بسم الله الرحمن الرحيم

اهلا وسهلا بكم

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية

جامعة محمد خيضر- بسكرة-

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية

أ.د/ خليفي عيسى

امثلة وتمارين حول نظرية المنفعة القياسية 1

- مثال01: لتكن لدينا دالة المنفعة الكلية من الشكل:

$$UT = 2X^{\frac{1}{3}} Y^{\frac{2}{3}}$$

المطلوب: اوجد المنفعة الحدية Umx.

✓ الحل: لنا:

$$UM_X = \frac{\delta UT}{\delta X} = \frac{\delta(2X^{\frac{1}{3}}.Y^{\frac{2}{3}})}{\delta X}$$

$$UM_X = \frac{2}{3}X^{\frac{-2}{3}} \times Y^{\frac{2}{3}}$$

امثلة وتمارين حول نظرية المنفعة القياسية 2

❑ **مثال02: بناء على الجدول التالى:**

الكميات المستعملة X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
المنفعة الكلية UT	0	4	14	20	24	26	26	24	21	17

المطلوب:

- أوجد المنفعة الحدية Umx .
- أرسم بيانيا منحنى المنفعة الكلية . ومنحنى المنفعة الحدية مع تحديد نقطة الإشباع العظمى (نقطة التشبع).

امثلة وتمارين حول نظرية المنفعة القياسية 3

$$UM_X = \frac{\Delta UT}{\Delta X} = \frac{UT_{(n+1)} - UT_{(x)}}{X_{(n+1)} - X_{(n)}}$$

- حل التمرين: 1- إيجاد المنفعة الحدية UMx :

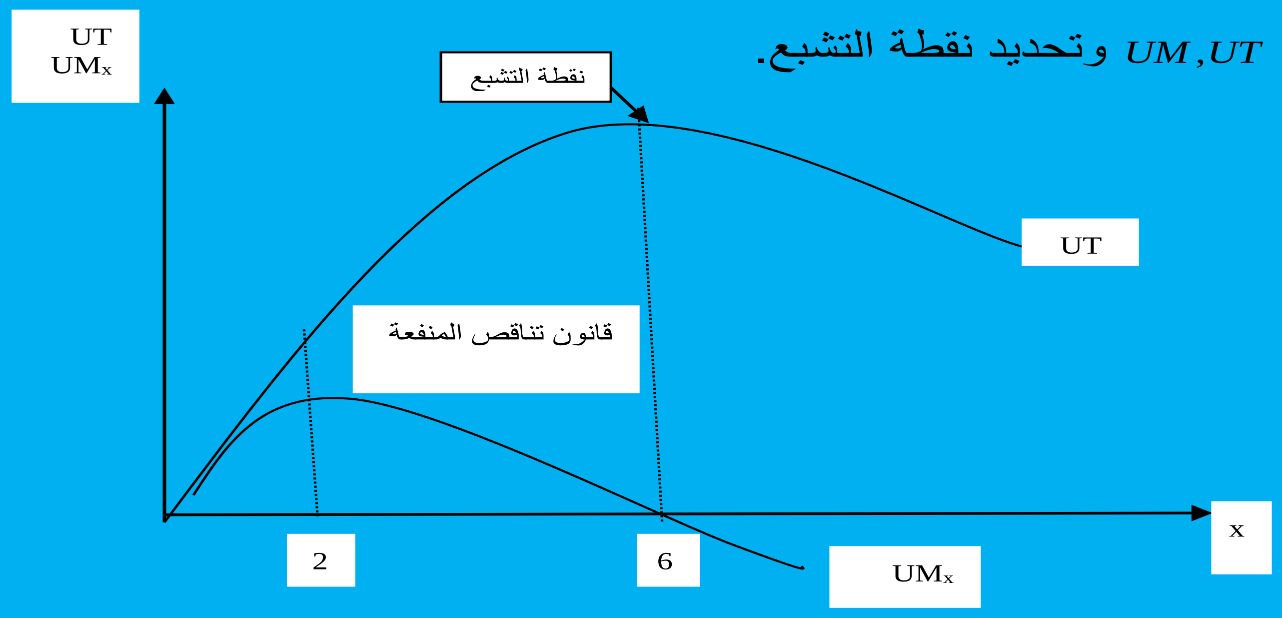
الكميات المستعملة X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
المنفعة الكلية UT	0	4	14	20	24	26	26	24	21	17
المنفعة الحدية UM	-	4	10	6	4	2	0	-2	-3	-4

✓ نتيجة: يصل الى أعظم قيمة له، أي نقطة اعظم اشباع (نقطة التشبع) عند: x=6.

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 4

التمثيل البياني للمنفعة الكلية و المنفعة الحدية:

- رسم منحنى UM, UT وتحديد نقطة التشبع.



امثلة وتمارين حول نظرية المنفعة القياسية 5

مثال03: إذا كانت دالة المنفعة الكلية لأحد المستهلكين معطاة كالآتي:

$$UT = 2X^2 - X$$

المطلوب:

- أوجد المنفعة الحدية لهذه السلعة X.
- أوجد المنفعة الحدية والكلية إذا كان : X=5.

✓ **الحل:** - أيجاد المنفعة الحدية لهذه السلعة X:

$$UM_x = \frac{\delta UT}{\delta X} = \frac{\delta(2X^2 - X)}{\delta X}$$

Umx= 4 X-1

- إيجاد قيمة المنفعة الحدية والكلية لما:X=5

$$UT = 2(5)^2 - 5 = 45 \Rightarrow UT = 45$$

$$UM_x = 4(5) - 1 = 19 \Rightarrow UM_x = 19$$

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 6

مثال04: إذا كانت دالة المنفعة الكلية لأحد المستهلكين معطاة كالآتي:

$$UT = 2X^2 - X$$

المطلوب:

- أوجد المنفعة الحدية لهذه السلعة X.
- أوجد المنفعة الحدية والكلية إذا كان : X=5.

الحل: - أيجاد المنفعة الحدية لهذه السلعة X:

$$UM_x = \frac{\delta UT}{\delta X} = \frac{\delta(2X^2 - X)}{\delta X}$$

Umx= 4 X-1

- إيجاد قيمة المنفعة الحدية والكلية لما: X=5

$$UT = 2(5)^2 - 5 = 45 \rightarrow UT = 45$$

$$UM_x = 4(5) - 1 = 19 \rightarrow UM_x = 19$$

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 7

- **مثال03**: لدينا دالة المنفعة الكلية معطاة بالشكل التالي:

$$UT = 2X^2\ Y$$

المطلوب:

- أوجد المنفعة الحدية للسلعة X و Y.
- أوجد المنفعة الحدية والكلية إذا كان : Y=3 , X=4.

✓ **الحل:** - أيجاد المنفعة الحدية لهذه السلعة X:

$$UM_X = 4X \times Y$$

$$UM_Y = 2X^2$$

- إيجاد قيمة المنفعة الحدية والكلية لما: X=4, Y=3:

$$UM_x = 4(4) \times 3 = 48$$

→ **UMX=48**

8 امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية

- إيجاد قيمة المنفعة الحدية والكلية لما: X=4, Y=3:

$UM_y = 2(4)^2 = 32$ → **UMY=32**

$UT_{(x,y)} = 2(4)\times(3) = 96$ → **UT=96**

امثلة وتمارين حول نظرية المنفعة القياسية 9

مثال05: بافتراض ان احد المستهلكين قدر منفعته الحدية المكتسبة من استهلاك 10 وحدات من سلعة X كما يلي:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
UM_X	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

و أن سعر السلعة X ثابت مقداره 4 وحدات نقدية، اما المنفعة الحدية للنقود فتقدر بـ 2 وحدات.

المطلوب:

1- تحديد وضع توازن المستهلك.

2- ما هو فائض المستهلك عند وضع التوازن.

امثلة وتمارين حول نظرية المنفعة القياسية 10

حل التمرين: 1- حساب المنفعة الحدية المضحى بها:

$$UM_{\text{المضحىبها}} = P_x.\lambda = 2\times4 = 8$$

$$UM_x = \frac{UT_{(n+1)} - UT_{(n)}}{X_{(n+1)} - X_{(n)}} \Leftrightarrow UT_{n+1} = UM_x + UT_n$$

المنفعة الكلية الصافية(فائض المستهلك)= المنفعة الكلية المكتسبة- المنفعة الكلية المضحى بها.

11 امثلة وتمارين حول نظرية المنفعة القياسية

X	UM_x المكتسبة	UM_x المضحى بها	UT المكتسبة	UT المضحى بها	UT فائض المستهلك
1	10	08	10	08	02
2	09	08	19	16	03
3	08	08	27	24	03
4	07	08	34	32	02
5	06	08	40	40	00
6	05	08	45	48	3-
7	04	08	49	56	7-
8	03	08	52	64	12-
9	02	08	54	72	18-
10	01	08	55	80	25-

وذلك عندما يستهلك 3 وحدات من السلعة X.

من خلال الجدول يتضح أن نقطة توازن المستهلك تكون عندما:

$$UM_{\text{المضحى بها}} = UM_{\text{المكتسبة}} = 8$$

وذلك عندما يستهلك 3 وحدات من السلعة X.

امثلة وتمارين حول نظرية المنفعة القياسية 12

مثــال06: ليكن لدينا الجدول التالي:

X / Y	1	2	3	4	5	6	7	8
UM_x	16	14	12	10	08	06	04	02
UM_y	11	10	09	08	07	06	05	04

- فإذا كان: Px=2u.m ، Py=1u.m ، وكان دخل الفرد:R=12 u.m.

المطلوب:- ماهي الكميات التي يجب أن يشتريها هذا المستهلك من السلعتين y.xحتى يحقق اكبر منفعة ممكنة.

- ثم تحقق من ذلك باستعمال شرط التوازن.

امثلة وتمارين حول نظرية المنفعة القياسية 13

حل التمرين:

$R = P_x.x + Py.y.$ $\Leftrightarrow$ R=2 X + Y

$$\frac{UMX}{PX} = \frac{UMY}{PY} \Leftrightarrow \frac{12}{2} = \frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{UMX}{PX} = \frac{UMY}{PY} = 6$$

- بالتعويض في معادلة الدخل نجد:

$$\Leftrightarrow R = 2(3) + 6 = 12$$

14 امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية

X / Y	1	2	3	4	5	6	7	8
UMx	16	14	12	10	08	06	04	02
UMy	11	10	09	08	07	06	05	04
$\frac{UMX}{PX}$	08	07	**06**	05	04	03	02	01
$\frac{UMY}{PY}$	11	10	09	08	07	**06**	05	04

- و منه الكميات التي يجب أن يشتريها هذا المستهلك من السلعتين حتى يحقق اكبر منفعة ممكنة هي التوليفة السلعية: $(x, y) = (3, 6)$

15 امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية

- **مثال07:** إذا كان لدينا دالة المنفعة: $UT = X \times Y$

و لنا: $Px=4$ u.m، $Py=10$ u.m .

المطلوب: - إيجاد كمية كل من (x, y) التي تحقق أقصى إشباع ممكن لهذا المستهلك مع العلم أن الدخل: $R=400$ u,m .

✓ **حل التمرين:** - إيجاد كمية كل من (x, y):

نستخدم طريقة شرط التوازن:

$$\frac{UM_X}{P_X} = \frac{UM_Y}{P_Y} \longrightarrow 1$$

$$R = P_x.x + Py.y. \longrightarrow 2$$

16 امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية

- لدينا:

$$400 = 4X + 10Y$$ $$UM = X \times Y$$

$$\frac{UM_x}{P_X} = \frac{UM_X}{P_y} \Leftrightarrow \frac{Y}{4} = \frac{x}{10} \Rightarrow \Leftrightarrow 4X = 10Y \Leftrightarrow X = \frac{10}{4}Y \quad X = \frac{5Y}{2} \longrightarrow 1$$

- نعوض قيمة X في معادلة الدخل نجد:

$$400 = 4(\frac{5}{2}y) + 10y$$

$$\Leftrightarrow 400 = 10Y + 10y \Leftrightarrow 400 = 20Y \Rightarrow \Leftrightarrow Y = \frac{400}{20} = 20 \Rightarrow \Leftrightarrow Y = 20$$

- نعوض قيمة Y في المعادلة (1) نجد:

$$X = \frac{5}{2}(20) = \frac{100}{2} = 50 \Rightarrow X = 50$$

- وعليه التوليفة التي تحقق توازن المستهلك هي: $(X,Y) = (50,20)$

17 امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية

❑ توازن المستهلك؟

❖ إيجاد توازن المستهلك في حالة سلعة واحدة:

شرطا توازن المستهلك في حالة سلعة واحدة :

① المنفعة الحدية المكتسبة= المنفعة الحدية المضحى بها.

② يحصل الفرد على أقصى فائض منفعة (و ليس على أقصى منفعة).

$$UM_{\text{المضحى بها}} = P_x . \lambda$$

المنفعة الحدية المضحى بها= سعر الوحدة من السلعة × المنفعة الحدية للنقود.

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 18

مثال08: لتكن دالة المنفعة الكلية للمستهلك:

$$UT = 2X + 4Y + X \times Y + 8$$

اذا علمت ان: R=50 um, Py=10 um, Px=5 um .

المطلوب: أحسب الكميات التي يجب شراؤها من السلعتين (x, y) لتعظيم منفعة هذا المستهلك.

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 19

✓ **حل التمرين:** لنا:

$$50 = 5X + 10Y \qquad UT = 2X + 4Y + XY + 8$$

حل التمرين بطريقة لاغرانج:(حلة تعظيم المنفعة)

- وضع دالة الهدف لهذا المستهلك :

$$L = 2X + 4Y + X \times Y + 8 + \lambda(50 - 5X - 10Y).$$

- وضع نموذج الحل :

$$L'_X = 2 + y - 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2+Y}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow 1$$

$$L'_Y = 4 + X - 10\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4+X}{10} \ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow 2$$

$$L'_\lambda = 50 - 5X - 10Y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow 3$$

- وضع نموذج الحل :

من العلاقة 1 و 2 نجد :

$$\frac{2+Y}{5} = \frac{4+X}{10} \Leftrightarrow 5(4+X) = 10(2+Y)$$

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية

$20+5X=20+10Y \Rightarrow \Leftrightarrow 5X=10Y \Leftrightarrow X=\frac{10}{5}Y$

$\Leftrightarrow X=2Y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow *$

- بتعويض العلاقة * في العلاقة 3 نجد :

$50-5(2Y)-10Y=0 \Rightarrow \Leftrightarrow 50-10Y-10Y=0 \Leftrightarrow 50-20Y=0$

$\Leftrightarrow 50=20Y \Leftrightarrow Y=\frac{50}{20}=\frac{5}{2} \Rightarrow \Leftrightarrow Y=\frac{5}{2}$

- بتعويض قيمة في العلاقة * نجد:

$X=2\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{10}{2}=5 \Rightarrow X=5 \Rightarrow$

$donc : (X,Y)=(5,\frac{5}{2})$

$donc : (X,Y)=(5,2.5)$

➢ الشرط الكافي: $H>0$ المصفوفة الهيسية

$$H=\begin{vmatrix} L''_{XX} & L''_{XY} & L''_{X\lambda} \\ L''_{YX} & L''_{YY} & L''_{Y\lambda} \\ L''_{\lambda X} & L''_{\lambda Y} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow H=L''_{XX}\begin{vmatrix} L''_{YY} & L''_{Y\lambda} \\ L''_{\lambda Y} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} - L''_{XY}\begin{vmatrix} L''_{YX} & L''_{Y\lambda} \\ L''_{\lambda X} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} + L''_{X\lambda}\begin{vmatrix} L''_{YX} & L''_{YY} \\ L''_{\lambda X} & L''_{\lambda Y} \end{vmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow H=2(L''_{YX})\times(L''_{X\lambda})\times(L''_{Y\lambda})-(L''_{Y\lambda})^2\times(L''_{XX})-(L''_{X\lambda})^2\times(L''_{YY})>0$$

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 21

- لنطبق الشرط الكافي في المثال السابق:

$$H = \begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{1} & \overset{+}{-5} \\ 1 & 0 & -10 \\ -5 & -10 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow H = (0)\times\begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -10 & 0 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & -10 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow H = 0\times(-1)(0-(5)(-10)) + (-5)((-10)-0) = 50+50 = 100$$

إذن: الشرط الكافي محقق. $\Leftrightarrow H = 100 > 0$

- طريقة ثانية لحل المصفوفة الهيسية:

$$H = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -10 & 1 & 0 \\ -5 & -10 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right|$$

- - - + + +

$$\Leftrightarrow H = 0\times(0)(0) + (1)(-10)(-5) + (-5)(1)(-10) - (1)(1)(0) - (0)(-10)(-10) - (-5)(0)(-5)$$

$$\Leftrightarrow H = 0+50+50-0-0-0 = 50+50 = 100$$

إذن: الشرط الكافي محقق. $\Leftrightarrow H = 100 > 0$

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 22

- **مثال 08:** لتكن لدينا دالة المنفعة الكلية لأحد المستهلكين كما يلي: $UT = 4\,X^2Y^2$

المطلوب: إذا كانت أسعار السوق Py, Px معلومة و كذلك الدخل الاستهلاكي R:

1- أوجد دوال الطلب على السلعتين Xو Y؟.

2- ادرس دوال الطلب.

3- إذا كان قيمة المنفعة هي: Uo=16، و سعر السلعتين هو:PY=2, Px=4 . أوجد التوليفة الاستهلاكية المثلى و حدد قيمة الدخل؟.

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 23

❑ الحــل: إيجاد دوال الطلب على السلعتين x و y :

لدينا دالة المنفعة الكلية: $UT = 4\,X^2Y^2$

✓ معادلة الدخل من الشكل:

$$R = P_X \times X + P_Y \times Y$$

$$\frac{UM_X}{UM_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \Leftrightarrow \frac{8XY^2}{8X^2Y} = \frac{P_X}{P_Y} \Leftrightarrow YP_Y = XP_X$$

$$Y = \frac{P_X}{P_Y}X$$

✓ بتعويض قيمة Y في معادلة الدخل نجد:

$$R = XP_X + \left(\frac{XP_X}{P_Y}\right)P_Y$$

$$R = XP_X + XP_X \Leftrightarrow R = 2XP_X$$

$$X = \frac{R}{2P_X}$$

دالة الطلب على X:

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 24

$$Y = \frac{P_X}{P_Y}\left(\frac{R}{2P_X}\right)$$
$$Y = \frac{R}{2P_Y}$$

$$y = \frac{R}{2P_Y}$$

- **دالة الطلب على السلعةy:**

❖ **دراسة دوال الطلب على السلعتين:**

– هناك علاقة عكسية بين X و PX و Y و PY .

– هناك علاقة طردية بين X و R و Y و R .

– العلاقة عكسية بين X و PX و Y و PY .و الطردية بين X و R و Y و x.R و y سلع عادية.

– العلاقة بين السلعتين x أو y لا توجد علاقة(x و y مستقلتان).

25 امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية

✓ إيجاد قيم X و Y: لنا:

$$16 = 4(X^2Y^2)$$
$$R = 4x + 2y$$

الحل بطريقة لاغرانج:(حلة تقليل الدخل

- وضع دالة الهدف لهذا المستهلك :

$$V = MinR + \lambda(U_0 - UT)$$
$$V = 4x + 2y + \lambda(16 - 4X^2Y^2)$$

- وضع نموذج الحل :

$$V''_X = 4 - 8XY^2\lambda = 0 \ldots\ldots\ldots \to 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{8X\ Y^2}.$$
$$V''_Y = 2 - 8X^2Y\lambda = 0 \ldots\ldots\ldots \to 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{8X^2Y}.$$

$$V''_\lambda = 16 - 4X^2Y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots \to 3$$

$$\frac{4}{8XY^2} = \frac{2}{8X^2Y} \Leftrightarrow 2Y = 4X$$
$$y = 2X$$

أمثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 26

بتعويض قيمة yفي المعادلة(3) نجد:

$$16 = 4X^2(2X)^2$$
$$16 = 16X^4$$
$$X^4 = 1$$
$$X_0 = 1$$

$$Y = 2(1) \Leftrightarrow Y = 2$$
$$Y_0 = 2$$

✓ و منه التوليفة المثلى للمستهلك هي:(Xo,Yo)=(1,2).

تحديد قيمة الدخل: R= 4 X +2 Y= 4(1) + 2(2) =8

R= 8

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 22

مثال 09: لتكن لدينا دالة المنفعة الكلية لأحد المستهلكين كما يلي: $UT = Y(X+1)$

المطلوب: - إذا كان قيمة المنفعة هي: Uo=64، و سعر السلعتين هو: PY=40 um, Px=10 um .
حدد قيم X و Y التي يكون الدخل أقل ما يمكن (حدد قيمة R)؟ تأكد باستعمال الشرط الكافي.

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 25

✓ **الحل : إيجاد قيم Xو Y: لنا:**

$$UT = Y(X+1)$$

$$\Leftrightarrow R = 10X + 40Y$$

الحل بطريقة لاغرانج:(حلة تقليل الدخل)

➢ وضع دالة الهدف لهذا المستهلك :

$$V = MinR + \lambda(U_0 - UT) \Rightarrow \Leftrightarrow V = (10X + 40Y) + \lambda(64 - Y(X+1))$$

➢ وضع نموذج الحل :

$$V''_X = 10 - Y\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{10}{Y} \dots\dots\dots\dots \to 1$$

$$V''_Y = 40 - (X+1)\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{40}{(X+1)} \dots\dots \to 2$$

$$V''_\lambda = 64 - Y(X+1) = 0 \dots\dots\dots\dots \to 3$$

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 26

- حل النموذج: من 1 و 2 نجد:

$$\frac{10}{Y}=\frac{40}{(X+1)} \Leftrightarrow 40Y=10(X+1) \Leftrightarrow Y=\frac{10(X+1)}{40}$$

$$\Leftrightarrow Y=\frac{(X+1)}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow *$$

بتعويض قيمة y في المعادلة(3) نجد:

$$64-\left(\frac{(X+1)}{4}\right)(X+1)=0$$

$$\Leftrightarrow 64=\frac{(X+1)^2}{4} \Leftrightarrow 256=(X+1)^2$$

$$X=15$$

وبتعويض قيمة في العلاقة * نجد:

$$Y=\frac{(15+1)}{4}=\frac{16}{4}=4$$

التوليفة المثلى للمستهلك هي:

$$donc:(X,Y)=(15,4)$$

قيمة مضاعف لاغرانج هي:

$$\lambda=\frac{40}{16}=\frac{10}{4}=2.5$$

- تحديد قيمة الدخل:

$$R=10(15)+40(4)=150+160=310$$

$$R=310$$

امثلة و تمارين حول نظرية المنفعة القياسية 27

الشرط الكافي:

$$H=\begin{vmatrix} V''_{XX} & V''_{XY} & V''_{X\lambda} \\ V''_{YX} & V''_{YY} & V''_{Y\lambda} \\ V''_{\lambda X} & V''_{\lambda Y} & V''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} < 0 \Longleftrightarrow H=\begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{-\lambda} & \overset{+}{-Y} \\ -\lambda & 0 & -X-1 \\ -Y & -X-1 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow H=(0)\begin{vmatrix} 0 & -X-1 \\ -X-1 & 0 \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} -\lambda & -X-1 \\ -Y & 0 \end{vmatrix} + (-Y)\begin{vmatrix} -\lambda & -0 \\ -Y & -X-1 \end{vmatrix} < 0 \Longleftrightarrow \Leftrightarrow H = 0-\lambda(-(-Y)(-X-1)) + (-Y)(-(-\lambda)(-X-1)) < 0$$

$$\Leftrightarrow H = -\lambda Y(X+1) - Y\lambda(X+1) \Longleftrightarrow H = -2\lambda Y(X+1) = -2(2.5)(4)(16) = -320 < 0$$

✓ إذن الشرط الكافي محقق.