République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

COURS d'Analyse 03

Support de Cours

A l'usage des Étudiants de

$2^{ème}$année Licence en Mathématiques

Réalisé Par:

ABDELHAK GHOUL

et

Baya.laadjal

Année Universitaire

2023/2024

Contents

List of Figures

Avant-propos

Le polycopié est un cours détaillé sur le programme officiel du module d'Analyse 3, qui est le fruit de l'enseignement de cette matière que j'ai eu à assumer à l'Université de Biskra. Il s'adresse principalement aux étudiants en deuxième année licence mathématiques dans le cadre du système $\mathcal{L}.\mathcal{M}.\mathcal{D}$, mais peut éventuellement être utile pour les étudiants en deuxième année licence mathématiques appliquées, sciences techniques, informatique, et les étudiants qui sont en deuxième année au écoles préparatoires.

Le contenu de cette matière traite une partie importante de l'analyse mathématique et donne aux étudiants les connaissances nécessaires concernant les différentes types de convergence des séries et des intégrales impropres. Elle est considérée comme une extension directe des deux matières Analyse 1 et Analyse 2 vues en première année $\mathcal{MI}$.

Ce cours comporte six chapitres où chaque chapitre se termine par une sélection d'exercices types avec corrigés, rédigés de manière progressive et détaillée pour permettre aux étudiants de comprendre les notions mathématiques introduites et de contrôler l'assimilation correcte des points essentiels. On introduit dans le premier chapitre, le concept de série numérique, qui permet l'étude du phénomène de sommation infini discrète. L'objectif de ce chapitre est de savoir étudier la nature d'une série numérique, et effectuer un calcul de somme. On présente dans le deuxième chapitre, les notions de convergence simple et uniforme des suites et séries de fonctions. Le chapitre qui suit est consacré à l'étude des série entières, et a comme objectif, calculer un rayon de convergence, établir un développement en série entière des fonctions usuelles et chercher la somme de séries numériques et les solutions de quelques équations différentielles ordinaires. Le chapitre 4 est sur la théorie des séries de Fourier, on commence par donner la notion de séries trigonométriques, puis les séries de Fourier des fonctions paires ou impaires dans divers formes d'intervalles ainsi que les règles de convergences, la formule de Parseval. Les chapitres 5 et 6 sont consacrés aux intégrales impropres et les fonctions définies par une intégrale.

Ce polycopié, et comme tout produit scientifique, n'est pas exempte de lacunes, et j'espére qu'il contribuera au développement du travail pédagogique et de la recherche scientifique.

Enfin, je ne serais pas terminer cet avant-propos sans passer un grand remerciement à mes collègues enseignants ayant expertisé sérieusement ce cours.

Chapter 1

Séries numériques

Le procédé qui consiste à additionner infiniment de quantités différentes à partir d'une quantité initiale apparait dans plusieurs disciplines : physique, informatique, statistique, finances . . . etc.

L'idée de base d'une telle sommation infinie discrète donnant une valeur finie a été considérée paradoxale pour les mathématiciens pendants plusieurs siècles, jusqu'à l'introduction de l'idée de limite et la tentative de donner à celle-ci une définition rigoureuse. Depuis les séries infinies n'ont cessé d'attirer l'attention des mathématiciens et ont pu achever un grand développement.

Objectifs du chapitre

- Savoir étudier la nature d'une série numérique.

- Effectuer un calcul de somme.

1.1 Définitions et propriétés

Definition 1.1.1 *Soit une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $u_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'expression*

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n + ...$$

s'appelle série numérique de terme général u_n.

Soit une suite (S_n) tel que :

$$\begin{cases} S_0 = u_0, \\ S_1 = u_0 + u_1, \\ . \\ . \\ S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_{k.} \end{cases}$$

- *Le couple des suites (u_n, S_n) s'appelle série numérique et se désigne par $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$.*
- *Le terme u_n s'appelle le terme général de la série $\sum u_n$ et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la suite de la somme partielle d'ordre n de cette série.*

Definition 1.1.2 (convergence) *Une série numérique $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente si la suite de la somme partielle $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.*
Dans ce cas la limite S de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée somme de la série et on écrit:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S \in \mathbb{R}.$$

Une série numérique $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Exemple 1.1.1 *Etudions la nature de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$. On a*

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)},$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}.$$

Alors: la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est convergente.

Proposition 1.1.1 (Cas complexe) *Si le terme général est complexe $u_n = a_n + ib_n$, alors on a le résultat suivant:*

$$\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente } \iff \left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \left(\sum b_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes.}$$

Remark 1.1.1 *On peut définir des séries dont le terme général (u_n) n'est définit qu'à partir d'un rang n_0, on pose alors:*

$$S_n = u_{n_0} + ... + u_n$$

Exemple 1.1.2 *Soit la série numérique $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 3}$ où*

$$u_n = \frac{1}{n^3 - 3n^2 + 2n} = \frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)}.$$

Remark 1.1.2 *Soit $p \in \mathbb{N}$. Les séries $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\sum u_n\right)_{n\geq p}$ sont de même nature et en cas de convergence, elles n'ont pas nécessairement la même somme.*

Proof. Pour N entier $\geq p$, on a

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k = u_{n_0} + ...u_p + ... + u_N = \sum_{k=0}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{N} u_k.$$

et $S_p \in \mathbb{R}$, alors par suite les séries $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\sum u_n\right)_{n\geq p}$ ont la même nature si elles convergent. ■

Proposition 1.1.2 *Si la série numérique $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 0}$ converge et de somme S, alors la suite R_n converge vers zéro telle que $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$,où R_n est le rested'ordre n de la série .*

Proposition 1.1.3 (Condition nécessaire de convergence) *Si la série numérique $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 0}$ est convergente, alors son terme général u_n tend vers zéro quand $n \to +\infty$. Donc si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors la série diverge.*

Proof. On a

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n,$$

d'où

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Si on suppose $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 0}$ est convergente alors la suite de la somme partielle est convergente, et par suite

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

■

Exemple 1.1.3 *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2n+1}$ *est divergente d'après la proposition 1.1.3, puisque:*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Remark 1.1.3 *cette condition est nécessaire mais pas suffisante c-à-d, on peut trouver des séries divergentes dont les termes généraux tendent vers zéro à l'infinie.*

Exemple 1.1.4 *Soit la série numérique* $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$. *On a*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = 0,$$

mais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) - \ln(k+1) = \ln(n+2).$$

Alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+2) = +\infty.$$

Donc la série diverge.

Proposition 1.1.4 (Série géométrique) *Soit* $q \in \mathbb{R}$. *La série géométrique* $\sum q^n$ *converge si* $|q| < 1$ *et diverge si* $|q| \geq 1$.

Proposition 1.1.5 (Série télescopique) *Si* $u_n = a_{n+1} - a_n$ *on trouve que* $S_n = a_{n+1} - a_0$, *alors la série de terme général* u_n *converger si et seulement si la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge..*

Proposition 1.1.6 *Soient* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux séries numériques convergentes et de somme* S, T *(resp).*
Soient α *et* β *deux scalaires non nuls alors la série* $\left(\sum(\alpha u_n+\beta v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de somme* $\alpha S+\beta T$, *c-à-d*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\beta\sum_{n=0}^{+\infty}v_n.$$

Proof. Soit $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$. On aura :

$$W_n=\sum_{k=0}^{n}w_k=\sum_{k=0}^{n}\alpha u_k+\beta v_k=\alpha\sum_{k=0}^{n}u_k+\beta\sum_{k=0}^{n}v_k=\alpha S_n+\beta T_n.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}W_n=\lim_{n\to+\infty}(\alpha S_n+\beta T_n)=\alpha\lim_{n\to+\infty}S_n+\beta\lim_{n\to+\infty}T_n=\alpha S+\beta T.$$

■

Remark 1.1.4 *:*

1. *Si les séries* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge alors la série* $\left(\sum(\alpha u_n+\beta v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*
2. *Si les séries* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent alors on ne peut rien conclure sur la convergente de la série* $\left(\sum(\alpha u_n+\beta v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.1.5 *:*

1. *Soit* $u_n=1, v_n=-1, \forall n\in\mathbb{N}$.
   Les séries $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent mais la série* $\left(\sum(u_n+v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
2. *Soit* $u_n=\ln\frac{1}{n+1}, v_n=\ln\frac{1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}$.
   Les séries $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent mais la série* $\left(\sum(u_n-v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Proposition 1.1.7 (Groupement des termes) *Soient* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une série numérique convergente. Si on regroupe ses termes comme suit :*

$$\underbrace{(u_1+u_2+...+u_{n_1})}_{v_1}+\underbrace{(u_{n_1+1}+...+u_{n_2})}_{v_2}+........$$

on obtient la série $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui est aussi convergente.*

Proof. Construisons la suite des sommes partielles de la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
S_0 &= u_0 \\
S_1 &= u_0 + u_1 \\
&. \\
&. \\
&. \\
S_{n_1} &= u_0 + u_1 + ... + u_{n_1} = v_1 \\
S_{n_2} &= u_0 + u_1 + ... + u_{n_1} + u_{n_1+1} + ... + u_{n_2} = v_1 + v_2 \\
S_{n_3} &= u_0 + u_1 + ... + u_{n_3} = v_1 + v_2 + v_3.
\end{aligned}$$

Les termes $S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, ...$ sont les termes de la suite de la somme partielle de la série $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la suite $(S_{n_i})_{n_i\in\mathbb{N}}$ qui est sous suite convergente.
D'ou on déduit que la série $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même somme que la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

■

Exemple 1.1.6 *On considère la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
On a

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Alors, si

$$n = 2k \Rightarrow S_{2k} = 1 - \frac{1}{2k+1},$$

et si

$$n = 2k+1 \Rightarrow S_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+2}.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Theorem 1.1.1 (Critère de Cauchy) *La série* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente ssi*

$$\forall\epsilon > 0, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall p \geq q \geq n(\epsilon) \Rightarrow \left|\sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{q} u_k\right| < \epsilon$$

Remark 1.1.5 *On a*

$$\left|\sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{q} u_k\right| = \left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| = |S_p - S_q|.$$

Donc $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente ssi la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy.*

Exemple 1.1.7 *Soit la série harmonique* $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

On a :

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n}}_{nfois} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alors :

$$\exists\epsilon = \frac{1}{2}, \forall n \geq 1, \exists p = 2n, q = n \text{ et } |S_{2n} - S_n| \geq \frac{1}{2}.$$

Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *n'est pas suite de Cauchy et par suite la série* $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est divergente.*

1.2 Séries à termes positifs

Definition 1.2.1 *On dit qu'une série* $\left(\sum u_n\right)$ *est à termes positifs si :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0.$$

Remark 1.2.1 *Les séries* $\left(\sum u_n\right)$ *vérifiant* $u_n \geq 0, \forall n \geq n_0$ *sont aussi supposées des séries à termes positifs.*

Proposition 1.2.1 (convergence par majoration des sommes partielles) *La série à termes positifs* $\left(\sum u_n\right)$ *est convrgente ssi la suite de la somme partielle* (S_n) *est majorée.*

Proof. On a

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \Rightarrow S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0.$$

Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, ce qui prouve que

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente } \iff (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée.}$$

■

1.2.1 Critères de comparaison

L'étude de la nature d'une série à termes positifs peut être faite par la comparison de la série par des séries classiques au moyen des trois propositions de comparaison suivants:

Proposition 1.2.2 (Critère de comparaison) *Soient* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux séries numériques à termes positifs.*
Supposons que $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$, *alors:*

1. *Si* $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge alors la série* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.
2. *Si* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge alors la série* $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Le critère reste vrai si $u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0$.
Proof. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ (resp).
On a

$$\begin{aligned} u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N} \quad & \Rightarrow u_0 + u_1 + ... + u_n \leq v_0 + v_1 + ... + v_n \\ & \Rightarrow S_n \leq T_n \\ & \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n \leq \lim_{n\to+\infty} T_n \Rightarrow S \leq T. \end{aligned}$$

Alors :

1. Si on suppose $\sum v_n$ converge d'après la proposition 1.2.1, la suite (T_n) est bornée et par suite, la suite (S_n) bornée, ce qui implique que $\sum u_n$ converge.
2. C'est la contraposée du premier résultat.

■

Exemple 1.2.1 *Soit la série* $\sum \frac{1}{n^n}$. *On a*

$$u_n = \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \geq 2,$$

puisque $\sum \frac{1}{2^n}$ *converge (série géométrique de raison* $\frac{1}{2}$*). Alors d'après la proposition 1.2.2, la série* $\sum \frac{1}{n^n}$ *converge.*

Proposition 1.2.3 (Critère d'équivalence) *Soient* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux séries numériques à termes positifs (avec* $v_n \neq 0$*).*
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in \overline{\mathbb{R}_+}$, *alors :*

1. *Si* $0 < l < +\infty$*; alors*

   $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\iff$ $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

2. *Si* $l = 0$*; alors*

   $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\Rightarrow$ $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

3. *Si* $l = +\infty$*; alors*

Proof.

1. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in]0, +\infty[$, alors par définition:

   $$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow (l - \epsilon)\, v_n < u_n < (l + \epsilon)\, v_n,$$

   et pour

   $$\epsilon = \frac{l}{2}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{l}{2} v_n < u_n < \frac{3l}{2} v_n.$$

   Donc d'après le critère de comparison:

   $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, alors par définition :

   $$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow -\epsilon v_n < u_n < \epsilon v_n,$$

et pour

$$\epsilon = 1, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow -v_n < u_n < v_n.$$

Donc d'après le critère de comparison:

$\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Rightarrow$ $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$, alors par définition :

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n > Av_n,$$

et pour

$$A = 1, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n > v_n.$$

Donc d'après le critère de comparison:

$\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $\Rightarrow$ $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

■

Remark 1.2.2 *Si $l = 1$, on écrit $u_n \sim v_n$.*

Exemple 1.2.2 *Pour $u_n = \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ et $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.*
Et comme $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge donc $\sum \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Proposition 1.2.4 (Critère de comparaison logharithmique) *Soient $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux séries numériques à termes strictement positifs.*
On suppose que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors:

1. *$\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Rightarrow$ $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

2. *$\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $\Rightarrow$ $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Proof.

1. On a
$$\forall n \geq N : \frac{u_{N+1}}{u_N} \leq \frac{v_{N+1}}{v_N}, \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \leq \frac{v_{N+2}}{v_{N+1}}, ..., \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
En multipliant membre à membre, on obtient:
$$\forall n \geq N : \frac{u_{n+1}}{u_N} \leq \frac{v_{n+1}}{v_N}.$$
Ceci implique que :
$$u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n.$$
Supposons que $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\left(\sum \frac{u_N}{v_N} v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'après la proposition 1.2.2, la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. C'est la contraposée du premier résultat.

■

Proposition 1.2.5 (Comparaison par une intégrale) *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, décroissante sur un intervalle $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}_+$. Alors la série $\sum\limits_{n=a}^{+\infty} f(n)$ et l'intégrale impropre $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature.*

Proof. Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction f est décroissante donc
$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \forall x \in [k, k+1].$$
En intégrant sur $[k, k+1]$, on obtient:
$$f(k+1) \leq \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k).$$
On en déduit que :
$$\sum_{k=a+1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=a+1}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int\limits_a^n f(x)\,dx \leq \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

1. Supposons que $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$. Alors la suite $\sum\limits_{k=a+1}^{n} f(k)$ est une suite croissante majorée, et par suite convergente. Donc la série $\sum\limits_{n=a}^{+\infty} f(n)$ est convergente.

2. Supposons que $\sum\limits_{n=a}^{+\infty} f(n) < +\infty$. On a pour $t \in [a, +\infty[$

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \le \int_a^{E(t)+1} f(x)\,dx = \sum_{k=a}^{E(t)} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=a}^{E(t)} f(k) < +\infty$$

La fonction F est croissante, majorée, donc admet une limite finie quand $t \to +\infty$, et par suite l'intégrale impropre $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

■

Compléments:

On considère les suites définies par

$$v_n = f(a) + ... + f(n) - \int_a^{n+1} f(x)\,dx, \quad n \ge a.$$
$$w_n = f(a) + ... + f(n) - \int_a^{n} f(x)\,dx, \quad n \ge a.$$

Alors

$$0 \le v_n \le v_{n+1} \le w_{n+1} \le w_n \quad \text{et} \quad w_n - v_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le f(n).$$

Par suite si $f(n) \to 0$, alors les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes. En particulier elles convergent vers la même limite $c \in [v_0, w_0]$.

On a

$$f(a) + ... + f(n) \ge \int_a^{n+1} f(x)\,dx \ge f(a+1) + ... + f(n),$$

où $f(a) + ... + f(n)$ est la somme des aires des rectangles grands et $\int\limits_a^{n+1} f(x)\,dx$ est l'aire bornée par les droites $x = a$ et $x = n+1$ et $y = 0$ et $y = f(x)$.

Proof. On a :

$$v_n = \sum_{k=a}^{n} \left(f(k) - \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \right) \text{ donc } \{v_n \geq 0 \text{ et } v_n \leq v_{n+1}\}.$$
$$w_n = f(a) + \sum_{k=a+1}^{n} \left(f(k) - \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \right) \text{ donc } \{w_n \geq 0 \text{ et } w_n \geq w_{n+1}\}.$$

De plus

$$w_n - v_n = \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers c, et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers c, et $v_n \leq c \leq w_n$.

Ce qui permet de calculer numériquement c à la précision $f(n)$. ■

Exemple 1.2.3 *Considérons la série harmonique* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$
D'après la proposition 1.2.5 cette série diverge.

On utilise le complément:

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$
$$w_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Alors

$$0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq w_{n+1} \leq w_n \quad \textit{et} \quad w_n - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Ce qui donne que (v_n) et (w_n) sont adjacentes et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 0,5772.$$

Application aux séries classiques

Proposition 1.2.6 (Série de Riemann) *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann est de la forme* $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$*. Elle converge ssi $\alpha > 1$ et diverge ssi $\alpha \leq 1$.*

On applique la comparaison avec l'intégrale de Riemann $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, (Voir chapitre 5).

Proposition 1.2.7 (Série de Bertrand) *Soit la série de Bertrand*

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}} \quad \textit{pour } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On a

1. *Cette série converge si*
$$\begin{cases} \alpha > 1, \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \quad \textit{ou bien} \\ \alpha = 1, \forall \beta > 1 \end{cases}$$

2. *Cette série diverge si*
$$\begin{cases} \alpha < 1, \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \quad \textit{ou bien} \\ \alpha = 1, \forall \beta \leq 1 \end{cases}$$

On applique la comparaison avec l'intégrale de Bertrand $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} (\ln x)^{\beta}}$, (Voir chapitre 5).

Proposition 1.2.8 (Règle de Riemann) *Soit* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une série numérique à termes positifs.*

On suppose que

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \textit{ et } k \in [0, +\infty] \textit{ tel que } \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} u_n = k.$$

Alors

1. *Si* $0 \leq k < +\infty$ *et* $\alpha > 1$ *alors* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
2. *Si* $0 < k \leq +\infty$ *et* $\alpha \leq 1$ *alors* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Exemple 1.2.4 *Soit la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^2}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n \frac{1}{(\ln n)^2} = +\infty$ *donc la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^2}$ *diverge.*

1.2.2 Critères de D'Alembert et de Cauchy

Il s'agit de règles permettant parfoit de déterminer plus rapidement la nature d'une série à termes positifs.

Proposition 1.2.9 (Règle de D'Alembert) *Soit* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une série numérique à termes strictement positifs, alors:*

1. *S'il existe* $\lambda \in]0,1[$ *et un rang* n_0 *à partir duquel on a* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$*, alors la série* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

2. *S'il existe un rang* n_0 *à partir duquel on a* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$*, alors la série* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Proof.

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda < 1 \Longrightarrow \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq \lambda \Longrightarrow u_n \leq \lambda u_{n-1}$.

   Par récurrence on obtient $u_n \leq \lambda^n u_0$. Puisque $\lambda \in]0,1[$, alors $(\sum \lambda^n u_0)$ est une série géométrique convergente et en vertu du critère de comparaison , la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Longrightarrow u_{n+1} \geq u_n \geq u_0$, la suite (u_n) est alors croissante. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq u_0 \neq 0$ et par suite la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

■

Corollary 1.2.1 (Critère de D'Alembert) *Soit* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une série numérique à termes strictement positifs. Supposons que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ *existe (finie ou infini).*

1. *Si* $l < 1$ *alors la série* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

2. *Si* $l > 1$ *alors la série* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

3. *Si* $l = 1$*, on ne peut rien dire sur la convergence.*

Proof. Si l est finie on a:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \quad &\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \epsilon \\ &\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies l - \epsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \epsilon + l\end{aligned}$$

1. Si $l < 1$. Pour $\epsilon_0 = \dfrac{1-l}{2}$ (ce qui donne $l + \epsilon_0 < 1$), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1-l}{2} + l = \frac{1+l}{2} < 1, \quad \forall n \geq n_0$$

Ainsi d'après la proposition précédente, la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. Si $l > 1$, Pour $\epsilon_1 = \dfrac{l-1}{2}$ (ce qui donne $l - \epsilon_1 > 1$), il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > l - \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2} > 1, \quad \forall n \geq n_1$$

Ainsi d'après la proposition précédente, la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3. Si $l = 1$, on n'obtient aucune information sur la convergence de la série et pour ceci il suffit de prendre des contre exemples:

- Pour la série $\sum \dfrac{1}{n}$ divergente, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

- Pour la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ convergente, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

<u>Si l est infinie on a:</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty \iff \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} > A.$$

Il est évident que pour $A \geq 1$ la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. ∎

Proposition 1.2.10 (Règle de Cauchy) *Soit $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série numérique à termes positifs, alors:*

1. *S'il existe $\lambda \in]0,1[$ et un rang n_0 à partir duquel on a $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$, alors la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

2. *S'il existe un rang n_0 à partir duquel on a $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, alors la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Proof. .

1. $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda < 1 \Longrightarrow u_n \leq \lambda^n$.

   $(\sum \lambda^n)$ étant une série géométrique convergente ($\lambda \in]0,1[$) et en vertu du critère de comparaison , la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. $\sqrt[n]{u_n} \geq 1 \Longrightarrow u_n \geq 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 1 \neq 0$ et par suite la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

■

Corollary 1.2.2 (Critère de Cauchy) *Soit $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série numérique à termes positifs. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ existe (finie ou infini).*

1. *Si $l < 1$ alors la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

2. *Si $l > 1$ alors la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

3. *Si $l = 1$, on ne peut rien dire sur la convergence.*

Proof. Si l est finie on a:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \quad &\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow \left| \sqrt[n]{u_n} - l \right| < \epsilon \\
&\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow l - \epsilon < \sqrt[n]{u_n} < \epsilon + l \\
&\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow (l - \epsilon)^n < u_n < (\epsilon + l)^n
\end{aligned}$$

1. Si $l < 1$. Pour $\epsilon_0 = \dfrac{1-l}{2}$ (ce qui donne $0 < l + \epsilon_0 < 1$), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que on a

   $$u_n < (\epsilon_0 + l)^n = \left(\frac{1+l}{2}\right)^n, \quad \forall n \geq n_0$$

   Puisque la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1+l}{2}\right)^n$ de raison $\dfrac{1+l}{2} < 1$ est convergente alors la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. Si $l > 1$, Pour $\epsilon_1 = \dfrac{l-1}{2}$ (ce qui donne $l - \epsilon_1 > 1$), il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que on a

   $$u_n > (l - \epsilon_1)^n > \left(\frac{l+1}{2}\right)^n, \quad \forall n \geq n_1$$

Puisque la série géométrique $\sum \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$ de raison $\frac{1+l}{2} > 1$ est convergente alors la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3. Si $l = 1$, on n'obtient aucune information sur la convergence de la série et pour ceci il suffit de prendre des contre exemples:

   • Pour la série $\sum \frac{1}{n}$ divergente, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

   • Pour la série $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Si l est infinie on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty \iff \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies \sqrt[n]{u_n} > A.$$

Il est évident que pour $A \geq 1$ la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. ■

Exemple 1.2.5 *:*

1. *La série* $\sum \frac{1}{n!}$, *converge d'après D'Alembert puisque:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1.$$

2. *La série* $\sum \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$, *converge d'après Cauchy puisque:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right) = 2 > 1.$$

Corollary 1.2.3 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \implies \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$

Donc si on tombe sur le cas de doute en appliquant le critère de D'Alembert, il ne faut pas appliquer le critère de Cauchy car on ne pourra rien conclure aussi.

1.2.3 Complément sur les séries numériques à temes positifs

Proposition 1.2.11 (Règle de Duhamel) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs satisfaisant à*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\beta \ const)$$

Alors:

- *Si $\beta > 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.*
- *Si $\beta < 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.*

Exemple 1.2.6 *Soit la série à terme général :*

$$u_n = \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6........(2n)}$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2}\left[1 + \frac{2}{n}\right]^{-1} = 1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors la série $\sum u_n$ est convergente car $\beta = \dfrac{3}{2} > 1$.

Proposition 1.2.12 (Règle de Raabe) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs satisfaisant à*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = l \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Alors:

- *Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.*
- *Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.*
- *Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.*

Exemple 1.2.7 *On considère la série numérique de terme général donné par :*

$$u_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}, \quad \textit{pour } n \geq 1 \textit{ et } x > 0.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$*, donc le critère de D'Alembert ne donne aucune information sur la convergence de la série. Appliquons la règle de Raabe*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{x+1-1}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{n+1} = x.$$

Donc si $x > 1$*, la série converge et si* $0 < x < 1$*, la série diverge.*

1.3 Séries à termes de signe quelconque

Une série $\sum u_n$ est dite à termes de signe quelconque, si l'on trouve parmi ses termes aussi bien des termes positifs que des termes négatifs.

1.3.1 Séries absolument convergente

Definition 1.3.1 *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique. On dit qu'elle est absolument convergente si la série numérique à terme positif* $\sum |u_n|$ *est convergente or :*

- *Si* $u_n \in \mathbb{R}$, $|u_n|$ *désigne la valeur absolue de* u_n.
- *Si* $u_n \in \mathbb{C}$, $|u_n|$ *désigne le module de* u_n.

Exemple 1.3.1 *:*

1. *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(2n)}{n^3}$ *converge absolument, car* $\left|\frac{\sin(2n)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$ *et* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ *converge.*
2. *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}$ *ne converge pas absolument, car*

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \geq \frac{1}{n+2}$$

et la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n+2}$ *diverge.*

3. *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{e^{in}\sin n}{n(n+2)}$ *est absolument convergente, car*

$$\left|\frac{e^{in}\sin n}{n(n+2)}\right| = \left|\frac{\sin n}{n(n+2)}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

et la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge.*

Proposition 1.3.1 (Cas complexe) *Si le terme général est complexe* $u_n = a_n + ib_n$*, alors la série* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est absolument convergente ssi les séries* $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont absolument convergentes.*

Theorem 1.3.1 *Toute série absolument convergente est convergente (la réciproque est fausse). En d'autres termes:*

$$\sum u_n \text{ converge absolument } \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

Proof. Soit $\sum u_n$ converge absolument alors par définition la série $\sum |u_n|$ converge donc elle satisfait la condition de Cauchy:

$$\begin{aligned}\forall\epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}^* : \forall n > n_\epsilon, \forall p \geq 0 \quad &\Longrightarrow |u_n| + |u_{n+1}| + ... + |u_{n+p}| < \epsilon \\ &\Longrightarrow |u_n + u_{n+1} + ... + u_{n+p}| < \epsilon,\end{aligned}$$

ce qui implique que la série $\sum u_n$ satisfait la condition de Cauchy et par suite elle est convergente.

■

Theorem 1.3.2 *Soit* $\sum u_n$ *une série absolument convergente et soit* $\sum v_n$ *une série obtenue à partir de la série* $\sum u_n$ *en changeant l'ordre des ses termes, alors:*

- *La série* $\sum v_n$ *est absolument convergente.*
- *La série* $\sum v_n$ *converge vers la même somme que* $\sum u_n$*.*

Proposition 1.3.2 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques convergentes absolument.*

1. $\forall\alpha$ *et* β *deux scalaires non nuls, la série* $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)$ *est convergente absolument.*

2. *La série produit* $\sum w_n$ *tel que* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ *est absolument convergente.*

Remark 1.3.1 *Le produit de Cauchy de deux séries convergente n'est pas nécessairement convergent.*

Remark 1.3.2 *On peut appliquer les critères de D'Alembert et de Cauchy pour la convergence absolue comme suit:*

1. $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l,$
   - *Si* $l < 1$*, la série* $\sum u_n$ *converge absolument.*
   - *Si* $l > 1$*, la série* $\sum u_n$ *ne converge pas absolument.*

2. $\lim_{n \to +\infty} \left| \sqrt[n]{u_n} \right| = l,$
   - *Si* $l < 1$*, la série* $\sum u_n$ *converge absolument.*
   - *Si* $l > 1$*, la série* $\sum u_n$ *ne converge pas absolument.*

1.3.2 Séries semi-convergente

Definition 1.3.2 *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique. On dit qu'elle est semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.*

Theorem 1.3.3 *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique semi-convergente, alors les séries* $\sum u_n^+$ *et* $\sum u_n^-$ *sont divergentes où :*

- $\sum u_n^+$ *série composés des termes positifs.*
- $\sum u_n^-$ *série composés des termes négatifs.*

Proposition 1.3.3 (Critère d'Abel) *Soit donnée la série* $\left(\sum a_n b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *tel que :*

1. *La suite* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est monotone et converge vers* 0.
2. *La suite des sommes partielles* $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de la série* $\left(\sum b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *soit bornée, i.e*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^* : |B_n| = |b_0 + b_1 + ... + b_n| < M.$$

Alors la série $\left(\sum a_n b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

Proof. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} : |B_n| < M \quad \text{et} \quad b_n = B_n - B_{n-1}.$$

De plus si on suppose la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers zéro alors $a_n \geq 0$ et $a_n - a_{n+1} \geq 0$. Soit S_n la somme partielle de la série $\left(\sum a_n b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ alors pour $m \geq n$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_m - S_n| &= |a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + ... + a_m b_m| \\
&= |a_{n+1}\left(B_{n+1} - B_n\right) + a_{n+2}\left(B_{n+2} - B_{n+1}\right) + ... + a_m\left(B_m - B_{m-1}\right)| \\
&= |-B_n a_{n+1} + B_{n+1}\left(a_{n+1} - a_{n+2}\right) + ... + B_{m-1}\left(a_{m-1} - a_m\right) - B_m a_m| \\
&\leq |B_n|\, a_{n+1} + |B_{n+1}|\left(a_{n+1} - a_{n+2}\right) + ... + |B_{m-1}|\left(a_{m-1} - a_m\right) + |B_m|\, a_m \\
&\leq M\left[a_{n+1} + \left(a_{n+1} - a_{n+2}\right) + ... + \left(a_{m-1} - a_m\right) + a_m\right] \\
&\leq 2M a_{n+1}.
\end{aligned}$$

or

$$\left\{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\right\} \iff \left\{\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \implies a_n < \frac{\epsilon}{2M}\right\}$$

par conséquent

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m \geq n \geq n_0 \implies |S_m - S_n| < 2M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon,$$

d'où la convergence de la série $\left(\sum a_n b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Exemple 1.3.2 *Soit la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin 2n}{\sqrt{n}}$
Posons $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ *et* $b_n = \sin 2n$.
On a $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1}$ *i.e décroissante et* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

De plus

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin 1\sin 2k}{2\sin 1}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\sin 1}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)-\cos(2k+1)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\sin 1}\left[(\cos 1-\cos 3)+(\cos 3-\cos 5)+...+(\cos(2n-1)-\cos(2n+1))\right]\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\sin 1}\left[\cos 1-\cos(2n+1)\right]\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{|\cos 1|+|\cos(2n+1)|}{|\sin 1|}\leq\frac{1}{|\sin 1|}=M
\end{aligned}$$

Alors d'après Abel la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\sin 2n}{\sqrt{n}}$ *est convergente.*

Remark 1.3.3 *Les séries* $\sum\dfrac{\cos n}{n^{\alpha}}$ *et* $\sum\dfrac{\sin n}{n^{\alpha}}$ *sont convergentes si* $\alpha>0$*, et semi convergentes si* $\alpha\in\,]0,1]$*. D'ailleurs elles sont absolument convergentes si* $\alpha>1$*, et semi convergentes si* $\alpha\in\,]0,1]$*.*

Proof. Il suffit d'appliquer le critère d'Abel. ■

1.3.3 Séries alternées

Definition 1.3.3 *On appelle série alternée, toute série* $\sum u_n$ *dont le terme général est alternativement positif puis négatif i.e:*

$$u_n=(-1)^n a_n \quad \text{où} \quad a_n\geq 0,\forall n\in\mathbb{N}.$$

Dans le cas général une série alternée sera souvent notée : $\sum(-1)^n|u_n|$

Corollary 1.3.1 (Critère de Leibniz) *Toute série alternée* $\sum(-1)^n a_n$ *dont la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroit vers zéro est convergente.*

Proof. On a

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right|\leq 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Si de plus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers zéro alors d'après Abel la série $\sum(-1)^n a_n$ converge. ■

Exemple 1.3.3 (Série de Riemann alternée) *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *pour* $(\alpha > 0)$ *est alternée et vérifie les hypothèses du critère de Leibniz, et donc elle converge.*

D'ailleurs la série est semi-convergente pour $0 < \alpha \leq 1$ *et absolument convergente pour* $\alpha > 1$.

Proposition 1.3.4 *Soit* $\left(\sum (-1)^n a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une série alternée convergente de somme* S. *Alors:*

1. *La suite du reste d'ordre* n *est majorée par :*

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}.$$

2. *La somme* S *est majorée par* a_0 *:*

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_0$$

3. *La somme de la série* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ *a le signe du premier terme* $(-1)^{n_0} a_{n_0}$.

1.3.4 Méthode du développement asymptotique

Cette méthode est la généralisation de la méthode d'équivalence dans le cas des séries à termes de signe quelconque.

Le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs permet de conclure la nature d'une série en se ramenant à une série plus simple à étudier qui correspond à une approximation au premier ordre. Malheureusement ce n'est pas le cas pour les séries à termes quelconques (voir l'exercice **??**), et pour ceci on donne un développement asymptotique du terme général.

Exemple 1.3.4 *Soit la série* $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$.

On remarque que les critères précédents (Abel et Leibniz) ne s'applique pas pour l'étude de la nature de cette série, dans ce cas on peut utiliser le développement limité de $\ln(1+x)$ *au voisinage de* 0 *:*

$$u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} - \frac{\cos^2 n}{2\sqrt{n}} + \frac{\cos^3 n}{3n^{3/2}} + o\left(\frac{\cos^3 n}{3n^{3/2}}\right).$$

On a

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \quad \textit{converge d'après Abel.} \\ \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^2 n}{2\sqrt{n}} \quad \textit{diverge puisque } \frac{\cos^2 n}{2\sqrt{n}} = \frac{1+\cos 2n}{2n}. \\ \displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{\cos^3 n}{3n^{3/2}} + o\left(\frac{\cos^3 n}{3n^{3/2}} \right) \right) \quad \textit{converge absolument.} \end{cases}$$

Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$ *diverge.*

1.4