السلسلة 1 (تذكير رياضي - فيزيائي)
ومعادلات لاقرانج

تمرين 1: بين أن العبارتين التاليتين متكافئتين

$$a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)$$

$$c\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

أوجد العلاقة بين الثوابت ؟

تمرين2: - المعادلات التفاضلية: أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية؟ إذا علمت أن الشرطين الإبتدائيين هما كما يلي: $x(0)=4, \dot{x}(0)=0$

1- معادلة تفاضلية تعبر عن إهتزازات حرة غير متخامدة

$$\ddot{x}+4x=0$$

2- معادلة تفاضلية تعبر عن إهتزازات حرة متخامدة

$$\ddot{x}+4\dot{x}+5x=0$$

3- معادلة تفاضلية تعبر عن إهتزازات قسرية (خاضعة لقوة إثارة خارجية)

$$\ddot{x}+4\dot{x}+5x=3\cos(2t)$$

4- معادلة تفاضلية تعبر عن إهتزازات قسرية (خاضعة لقوة إثارة خارجية)

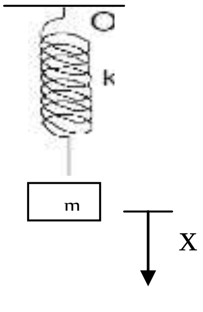
حالة الرنين (résonance) $\ddot{x}+4x=3\cos(2t)$

تمرين 3:

نعلق كتلة m بنابض ثابت مرونته k , تسحب عن وضع توازنها بمقدار x_0 وتترك حرة , أحسب سرعة الكتلة عند الوضع الذي

تكون فيه إستطالة النابض $x_0/2$ ((إبتداءا من وضع التوازن))

وذلك بإستعمال طريقة الطاقة المدروسة في السنوات السابقة؟

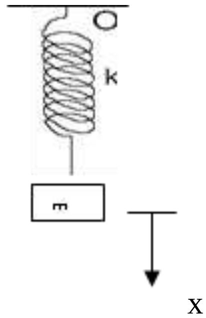


تمرين 4:

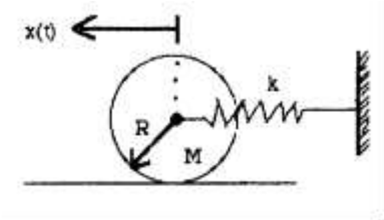
أوجد معادلة لاقرانج "Lagrange" (فقط) للأشكال التالية:

بعد كتابة كل من عبارتي ***طاقتها الحركية والكامنة***

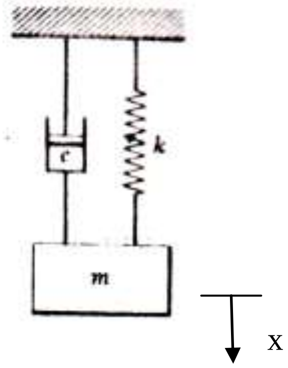
ملاحظة: الأشكال 1, 3 و 5 نستعمل عبارة الطاقة الكامنة المختصرة لها (حذف الطاقة الكامنة الثقالية للكتل التي تسبب أستطالة ابتدائية للنوابض (عند التوازن) مع حذف الاستطالات الابتدائية الموافقة لها, من عبارة الطاقة الكامنة الكلية)



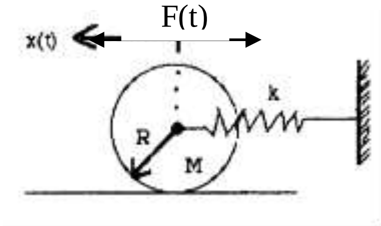
شكل 1



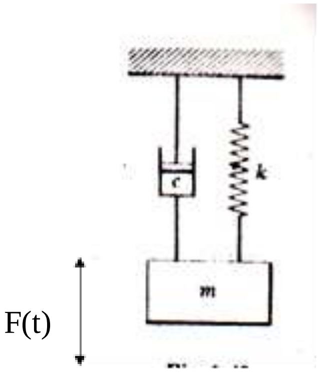
شكل2



شكل3



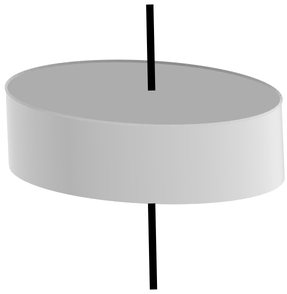
شكل4



شكل5

تمرين 5

أوجد عزم عطالة قرص متجانس كتلته m ونصف قطره R بالنسبة لمحور عمودي على وجهيه ويمر من مركزه؟



سليماني م.

مختصر الحلول لبعض التمارين:

تمرين 2-1

$x^2 + 4 = 0$

$r^2 + 4 = 0$

$\Delta \prec 0 \rightarrow r_{1,2} = 0 \pm 2i$

$x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$

بتطبيق الشرطين الإبتدائيين نجد $c_1 = 4................c_2 = 0$

الحل: $x(t) = 4\cos 2t$

تمرين 2-4

$\ddot{x} + 4x = 3\cos(2t)$

الحل الكلي = مجوع الحلين الحل العام(حل المعادلة المتجانسة) + الحل الخاص (يتعلق بالطرف الثاني)

$x(t) = x_G + x_P$

$x(t)_G = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$

نلاحظ ان $0 \pm 2i$ جذر للمعادلة المميزة اذن نختار x_P من شكل الطرف 2 مضروبا في t كما يلي

$x(t)_P = t(a\cos 2t + b\sin 2t).........ou.....x(t)_P = Ate^{i(2t+\varphi)}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد ثوابت x_P

نجد $x(t)_P = \frac{1}{2} t\sin(2t)$

والحل الكلي $x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + \frac{1}{2} t\sin 2t$

بالتعيض في الشرطين الإبتدائيين **(بإستعمال الحل الكلي)** نجد ثوابت الحل العام x_G

ملاحظة : لإيجاد ثوابت الحل العام x_G للمعادلات التفاضلية غير المتجانسة , يجب التعويض في الشرطين الإبتدائيين بإستعمال الحل الكلي $x(t) = x_G + x_P$ **وليس** الحل العام x_G الموافق للمعادلة المتجانسة

تمرين 4 شكل4

$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2$

$E_p = E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2......E_{pp} = Cte$

$D = 0$

$Q_q = F_{q,ext} = \vec{F}\frac{\delta\vec{r}}{\delta q} = \vec{F}\frac{\delta\vec{r}}{\delta\theta} = F\frac{\delta r}{\delta\theta} = FR$

نلاحظ هنا ان القوة المعممة هي عزم القوة

بكتابة معادلة لاغرانج نجد $\ddot{\theta} + \frac{2k}{3m}\theta = \frac{2}{3mR}F(t)$