République algérienne démocratique et populaire
Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sc.Exactes, et SNV.
Département d'Informatique

Formalisation de la procédure effective

Niveau: 1er année Master
Option: Génie Logiciel et Systèmes Distribués

2023/2024

Rappel

- Machine de Turing,
- Formalisation & principe de fonctionnement,
- Notion de Configuration,
- Dérivation (une étape & plusieurs étapes),
- Décision de machine de Turing,

Formalisation

Une machine de Turing est formellement décrite par un septuplet

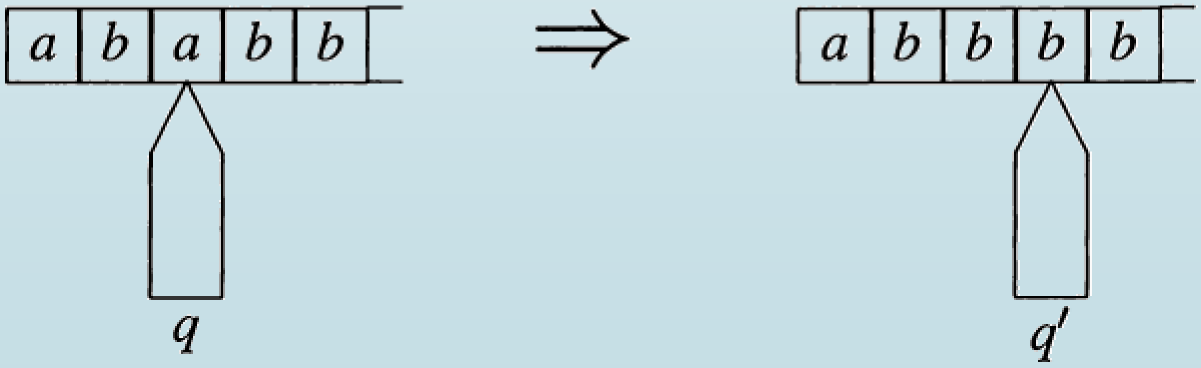
$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, s, B, F),$$

où :

- Q est un ensemble fini d'états,
- Γ est l'alphabet de ruban (l'alphabet utilisé sur le ruban),
- $\Sigma \subseteq \Gamma$ est l'alphabet d'entrée (l'alphabet utilisé pour le mot d'entrée),
- $s \in Q$ est l'état initial,
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états accepteurs,
- $B \in \Gamma - \Sigma$ est le « symbole blanc » (souvent dénoté #),
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ est la fonction de transition (L et R sont utilisés pour représenter respectivement un déplacement de la tête de lecture vers la gauche (left) et vers la droite (right)).

Principe de fonctionnement

- Initialement, la tète de lecture est sur la première ce du ruban (la machine se trouve dans son état initial),
- À chaque étape de l exécution :
  - Lit le symbole se trouve sous sa tète de lecture
  - Remplace ce symbole par celui précisé par la fonction de transition
  - Déplace sa tète de lecture selon le sens de fonction de transition
  - Change l état
- Un mot est accepte par la machine lorsque l exécution atteint un état accepteur



Définition d'une configuration

Le ruban est infini mais à tout moment de l'exécution, seule une partie finie est effectivement utilisée par la machine (symboles non blancs).

Pour décrire le fonctionnement précis d'une machine de Turing, il est nécessaire d'introduire la notion de configuration. Une *configuration* d'une machine de Turing est l'état *global* de la machine à un instant donné. Elle comprend:

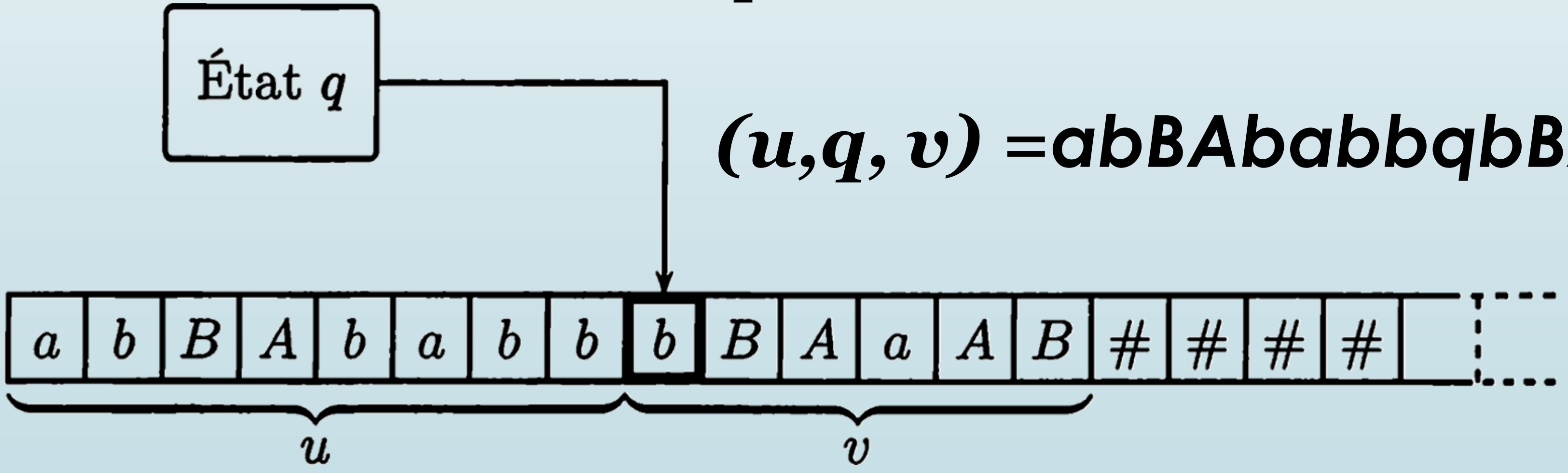
1. l'état de contrôle qui est un élément de Q,
2. le contenu de la bande,
3. la position de la tête de lecture sur la bande.

Définition d’une configuration

Une configuration d’une machine de Turing est un triplet :
Plus formellement, une configuration est un élément de:

$$Q \times \Gamma^* \times (\varepsilon \cup \Gamma^*(\Gamma - \{B\}))$$

Tel que $\boldsymbol{B}$ = #



$\boldsymbol{(u,q,v)}$ **=abBAbabbqbBAaAB**

Notion de dérivation

- Une exécution d’une machine de Turing (calcul) est une suite d’étapes.
- Une étape de calcul consiste à passer d’une configuration à une autre configuration en appliquant une transition.
- Ce passage est appelé : ***dérivation***.

Dérivation en une étape:

***Définition*:** Soit une configuration (q, α_1, α_2)

Notons cette configuration $(q, \alpha_1, b\alpha_2')$

($\boldsymbol{b}$ est le caractère sous la tête de lecture)

- Si $\alpha_2 = \varepsilon$ alors $\boldsymbol{b} = \#$.
- Si $\delta(q, b) = (q', b', R)$ alors:

$$(q, \alpha_1, b\alpha_2') \vdash_M (q', \alpha_1 b', \alpha_2').$$

- Si $\delta(q, b) = (q', b', L)$ et $\alpha_1 \neq \varepsilon$ et donc $\alpha_1' a$, alors:

$$(q, \alpha_1' a, b\alpha_2') \vdash_M (q', \alpha_1', ab'\alpha_2')$$

Dérivation en plusieurs étapes:

Définition: une *C'* est dérivable en plusieurs étapes de la conconfiguration figuration *C* par la machine M:

M $(C \vdash_M^* C')$ s'il existe $k \geqslant 0$ et des configuration intermédiaires $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k$ telles que:

- $C = C_0$,
- $C' = C_k$,
- $C_i \vdash_M C_{i+1}$ pour $0 \leqslant i < k$.

Définition du langage accepté pat MT

Définition: Le langage *L(M)* accepté par une machine de Turing est l'ensemble des mots *w* tels que

$$(s, \varepsilon, w) \vdash_M^* (p, \alpha_1, \alpha_2), \text{ avec } p \in F$$

***Définition*: Un langage *L* est décidé par une machine de Turing *M* si:**

- *M* accepte *L*,
- *M* n'a pas d'exécution infinie.

➔Un langage décidé par une machine de Turing peut être calculé par une procédure effective.

Décider Vs Accepter

Pour une suite de configuration à partir d'une configuration initiale, plusieurs cas peuvent se présenter:

- Elle contient une configuration où l'état est accepteur

  → **Le mot est accepté**

- Elle se termine par une configuration pour laquelle il n'y a pas de configuration suivante, car:
  - La fonction de transition n'est pas définie pour cette transition.
  - La configuration indique un déplacement à gauche alors que la tête de lecture se trouve à la première case.

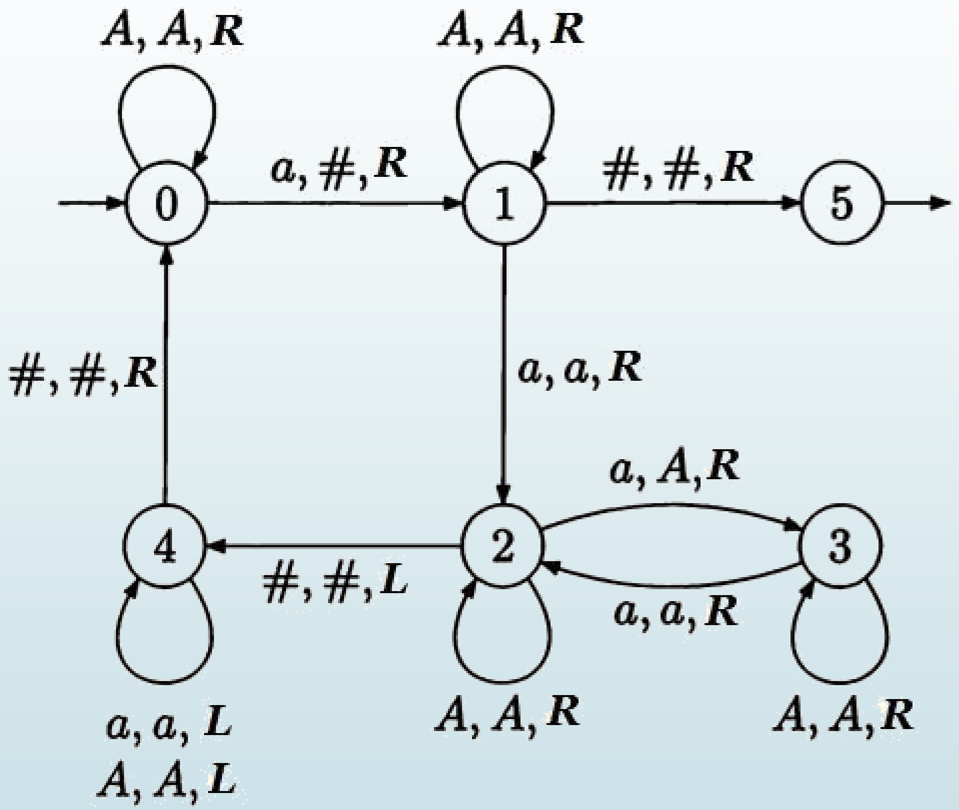
  → **Le mot est rejeté**

- Une suite infinie de configurations où il n'y a jamais un état acceptant.

  → **Pas de réponse**

Example d'éxécution d'une machine de Turing

Une fois le fonctionnement d'une machine de Turing expliqué, il pourra être constaté que cette machine accepte les mots sur l'alphabet $\sum = \{a\}$ dont la longueur est une puissance de 2. Le principe général de cette machine est de remplacer un symbole a sur 2 par A ou # par des parcours successifs de la bande. Elle accepte lorsqu'il ne reste plus qu'un seul a sur la bande.



Exemple 2

Soit la machine de Turing

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, s, B, F),$$

où :

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$,
- $\Gamma = \{a, b, X, Y, \#\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$,
- $s = q_0$,
- $B = \#$,
- $F = \{q_4\}$,
- δ est donné par le tableau ci-dessous (le symbole « $-$ » indique que la fonction de transition n'est pas définie pour ces valeurs).

Exemple 2 (suite)

	a	b	X	Y	$\#$
q_0	(q_1, X, R)	$-$	$-$	(q_3, Y, R)	$-$
q_1	(q_1, a, R)	(q_2, Y, L)	$-$	(q_1, Y, R)	$-$
q_2	(q_2, a, L)	$-$	(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$	(q_3, Y, R)	$(q_4, \#, R)$
q_4	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

On peut se convaincre que cette machine de Turing accepte le langage $a^n b^n$ pour $n > 0$. En effet, elle remplace de façon répétée une paire de symboles a et b respectivement par X et Y. Si tous les remplacements sont possibles et qu'une fois terminés le ruban ne contient plus aucun symbole a ou b, le mot est accepté. À titre d'exemple, le mot ***aaabbb.***

Exemple 2 (suite)

$a^n b^n$ $n>0$

La suite des configurations obtenues pour le mot ***aaabbb***

$(q_0, \varepsilon, aaabbb)$	$\vdots$
$(q_1, X, aabbb)$	$(q_1, XXXYY, b)$
$(q_1, Xa, abbb)$	$(q_2, XXXY, YY)$
(q_1, Xaa, bbb)	(q_2, XXX, YYY)
$(q_2, Xa, aYbb)$	$(q_2, XX, XYYY)$
$(q_2, X, aaYbb)$	(q_0, XXX, YYY)
$(q_2, \varepsilon, XaaYbb)$	$(q_3, XXXY, YY)$
$(q_0, X, aaYbb)$	$(q_3, XXXYY, Y)$
$(q_1, XX, aYbb)$	$(q_3, XXXYYY, \varepsilon)$
	$(q_4, XXXYYY\#, \varepsilon)$