الدرس 2)

Spécialité :	Module :
TS Base de données	Recherche Opérationnelle
	Semestre : 02

Thème 02:

Notions de connexité simple et forte

Objectifs :

A la fin du cours, le stagiaire doit être capable de :

- Déterminer si un graphe est non connexe, connexe ou fortement connexe
- Déterminer les composantes connexes et fortement connexes dans un graphe
- Déterminer le graphe réduit d'un graphe

Pré-requis :

- Généralités sur les graphes

Temps prévu :

06 Heures

Moyens et aides pédagogiques :

- Tableau+ polycopiées

Plan du Cours :

1. Définitions de chaine, cycle, chemin, circuit
2. Poids d'une chaine, chemin, cycle, circuit
3. Notions de connexité simple et forte
4. Graphe connexe et graphe fortement connexe
5. Composante connexe et composante fortement connexe
6. Graphe réduit

Documentation :

1. Théorie des graphes. Pages bleues
2. Support de cours Mme L. Chatouane

Remarque :

THEME 02: Notions de connexité simple et forte

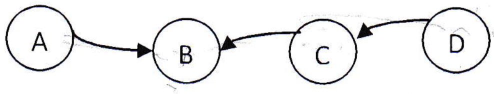
1. Définition chaine, cycle, chemin, circuit:

1.1 Chaine: soit G=(X,U) un graphe, une chaine joignant 02 sommets x_0 et x_k dans un graphe G est une suite de sommets reliés par des arêtes tels que 02 sommets successifs de la chaine ont une arête commune.

On la note : $(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k)$, on dit que x_0 et x_k sont les extrémités de la chaine.

Exemple:

Soit le graphe G suivant

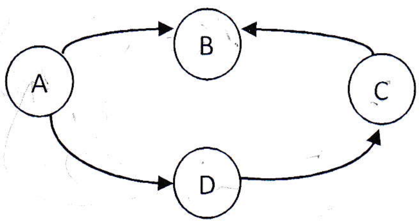


- La suite de sommets suivante (A,B,C,D) est une chaine joignant A à D
- La suite de sommets suivante (D,C,B) est une chaine joignant D à B
- La suite de sommets suivante (C,B,A) est une chaine joignant C à A

1.2 Cycle: est une chaine dont les 02 extrémités sont confondues (chaine fermée). **On le note** (x0,x1,x2 ,…,x0)

Exemple:

Soit le graphe G suivant



- La suite de sommets suivante (A,B,C,D,A) est un cycle.

Remarque :

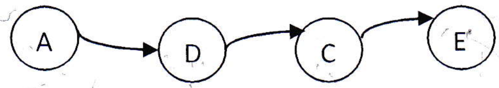
Les notions de **chaine** et de **cycle** ne respectent pas l'orientation des arcs.

1.3 Chemin: soit G=(X,U) un graphe, **un chemin** de x0 à xk dans un graphe G est une suite de sommets reliés successivement par des **arcs orientés** dans le même sens.

On le note : $(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k)$

Exemple:

Soit le graphe G suivant :

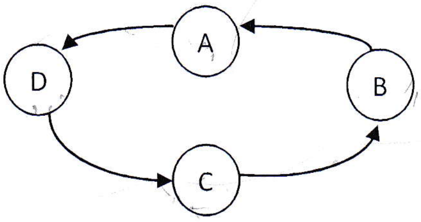


- La suite de sommets suivante (A,D,C,E) est un chemin de A à E
- La suite de sommets suivante (D,C,E) est un chemin de D à E
- Il n'existe pas de chemin de E à D
- Il n'existe pas de chemin de C à A

1.4 Le circuit: est un chemin dont les 02 extrémités sont confondues (chemin fermé). On le note (x0,x1,x2 ,…,x0)

Exemple :

Soit le graphe G suivant :

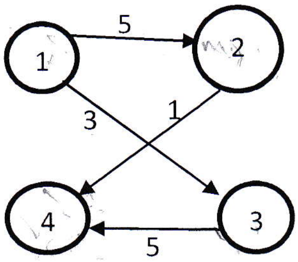


- La suite de sommets suivante (A,D,C,B,A) est un circuit.

2. Poids d'une chaine, chemin, cycle, circuit : dans un graphe valué, le poids d'une chaine (chemin, cycle ou circuit) est la somme des poids de ses arêtes (arcs)

Exemple :

Soit le graphe valué suivant :



chemin (1,2,4) : poids =5+1=6

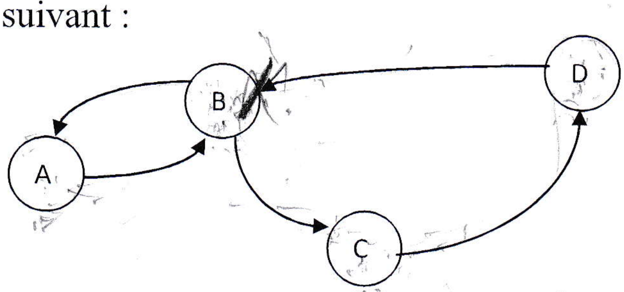
chaine (1,2,4,3) : poids = 5+1+5=11

Remarques:

- Une chaine (chemin, cycle, circuit) est dite **élémentaire** si on passe une seule fois par ses **sommets** (tous les sommets sont différents).
- Une chaine (chemin, cycle, circuit) est dite **simple** si on passe une seule fois par ses **arêtes** (arcs).
- La **longueur** d'une chaine (chemin, cycle, circuit) est le nombre de ses arêtes (arcs).

Exemple:

Soit le graphe G suivant :



- (B,C,D,B) est un **circuit élémentaire** et **simple** de longueur 3
- (A,B,C,D) est un **chemin élémentaire** et **simple** de A à D de longueur 3
- (D,C,B,A) est une **chaine élémentaire et simple** de D à A de longueur 3
- (C,B,D,C) est un **cycle élémentaire et simple** de longueur 3
- (B,A,B,C,D,B) est un **circuit non élémentaire** (passe 02 fois par B)
- (B,A,B,C,D) est un **chemin non élémentaire**
- (B, A,B,A) est un **chemin non simple** (passe 02 fois par l'arc (B,A))

3. Notions de connexité simple et forte

On définit **la connexité** par une relation entre deux sommets de la manière suivante :

x et y ont une relation de connexité ⇔ il existe une chaine entre x et y ou x=y

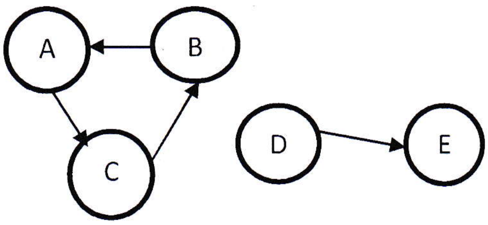
On définit la forte connexité par une relation entre deux sommets de la manière suivante :

x et y ont une relation de forte connexité ⇔ il existe un chemin entre x à y et un chemin de y à x ou x=y

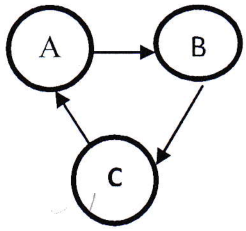
4. Graphe connexe et graphe fortement connexe :

- Un graphe est **dit connexe** si tous ses sommets ont deux à deux une **relation de connexité**.
- Un graphe est dit **fortement connexe** si tous ses sommets ont deux à deux **une relation de forte connexité**.

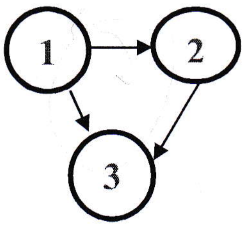
Exemples :



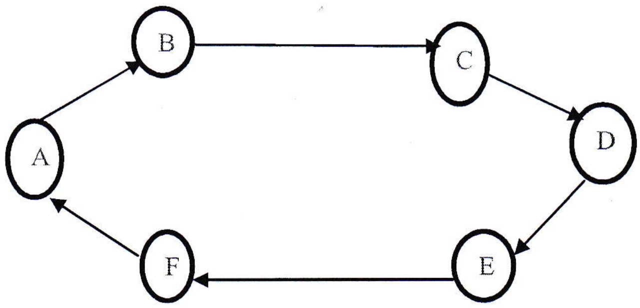
-Graphe non connexe, car il n y a pas de chaine entre B et D



-Graphe connexe et fortement connexe



- Graphe connexe car il y a une chaine entre chaque 2 sommets, mais pas fortement connexe, car il y a un chemin entre 1 et 2 mais il n'y a pas de chemin entre 2 et 1

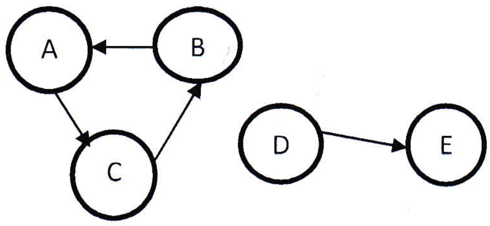


- Graphe connexe et fortement connexe

5. Composante connexe et composante fortement connexe:

- **Une composante connexe** est un sous ensemble de sommets qui ont deux à deux la relation de connexité. De plus tout sommet en dehors de la composante n'a pas de relation de connexité avec aucun des éléments de la composante.
- **Une composante fortement connexe** est un sous ensemble de sommets qui ont deux à deux la relation de forte connexité. De plus tout nœud en dehors de la composante n'a pas de relation de forte connexité avec aucun des éléments de la composante.

Exemple :



{A, B,C} est une composante fortement connexe

Et {D, E} est une composante connexe

On peut conclure que :

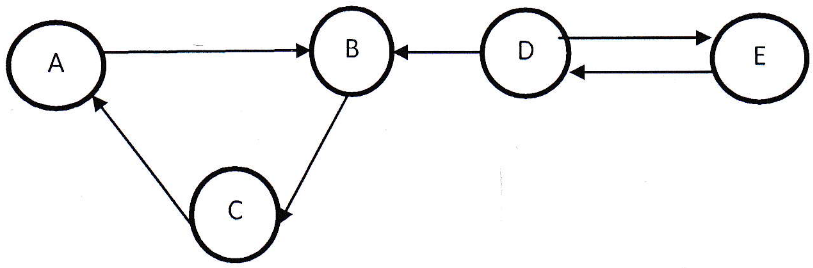
Le graphe est **connexe** s'il possède **une seule** composante connexe. Le graphe est **fortement connexe** s'il possède **une seule** composante fortement connexe.

6. Graphe réduit :

Soit un graphe G(X, U), on appelle graphe réduit du graphe G, le graphe $G_r(X_r, U_r)$:où X_r représente les composantes fortement connexes et les U_r représentent les arcs reliant les composantes fortement connexes.

Exemple :

Soit G (X, U) le graphe orienté suivant :



- Le graphe est-il fortement connexe ?
- Déterminer ses composantes fortement connexes

Ce graphe n'est pas fortement connexe, car on ne peut pas trouver de chemin de A à D par exemple.

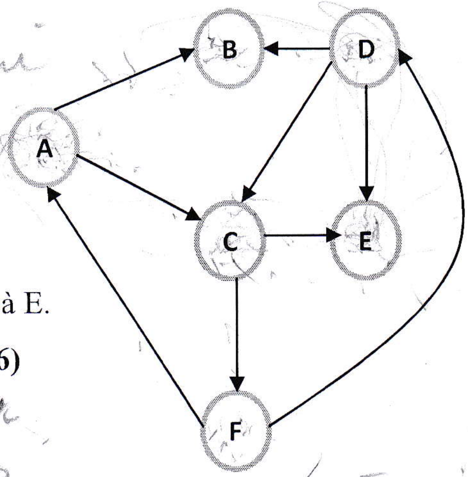
Les composantes fortement connexes : on définit deux composantes fortement connexes A' = { A, B,C} et B' ={ D, E}

Le graphe réduit du graphe G' est :

Série d'exercices N° :02

Exercice1 :

1. Complétez les phrases suivantes par (chaine, chemin, cycle, circuit)



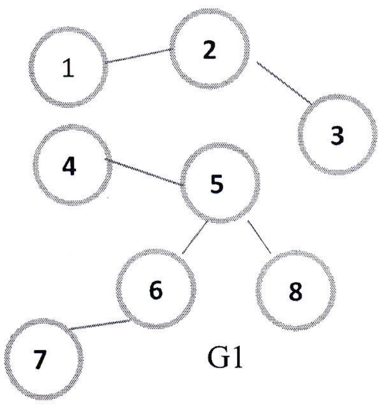
- ch1 = (A,C,E) est chemin de A à E.
- ch2 = (A,C,F,A) est ~~cycle~~ ……………d'origine A chemin
- ch3 = (A,C,F,D,C,E) est cyrcuit ……de A à E.
- ch4 = (A,B,D,E) est ~~cycle~~ …… de A à E. chemin
- ch5 = (A,B,D,C,A) est cycle …………… d'origine A
- ch6 = (A,B,D,C,F,D,E) est circuit ……………… de A à E.

2. Donnez le type et la longueur de (ch1,ch2,ch3,ch4,ch5,ch6)

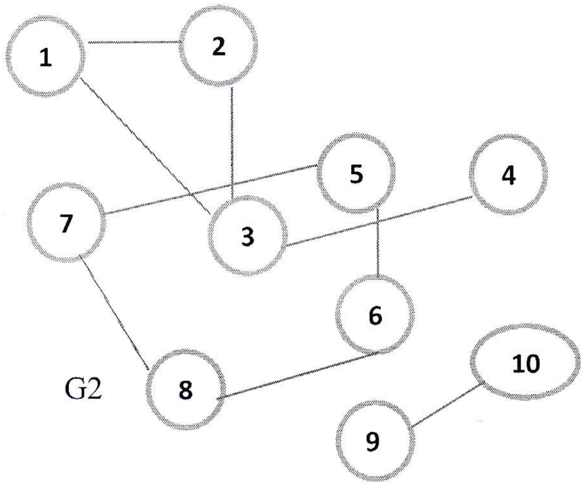
3. ch1 élémentaire et simple de longueur=… 2
4. ch2 cycle élémentaire …… de longueur=…… 3
5. ch3 circuit non élém…… de longueur=…… 5 non élémentaire
6. ch4 chemin élémentaire de longueur=…… 3
7. ch5 cycle non élémentaire…… de longueur=……
8. ch6 ………………………………………… de longueur=……..

Exercice2 :

1- Nous considérons les graphes suivants, pour chacun dites s'il est connexe, sinon donnez leurs composantes connexes :



G1



G2

G1 est ………………………………………………

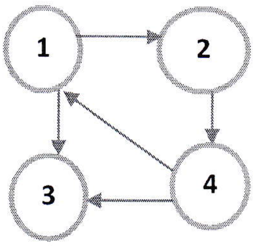
……………………………………………………………

G2 est………………………………………………

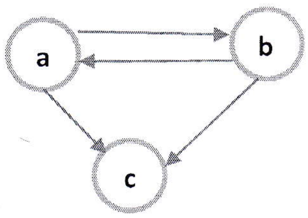
……………………………………………………………

Exercice 03 :

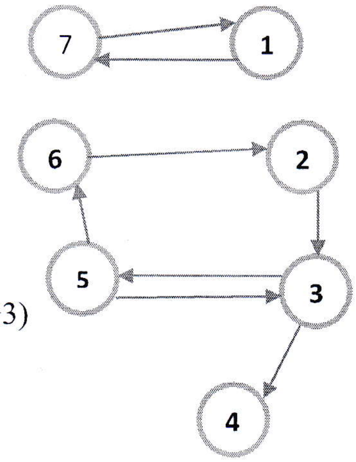
Pour chacun de ces graphes dites s'il est fortement connexe, sinon donnez leurs composantes fortement connexes et leurs graphes réduits :



(G1)



(G2)



(G3)