدار والتي تمثل ا**لخطأ** ونرمز له بالرمز **e**i.

فهذا الخطأ يسمى أيضا **انحراف القيم الحقيقية Yi** **عن القيم المتوقعة iŶ** ، وعليه يكون:

**ei = Yi- Ŷi**

**3**

**= Yi-(b0+b1Xi)**

ودائما من خلال الشكل السادس نلاحظ بأنه لدينا ثلاثة أخطاء (**e1,e2,e3)** وعلينا تخليصها بطريقة ما، وأفضل طريقة هي تصغير مجموع مربعات الأخطاء، والخط الذي يجعل مجموع مربعات الأخطاء **( ei2 Ʃ)** اقل ما يمكن يسمى بخط المربعات الصغرى أو خط الانحدار المقدر، حيث مجموع مربعات الأخطاء لهذا الخط اقل من أي خط آخر ، والأسلوب المستخدم في إيجاد خط المربعات الصغرى يسمى بطريقة المربعات الصغرى.لنأخذ الآن مجموع مربعات الأخطاء والذي نرمز له بالرمز**SSE :**

4

**SSE** Ʃ= **i=1 ei2**

= (yi- Ŷi )2

b0+b1xi))2)( Yi-=

من خلال هذه الدالة نلاحظ ان (Xi) و ( Yi) هي قيم معلومة ، اما لb0، b1 فهما مجهولتان ونريد تحديد قيمة كل منهما.

إن طريقة المربعات الصغرى في تعيين b0 b1 تقتضي ان تكون **SSE** الممثلة لمجموع مربعات الأخطاء ( أو الفروق) اصغر ما يمكن ، لهذا يلزم جساب المشتقتين الجزئيتين للدالة **SSE** بالنسبة ل **b0 وb1** وجعل كل من هذه المشتقتين مساو للصفر، فنجد:

**Yi-(b0+b1xi))=0)Ʃ -2 =b0 Ə /SSE Ə**

**Yi-(b0+b1xi))=0)Ʃ -2 b1= Ə /SSE Ə**

بقسمة طرفي المعادلتين على (2-) نجد:

5

**Yi-(b0+b1xi))=0)Ʃ**

**Yi-(b0+b1xi))=0) XiƩ**

6

من المعادلة رقم (05) نستنتج أن طريقة المربعات الصغرى في حساب **b0 ،b1** تتضمن أن يكون مجموع الأخطاء معدوما:  **ei=0Ʃ**

من المعادلة (6) نستنتج ان مجموع تلك الأخطاء بعد ترجيحها بوافصل نقاط الانتشار (xi) هو معدوم أيضا: **xiei=0 Ʃ**

من المعادلتين (5)و (6) نكتب:

Yi=nb0+b1Ʃxi Ʃ

Ʃ Xiyi=b0Ʃxi+b1 Ʃxi2

ويكون ايضا:

**b0= Ʃyi-b1Ʃxi/n**

**Ʃxiyi=b0Ʃxi+b1Ʃxi2**

وبحل هاتين المعادلتين حلا مشتركا نجد:

7

**Xiyi-nxӯ /Ʃxi2-nx2 b1=Ʃ**

**b0=ӯ-b1 X̅**

8

ان المعادلة (7) يمكن كتابتها بطريقة اخرى كما يلي:

**9**

**b1=nƩxiyi-ƩxiƩyi/nƩxi2-(Ʃxi)2**

**10**

**b1=Ʃ(xi-x)(yi-y)/Ʃ(xi-x)2**

وعند استخدام الرموز: **SSx ، SSY ، SSxy** حيث :

**Xi2-(Ʃxi)2/n Ʃ= 2(:Ʃ(xi-xSSx**

**(yi-yi)2=Ʃyi2-(Ʃyi)2/nƩSsy=**

**ssxy =Ʃ(xi-x)(yi-ӯ)=Ʃxiyi-ƩxiƩyi/n**

يمكن كتابة **1b** بالشكل التالي:

**b1=ssxy/ssx**

**ملاحظة:**

**SSxy** يقيس الدرجة التي تتأثر بها الاختلافات أو الانحرافات في قيم **Y** نتيجة الاختلاف أو الانحراف في قيم **X** .أما **SSx** اي (**Sum of Squares X** ) يمثل مجموع مربعات **X** وقيس الاختلاف الكلي للمتغير **X** . في حين **SSy** أي (**Sum of Squares Y**) يمثل مجموع مربعات **Y** وقيس الاختلاف الكلي للمتغير **Y**.

1