مسائل النقل

يبحث أسلوب النقل في حل المسائل المتعلقة بنقل مادة معينة أو مجموعة من المواد المتجانسة من مجموعة من المصادر (العرض) إلى مجموعة من الاستخدامات (الطلب) بهدف تقليل تكاليف النقل الاجمالية.

ويقصد بحل مسائل النقل إيجاد قيم متغيرات القرار x_{ij} المجهولة، لذلك فإن الأسلوب الرياضي لحل هذه المسائل يمر بمرحلتين أساسيتين هما: **إيجاد الحل الابتدائي الممكن** و التي تتضمن العديد من الطرق، نختار منها طريقتين هما: **طريقة أدنى تكلفة في الجدول** (**التكاليف الدنيا**)، **وطريقة الغرامات** (**فوجل التقريبية**)، ثم تحسين الحل الابتدائي في المرحلة الثانية بـ **طريقة المؤشرين**.

1– المرحلة الأولى: تحديد الحل الابتدائي:

1–1– طريقة التكاليف الدنيا (*Méthode du moindre coût*):

وفق هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية وهكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض والطلب.

مثال: الجدول أدناه يقدم تكاليف النقل الوحدوية لنقل منتج معين من 03 مراكز إنتاج إلى 05 مراكز توزيع، بالإضافة إلى عرض كل مركز إنتاج و طلب كل مركز توزيع.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	A_i
O_1	100	800	100	500	400	240
O_2	500	500	300	600	700	160
O_3	200	900	500	900	800	260
b_i	120	130	145	125	140	660

المطلوب: **1–** انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؛ وأكمل الحل الأولي؟

الحل:

❖ نلاحظ أن أدنى تكلفة في الجدول هي 100، أي إما نقل المنتج من المنبع الأول O_1 إلى المصب الأول D_1 أو من المنبع الأول O_1 إلى المصب الثالث D_3، و طريقة الاختيار هنا تعتمد على أكبر قدر من

الطلب، فلو تمت مقارنة طلب كل من المصب الأول و الثاني، فإن المؤسسة حتما سوف تختار الطلب الأكبر لتصريف أكبر قدر من منتجاتها، لذلك يتم إشباع طلب المصب الثالث كليا من المنبع الأول؛

- ❖ أما التكلفة الموالية فهي 100، أي نقل المنتج من المنبع الأول O_1 إلى المصب الأول D_1، حيث يتم تزويده بـ 95 وحدة المتبقية من 240 وحدة بعد التوزيع، و بذلك يتشبع السطر الأول، أي أن الكمية المعروضة في المنبع الأول 0؛
- ❖ أما التكلفة الموالية فهي 200، و هي تكلفة نقل المنتج من المنبع الثالث O_3 إلى المصب الأول D_1، وهنا يتم تزويد هذا الأخير بـ 25 وحدة فقط و هي احتياجاته بعد حصوله على 95 وحدة من المنبع الأول، وبالتالي يتشبع العمود الأول، و هكذا يتم الانتقال بين الخلايا تصاعديا، كما في الجدول أدناه:

حل مسألة النقل بطريقة التكاليف الدنيا

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	100 **95**	800 /	100 **145**	500 /	400 /	~~240~~ ~~95~~
O_2	500 /	500 **130**	300 /	600 **30**	700 /	~~160~~ ~~30~~
O_3	200 **25**	900 /	500 /	900 **95**	800 **140**	~~260~~ ~~235~~ ~~95~~
b_i	~~120~~ ~~25~~	~~130~~	~~145~~	~~125~~ ~~95~~	~~140~~	660

لكي يكون **الحل الأولي مقبول** يجب توفر الشرط:

(عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) **1 –**

عدد الخلايا المملوءة = 7 و $m+n-1 = 3+5-1 = 7$

قيمة التكاليف وفق هذه الطريقة هي:

$$Z=(100\times95)+(100\times145)+(500\times130)+(600\times30)+(200\times25)+(900\times95)+(800\times140)=309500$$

1-3- طريقة الغرامات (فوجل) *(Méthode de Vogel)*:

تعتبر طريقة فوجل التقريبية (طريقة الفروقات العظمى) من أهم الطرق على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة على الوصول للحل الأمثل أو الحل القريب من الأمثل، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطريقة السابقة. وتتلخص خطوات إيجاد الحل الأولي لهذه الطريقة كما يلي:

- ❖ حساب الغرامة وهي **الفرق بين أقل تكلفتين** في كل صف و في كل عمود؛
- ❖ تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك **أكبر غرامة**.
- ❖ اختيار الخانة ذات **التكلفة الأقل** في ذلك الصف أو العمود؛
- ❖ في الخانة التي اختيرت هي الخانة الثالثة، نقارن احتياجات المصب مع ما هو متوفر في المنبع لنأخذ القيمة الأقل؛
- ❖ **نعيد حساب الفرق مرة أخرى** لكل من الأعمدة و الصفوف، و ذلك بعد إلغاء العمود أو السطر المشبع، و تكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات كل المصبات من المنابع المتاحة.

و بالعودة إلى مثالنا السابق، سنقوم بتطبيق مراحل هذه الطريقة، وفق المراحل التالية:

- ❖ نقوم بحساب الفرق بين أدنى تكلفتين على مستوى جميع الأسطر والأعمدة فنحصل على القيم: (100-100=0، 300-500=200، 500-200=300) على مستوى الأسطر الثلاث، ونحصل على القيم: (200-100=100، 800-500=300، 300-100=200، 600-500=100، 700-400=300) على مستوى الأعمدة؛
- ❖ نقوم باختيار أكبر فرق بين الأعمدة و الأسطر، نلاحظ في هذا المثال أن 300 هي أكبر فرق و قد تكررت في السطر الأخير و العمودين الثاني و الخامس، و هنا يتم اختيار أكبر فرق بينها و الذي يوافق أدنى تكلفة، و هو السطر الثالث و الذي يوافق 200 التي تعبر عن أدنى تكلفة في الجدول؛
- ❖ تعبر الخلية 200 عن تكلفة تزويد المصب الأول بالمنتج من المنبع الثالث، لذلك يتم تزويد طلبه المتمثل في 120 وحدة من 260 وحدة (عرض المنبع الثالث)، و بذلك يتم إشباع المصب الأول (العمود الأول)، و يتبقى للمنبع الثالث كمية معروضة تقدر بـ 140 وحدة؛
- ❖ و هكذا يتم إلغاء العمود الأول من جدول النقل لكونه مشبعا، و يتم تحيين (*actualisation*) الجدول بإعادة حساب الفرق بين التكاليف المتبقية، فنحصل على القيم: 300، 200، 300 في

الأسطر الثلاث، و تبقى القيم: 300، 200، 100، 300 في الأعمدة الأربعة المتبقية، نقوم باختيار أكبر فرق (300) و الذي يوافق أدنى تكلفة (100)؛

- ❖ تعبر الخانة 100 عن تكلفة نقل المنتجات من المنبع الأول إلى المصب الثالث، لذلك يتم تزويد هذا الأخير بكل طلبه المتمثل في 145 وحدة من أصل 240 وحدة معروضة لدى المنبع الأول، و هكذا يتم إشباع العمود الثاني، و إلغاؤه، و يبقى للمنبع الأول كمية معروض تقدر بـ 95وحدة؛
- ❖ و بإتباع نفس الخطوات في كل مرة، نحصل على النتائج المبينة في الجدول أدناه:

حل مسألة النقل بطريقة الغرامات للمثال السابق

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i	الفرق
O_1	100 /	800 /	100 **145**	500 /	400 **95**	~~240~~ ~~95~~	0 300 100
O_2	500 /	500 **130**	300 /	600 **30**	700 /	~~160~~ ~~30~~	200 200 100
O_3	200 **120**	009 /	500 /	900 **95**	800 **45**	~~260~~ ~~140~~	300 300 100
b_i	~~120~~	~~130~~	~~145~~	~~125~~ ~~95~~	~~140~~ ~~45~~	660	
الفرق	100	300 400	200	100 300	300 100		

انطلاقا من الجدول أعلاه أنه تم ملئ جميع الخانات، لذلك نتوقف عن تطبيق طريقة **الغرامات**، و عليه تم الحصول على الحل الأولي، ويصبح **مقبولا** بتوفر الشرط:

عدد الخانات المملوءة:07 وهي مساوية ل: 07= $(m+n-1)$

$$x_{13}=145,\quad x_{15}=95,\quad x_{22}=130,\quad x_{24}=30,\quad x_{31}=120,\quad x_{34}=95,\quad x_{35}=45$$

و للحصول على قيمة دالة الهدف نقوم بتعويض قيم متغيرات القرار في دالة هدف نموذج النقل، فنحصل على:

$$Z=100\,(0)+800\,(0)+100\,(145)+500\,(0)+400\,(95)+500\,(0)+500\,(130)+300\,(0)+600\,(30)+700\,(0)+200\,(120)+900\,(0)+500\,(0)+900\,(95)+800\,(45)=281000$$

قيمة دالة الهدف المحصل عليها باستخدام طريقة **الغرامات** (281000) أقل من التكلفة الإجمالية للنقل المحصل عليها بطريقة التكاليف الدنيا (309500).

ملاحظة: في حالة النموذج غير المتوازن أي في حالة عدم تساوي العرض والطلب فإنه تتم إضافة الكمية المعروضة (في حالة العرض أقل من الطلب) في سطر جديد بتكاليف معدومة، أو إضافة الكمية المطلوبة في عمود جديد (في حالة الطلب أقل من العرض) في عمود جديد بتكاليف معدومة.

2- المرحلة الثانية: تحسين الحل الأولي

و يتم تحسين الحل الابتدائي بـ: **طريقة المؤشرين i و j**

تستخدم هذه الطريقة لاختبار أمثلية الحل الأولي، وتعتمد على تكوين مسارات مغلقة للمتغيرات غير الأساسية (انطلاقا من الخانات الفارغة) ومن ثم إيجاد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل، أما هذه الطريقة فهي قادرة على تحديد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل مباشرة، و تتلخص هذه الطريقة فيما يلي:

- ❖ نضيف لكل سطر المؤشر **i**، و نضيف لكل عمود المؤشر **j** ؛
- ❖ نحسب المؤشرين **i** و**j** من خلال **الخانات المملوءة فقط** بالمعادلة التالية: $C = i + j$

حيث c هي تكلفة النقل، بفرض أحد المؤشرين يساوي الصفر لايجاد بقية المؤشرات:

i أو j = 0 مرة واحدة فقط.

و المطلوب تحديد قيم المؤشرات i و j في كل الأسطر والأعمدة.

- ❖ نحسب المؤشر E_{ij} (يسمى الاقتصاد في التكاليف)بالمعادلة التالية:

$E_{ij} = C - \mathrm{i} - \mathrm{j}$ في كل الخانات المملوءة والفارغة.

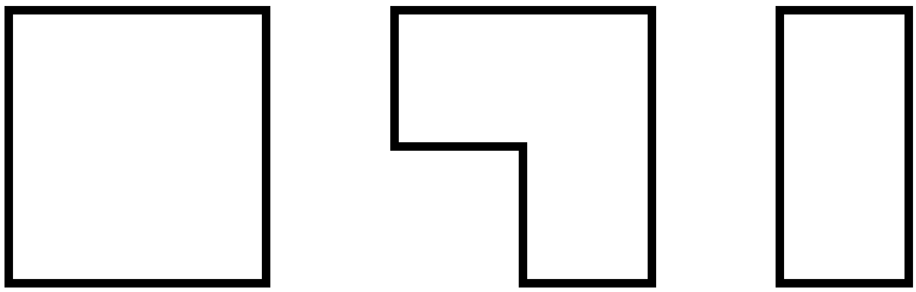
- ❖ إذا كان : E_{ij} أكبر أو يساوي الصفر **فالحل أمثل**.
- ❖ إذا كان : E_{ij} أقل من الصفر **فالحل غير أمثل**. مما يستدعي القيام **بعملية التحسين**.

ملاحظة هامة:

في الخانات المملوءة يجب أن نجد $E_{ij} = 0$

خطوات عملية التحسين للوصول إلى الحل الأمثل:

- ❖ نختار الخانة الفارغة ذات أقل قيمة سالبة (لـ E_{ij}) ؛
- ❖ انطلاقا من هذه الخانة نشكل مسار مغلق بخطوط مستقيمة عمودية وأفقية، زوايا المسار تكون خانات مملوءة. ويكون شكل المسار المغلق كما في الأشكال التالية:



- ❖ نضع إشارة (+) في الخانة المختارة، وإشارة (−) في الخانة الموالية (الزاوية المملوءة)، والتي بعدها إشارة (+) وهكذا إلى غاية نهاية المسار.
- ❖ نختار أقل قيمة في الزوايا ذات الإشارات (−).
- ❖ نشكل جدول جديد، ونضيف القيمة المختارة في الخطوة السابقة في الخانات ذات الإشارة (+) ونطرحها من الخانات ذات الإشارة (−).
- ❖ بقية الخانات التي لا تشكل المسار تبقى كما هي.
- ❖ تعيدنا هذه الخطوة إلى الحل الأولي، ونعيد تطبيق الخطوات إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل.

بأخذ نفس المثال السابق، و بعد الوصول إلى الحل المقبول باستخدام طريقة أقل تكلفة، سنقوم بتحسينه بالاعتماد على طريقة المؤشرين **i** و **j**.

	j \ i	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
		100	700	100	800	700	
O_1	0	100 / - 95	800 / /	100 / 145	500 / /	400 / + /	240
O_2	-200	500 / /	500 / 130	300 / /	600 / 30	700 / /	160
O_3	100	200 / + 25	900 / /	500 / /	900 / 95	800 / - 140	260
b_i		120	130	145	125	140	660

أولا: نحسب i و j :

في الخلايا المملوءة: نضع: $i_1=0$ ونحسب البقية بالاعتماد على القانون: $C = i + j$

$$C_{11} = 100 \Rightarrow i_1 + j_1 = 100 \Rightarrow 100 = 0 + j_1 \Rightarrow \boldsymbol{j_1 = 100}$$
$$C_{13} = 100 \Rightarrow i_1 + j_3 = 100 \Rightarrow 100 = 0 + j_3 \Rightarrow \boldsymbol{j_3 = 100}$$
$$C_{31} = 200 \Rightarrow i_3 + j_1 = 200 \Rightarrow 200 = i_3 + 100 \Rightarrow \boldsymbol{i_3 = 100}$$
$$C_{34} = 900 \Rightarrow i_3 + j_4 = 900 \Rightarrow 900 = 100 + j_4 \Rightarrow \boldsymbol{j_4 = 800}$$
$$C_{35} = 800 \Rightarrow i_3 + j_5 = 800 \Rightarrow 800 = 100 + j_5 \Rightarrow \boldsymbol{j_5 = 700}$$
$$C_{24} = 600 \Rightarrow i_2 + j_4 = 600 \Rightarrow 600 = i_2 + 800 \Rightarrow \boldsymbol{i_2 = -200}$$
$$C_{22} = 500 \Rightarrow i_2 + j_2 = 500 \Rightarrow 500 = (-200) + j_2 \Rightarrow \boldsymbol{j_2 = 700}$$

حساب المؤشر E_{ij} بالمعادلة التالية: $E_{ij} = C - i - j$ في كل الخانات المملوءة والفارغة:

الخانات المملوءة	الخانات الفارغة
$100-100-0=0$	$800-700-0=100$
$100-100-0=0$	$500-800-0=\mathbf{-300}$
$500-700-(-200)=0$	$400-700-0=\mathbf{-300}$
$600-800-(-200)=0$	$500-100-(-200)=600$
$200-100-100=0$	$300-100-(-200)=400$
$900-800-100=0$	$700-700-(-200)=200$
$800-700-100=0$	$900-700-100=100$
	$500-100-100=300$

نلاحظ أنه في كل الخانات المملوءة: $\boldsymbol{E_{ij}=0}$

وفي الخانات الفارغة: E_{ij} أقل من الصفر **إذن فالحل غير أمثل**. مما يستدعي القيام **بعملية التحسين**.

عملية التحسين:

- نختار أقل قيمة سالبة من بين القيم السالبة (−300، −300) .
- نشكل مسار مغلق.
- نضع + ، − ، + ، − ...
- نختار أقل قيمة من الزوايا السالبة (95 ، 140) ، إذن القيمة هي : 95
- نطرح هذه القيمة من الخانات ذات الإشارة — ونضيفها في الخانات ذات الإشارة +.

بعد تطبيق الخطوات السابقة نجد الجدول الجديد كما يلي :

		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
	j \ i	-200	400	100	500	400	
O_1	0	100	800 /	100 145	500 /	400 95	240
O_2	100	500 /	500 130	300 /	600 30	700 /	160
O_3	400	200 120	900 /	500 /	900 95	800 45	260
b_i		120	130	145	125	140	660

الحل الأولي مقبول بسبب توفر الشرط:

(عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) **– 1**

عدد الخلايا المملوءة = 7 و $m+n-1 = 3+5-1 = 7$

والتحقق من الأمثلية نعيد تطبيق طريقة المؤشرين : i و j

نجد: E_{ij} أكبر أو يساوي الصفر إذن **فالحل أمثل**.

الحل الأمثل (التوزيع الأمثل) هو:

الطلب D_1 يحتاج 120 وحدة يتحصل عليها من O_3 بتكلفة نقل : 200 دج للوحدة

الطلب D_2 يحتاج 130 وحدة يتحصل عليها من O_2 بتكلفة نقل : 500 دج للوحدة

الطلب D_3 يحتاج 145 وحدة يتحصل عليها من O_1 بتكلفة نقل : 100 دج للوحدة

الطلب D_4 يحتاج 125 وحدة يتحصل على 30 وحدة من O_2 بتكلفة نقل : 600 دج للوحدة

ويتحصل على 95 وحدة من O_3 بتكلفة نقل : 900 دج للوحدة

الطلب D_5 يحتاج 140 وحدة يتحصل على 95 وحدة من O_1 بتكلفة نقل : 400 دج للوحدة

ويتحصل على 45 وحدة من O_3 بتكلفة نقل : 800 دج للوحدة

وتكون التكلفة الاجمالية للنقل:

$$Z = 100\,(145)+400\,(95)+500\,(130)+600\,(30)+200\,(120)+900\,(95)+800\,(45)=281000$$